за параметром $M = \left\langle\left\langle \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} \hat{c}_j S_j^z \right\rangle\right\rangle_c$ — повній конфігураційно засередненій намагніченості. Запропонована у цій праці схема виділення самоузгоджених полів дає можливість більш послідовно врахувати вплив структурних кореляцій на термодинамічні та динамічні властивості магнетиків.

Автор висловлює вдячність проф. І. О. Вакарчуку за корисні обговорення результатів даної праці.

1. *Изюмов Ю. А., Кассан-оглы Ф. А., Скрябин Ю. Н.* Полевые методы в теории ферромагнетизма.— М. : Наука, 1974.— 22 с.
2. *Барьяхтар В. Г., Криворучко В. Н., Яблонский Д. А.* Функции Грина в теории магнетизма.— Киев : Наук. думка, 1984.— 336 с.
3. *Mano H.* A new cluster approximation to the dilute Ising and Heisenberg ferromagnets // Progr. of Theor. Phys.— 1977.— **57**, N 6.— P. 1848—1861.
4. *Hoeppener B., Sobotta G., Wagner D.* Cluster expansion for dilute Heisenberg ferromagnets // J. Phys. C: Solid State Phys.— 1979.— **12**, N 21.— P. 4553—4571.
5. *Vakarchuk I. A., Rudavsky Yu. K.* Free energy representation of quantum Heisenberg model as the functional integral.— Kiev, 1979.— 61 p.— (Prepr.// Acad. Sci. Ukr. SSR. Inst. Theor. Phys.; ITP-79-62E).
6. *Micnas R.* Application of the functional integral method to the classical and quantum spin models // Physica.— 1979.— **98A**, N 2.— P. 403—441.
7. *Вакарчук И. А., Понедилок Г. В., Рудавский Ю. К.* Теория жидких магнетиков // ТМФ.— 1984.— **58**, № 3.— С. 445—460.
8. *Vakarchuk I. A., Rudavskii Yu. K., Ponedilok G. V.* Free energy of the amorphous ferromagnets with Heisenberg exchange interaction and liquid-like disorder // Phys. status solidi (b).— 1985.— **128**, N 2.— P. 231—242.
9. *Yonezawa F., Morigaki K.* Coherent potential approximation // Progr. Theor. Phys. (Suppl.).— 1973.— **58**.— P. 1—76.
10. *Вакс В. Г., Ларкин А. И., Пикин С. А.* Термодинамика идеального ферромагнетика // ЖЭТФ.— 1967.— **53**, № 1.— С. 281—296.

Інститут фізики конденсованих систем
АН України, Львів

Одержано 9.07.92

УДК 531/533; 530.12:531.18

А. А. ДУВІРЯК, В. І. ТРЕТЯК

КЛАСИЧНА РЕЛЯТИВІСТСЬКА ДИНАМІКА ДВОХ ТІЛ НА СВІТЛОВОМУ КОНУСІ

Розглядається релятивістська механіка двох взаємодіючих частинок при означенні одночасності на ізотропних конусах майбутнього (або минулого). Побудовано різні формулювання такої механіки в рамках як 3-вимірних, так і явно коваріантних лагранжових та гамільтонових формалізмів. Шляхом встановлення її зв'язку з формалізмом асиметричних інтегралів дії типу Фоккера знайдено клас моделей, що допускають теоретико-польову інтерпретацію взаємодії.

Релятивістська механіка системи взаємодіючих частинок може формулюватися у рамках як 4-вимірних (явно коваріантних) підходів, так і 3-вимірних із виділеним параметром еволюції t [1]. У межах кожного із цих формулювань існує велика різноманітність теорій з різними вихідними положеннями. Взаємозв'язок між різними формалізмами релятивістської динаміки значно складніший, ніж у нерелятивістському випадку. Його часто буває зручно встановити на рівні моделей, що допускають більш-менш явну конструкцію з обмеженим числом довільних функцій. Такі моделі корисні і для більш глибокого розуміння структури та можливостей різних формалізмів.

В основі кожного 3-вимірного опису релятивістської системи взаємодіючих частинок лежить певне означення одночасності, що виділяє спільний для всіх частинок системи параметр еволюції [2]. За термінологією Дірака [3], такий опис відповідає певній формі релятивістської динаміки. Найбільш поширене ейнштейнове означення одночасності $x_a^0(t) = t$, де $a = \overline{1, N}$, N — число частинок системи, відповідає миттєвій формі динаміки.

Інший приклад дає поширена тепер у багатьох розрахунках фронтальна форма динаміки, де $x_a^0(t) - x_a^3(t) = t$. Взагалі довільна (геометрична) форма динаміки може задаватися просторовоподібним (або ізотропним) шаруванням $\Sigma = \{\Sigma_t \mid t \in \boldsymbol{R}\}$ простору Мінковського $\boldsymbol{M}_4$ гіперповерхнями

$$\Sigma_t = \{x \in \boldsymbol{M}_4 \mid \vartheta(x) = t\}, \tag{1}$$

де функція $\vartheta : \boldsymbol{M}_4 \to \boldsymbol{R}$ задовольняє умову

$$(\partial_\nu \vartheta)(\partial^\nu \vartheta) \geqslant 0, \quad \partial_\nu \equiv \partial/\partial x^\nu. \tag{2}$$

З (2) випливає $\partial_0 \vartheta \neq 0$, отже, рівняння гіперповерхні може бути розв'язане відносно змінної x^0:

$$x^0 = \varphi(t, \boldsymbol{x}); \tag{3}$$

тут $\boldsymbol{x} \equiv \{x^i \mid i = 1, 2, 3\}$.

Тепер домовимось описувати (часоподібні) світові лінії системи частинок γ_a сукупністю точок їх перетину з елементами шарування Σ:

$$\gamma_a = \{x_a(t) = \gamma \cap \Sigma_t \mid t \in \boldsymbol{R}\}. \tag{4}$$

В'язь $x_a(t) \in \Sigma_t$ вказує на те, що для кожної частинки з чотирьох координат $x_a^\nu(t)$, $\nu = \overline{0,3}$, точки $x_a(t)$ незалежними є лише три, наприклад $x_a^i(t)$, а нульові компоненти $x_a^0(t)$ можуть бути виключені за допомогою рівняння гіперповерхні (1):

$$\vartheta[x_a(t)] = t, \quad x_a^0(t) = \varphi(t, \boldsymbol{x}_a(t)). \tag{5}$$

Навпаки, отримавши у результаті розв'язку динамічної задачі у заданій формі динаміки функції $x_a^i(t)$, можемо за допомогою (5) відновити параметричні рівняння світових ліній частинок γ_a:

$$x^i = x_a^i(t), \quad x^0(t) = \varphi(t, \boldsymbol{x}_a(t)). \tag{6}$$

Оскільки спільний параметр еволюції t виділяється, взагалі кажучи, неінваріантним чином, дослідження релятивістської інваріантності 3-вимірних описів потребує спеціальних зусиль. У релятивістській лагранжовій динаміці [1, 2, 4] воно здійснюється за допомогою так званих векторних полів Лі — Беклунда [5] вигляду

$$X_\alpha = \sum_a \sum_{s=1}^{\infty} (D^s \xi_{a\alpha}) \frac{\partial}{\partial \overset{s}{x}{}_a^i}, \quad \alpha = \overline{1, 10}, \tag{7}$$

що діють на просторі функцій $f : J^\infty \to \boldsymbol{R}$, залежних від координат частинок x_a^i та їх похідних за часом t, $\overset{s}{x}{}_a^i = D^s x_a^i$. Компоненти $\xi_{a\alpha}^i$ векторних полів (7) визначаються відповідними перетвореннями простору Мінковського $\boldsymbol{M}_4$ з групи Пуанкаре $\mathcal{P}(1.3)$, поєднаними із перерахунком до нової одночасності $t' = t$ [4], та утворюють реалізацію алгебри Лі $\mathcal{AP}(1.3)$ групи Пуанкаре

$$X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = c_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, \tag{8}$$

де $c_{\alpha\beta}^\gamma$ — тензор структурних констант групи $\mathcal{P}(1.3)$.

Подібну конструкцію можна розвинути і для інших груп, інваріантність відносно яких ми могли б бажати розглядати: Галілея, де Сіттера, конформної і т. ін., а також для певних підгруп групи Пуанкаре. Серед останніх особливу роль відіграють дві підгрупи, пов'язані з певною формою динаміки Σ: група інваріантності

$$I_I(\Sigma) = \{g \in \mathcal{P}(1.3) \mid \vartheta(gx)|_{\vartheta(x)=t} = \alpha(t)\} \tag{9}$$

і група стабільності

$$I_S(\Sigma) = \{g \in \mathcal{P}(1.3) \mid \vartheta(gx) = \vartheta(x)\}. \tag{10}$$

Очевидно, що $I_S(\Sigma)$ є підгрупою $I_I(\Sigma)$, а обидві вказані групи є підгрупами групи Пуанкаре.

У релятивістській лагранжовій динаміці умови пуанкаре- інваріантності виражаються системою рівнянь [1, 2, 4]

$$X_\alpha L = D\Omega_\alpha \tag{11}$$

для функції Лагранжа $L : J^\infty \to \boldsymbol{R}$ (Ω_α — деякі функції). Їх аналіз показує, що у загальному випадку для довільної форми динаміки Σ опис взаємодіючих частинок вимагає використання лагранжіанів, залежних від похідних за часом усіх порядків. Інакше кажучи, припущення про те, що лагранжіан L залежить від похідних не вище деякого порядку $s \geqslant 1$, з необхідністю приводить до виразів, які описують систему невзаємодіючих частинок [2, 6].

Причиною цього факту, який значно ускладнює побудову релятивістської динаміки взаємодіючих частинок, є те, що в 4-вимірному просторі-часі Мінковського для кожної геометричної форми динаміки Σ

$$I_l(\Sigma) \neq \mathscr{P} \ (1.3). \tag{12}$$

Зазначимо, що умови інваріантності відносно підгрупи $I_l(\Sigma)$ допускають розв'язки із довільним порядком похідних.

У 2-вимірному просторі-часі для фронтальної форми динаміки Σ^F рівність $I_l(\Sigma^F) = \mathscr{P}$ (1.1) імплікує існування релятивістських лагранжіанів без обмежень на максимальний порядок похідних. Зокрема, загальний розв'язок умов пуанкаре-інваріантності у класі лагранжіанів, залежних від координат частинок x_a та їх перших похідних $v_a = dx/dt$, має вигляд для системи двох частинок [7]

$$L = rF(y_1, y_2), \tag{13}$$

де $r \equiv x_1 - x$, $y_a \equiv r(1 + 2v_a)^{-1/2}$; F — довільна (достатньо гладка) функція двох аргументів.

Точний вираз (13) дозволяє простежити взаємозв'язки різних формулювань релятивістської динаміки [7, 8], може бути джерелом релятивістських моделей, що допускають точні розв'язки як у класичному [8], так і у квантовому [9] випадках.

Бажаючи узагальнити цей результат на 4-вимірний простір-час, слід вийти за межі класу геометричних форм динаміки [1]. При цьому треба мати на увазі, що вирішальними для переходу від 4- до 3-вимірного опису є співвідношення вигляду (5), означені на світових лініях частинок. Якщо відмовитись від геометричної інтерпретації одночасності як відношення між довільними точками простору Мінковського (незалежно від існування частинок), найпростішим узагальненням (5) для системи двох частинок можуть бути співвідношення

$$x_a^0 = \varphi_a(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2), \quad a = 1, 2, \tag{14}$$

або пара в'язей:

$$\chi_a(t, x_1(t), x_2(t)) = 0. \tag{15}$$

У цьому випадку відношення одночасності задається лише між такими точками $\boldsymbol{M}_4$, які лежать на світових лініях даної системи частинок. Для побудови релятивістської динаміки більшого й не треба.

Для того щоб уникнути обмежень на вищий порядок похідних у лагранжіані, одну із в'язей (15) слід вибирати пуанкаре-інваріантною. Практично єдиний вибір для системи двох частинок — це співвідношення

$$(x_1(t) - x_2(t))^2 = 0, \tag{16}$$

яке для однозначності слід доповнити умовою

$$\operatorname{sgn}(x_1^0(t) - x_2^0(t)) = \eta, \tag{17}$$

де $\eta = \pm 1$.

З формул (16), (17) випливає, що одночасними у нашому описі вважаються точки світових ліній, розташовані на поверхні світлового конуса з вершиною в одній з цих точок. Параметр η характеризує вибір верхньої або нижньої частини цього конуса.

Ідея такого означення одночасності міститься ще у статті [10], її формулювання у рамках 4-вимірного опису детально опрацьоване у працях [11—13]. Співвідношення (16), (17) визначають різницю нульових компонент

$$x_1^0(t) - x_2^0(t) = \eta\,|\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_2(t)|. \tag{18}$$

Для означення числового значення спільного параметра еволюції виберемо співвідношення

$$\vartheta\left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2}\right) = t, \tag{19}$$

де $\vartheta(x)$ — функція, що визначає відповідні геометричні форми динаміки (1). Звідси

$$\frac{x_1^0(t) + x_2^0(t)}{2} = \varphi\left(t, \frac{\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{x}_2(t)}{2}\right), \tag{20}$$

що разом із (18) приводить до співвідношень типу (14):

$$x_1^0 = \varphi(t, \boldsymbol{y}) + \frac{1}{2}\eta\,|\boldsymbol{r}|, \quad x_2^0 = \varphi(t, \boldsymbol{y}) - \frac{1}{2}\eta\,|\boldsymbol{r}|. \tag{21}$$

Тут і далі використовуються змінні $y^\mu \equiv (x_1^\mu + x_2^\mu)/2$, $r^\mu \equiv x_1^\mu - x_2^\mu$, а також векторні позначення $\boldsymbol{y} \equiv \{y^i \mid i = 1, 2, 3\}$ і т. ін.

Тривимірні описи, які отримуватимуться при конкретному виборі функції ϑ у (19), називатимемо тими ж термінами, що й у випадку геометричних форм динаміки, додаючи букву I (ізотропна). Так, I-миттєва форма динаміки ($\varphi(t, \boldsymbol{x}) = t$) характеризується співвідношеннями

$$x_a^0 = t - \frac{1}{2}(-1)^a\,\eta\,|\boldsymbol{r}|, \quad a = 1, 2; \tag{22}$$

I-фронтальна ($\varphi(t, \boldsymbol{x}) = t + x^3$) — $x_a^0 = t + \frac{1}{2}(x_1^3 + x_2^3 - (-1)^a\,\eta\,|\boldsymbol{r}|)$. (23)

Зазначимо, що в 1-вимірному випадку при $\eta = \operatorname{sgn}(x_2 - x_1)$ з (23) маємо

$$x_a^0 = t - x_a, \tag{24}$$

що відповідає геометричному означенню фронтальної форми динаміки [7]. Це підтверджує наші сподівання отримати на цьому шляху 3-вимірні узагальнення виразів типу (13).

У даній праці розглядаються умови пуанкаре-інваріантності 3-вимірного лагранжового опису в рамках ізотропних форм динаміки (21), знаходиться загальний вираз відповідної функції Лагранжа, залежної від координат і швидкостей взаємодіючих частинок, та досліджується зв'язок з іншими підходами до побудови релятивістської динаміки: інтегралами дії типу Фоккера, 4-вимірним лагранжовим і ньютоновим формалізмами, 3-вимірним гамільтоновим та 4-вимірним гамільтоновим формалізмом із в'язями.

1. Умови пуанкаре-інваріантності та структура функції Лагранжа. Для формулювання умов пуанкаре-інваріантності 3-вимірного лагранжового опису у рамках ізотропних форм динаміки необхідна відповідна реалізація алгебри Лі групи Пуанкаре векторними полями Лі — Беклунда вигляду (7), що характеризують інфінітезимальні перетворення одночасних координат частинок. Розгляньмо інфінітезимальні перетворення групи Пуанкаре $\mathcal{P}$ (1.3) в $\boldsymbol{M}_4$

$$x \mapsto x + \lambda^\alpha \zeta_\alpha(x) + o(\lambda) \tag{25}$$

з параметрами λ^α, $\alpha = \overline{1,10}$. Оскільки дія групи $\mathcal{P}$ (1.3) зберігає конус (16), вона переводитиме одночасні точки світових ліній знову в одночасні, міняючи лише числове значення параметра еволюції:

$$\boldsymbol{x}_a(t) \mapsto \boldsymbol{x}_a(t) + \lambda^\alpha \zeta_\alpha(x_a(t)) = \boldsymbol{x}'_a(t'). \tag{26}$$

де

$$t' = t + \lambda^\alpha \omega_\alpha, \tag{27}$$

і згідно з (19)

$$\omega_\alpha = \frac{1}{2}\lambda^\alpha (\zeta_\alpha^\nu (x_1) + \zeta_\alpha^\nu (x_2))\, \partial_\nu \vartheta \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) =$$

$$= \lambda^\alpha (\zeta_\alpha^\nu \partial_\nu \vartheta) \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \omega_\alpha (t, y). \tag{28}$$

Нульові компоненти у наведених виразах повинні виключатися за допомогою співвідношень (21). Інфінітезимальні перетворення одночасних 3-вимірних координат мають, згідно з (26), (27), вигляд

$$x_a^{i'}(t) = x_a^{i'}(t' - \lambda^\alpha \omega_\alpha) = x_a^i (t) + \lambda^\alpha \xi_{a\alpha}^i, \tag{29}$$

де функції

$$\xi_{a\alpha}^i = \zeta_\alpha (x_a (t)) - v_a^i \omega_\alpha, \quad v_a^i \equiv dx_a^i/dt \tag{30}$$

визначають компоненти векторних полів Лі — Беклунда вигляду (7). Характерною рисою даної ситуації є відсутність залежності функції ω_α від номера частинки за аналогією до 1-вимірного випадку фронтальної форми динаміки [7] та на відміну від загального випадку геометричних форм динаміки у 4-вимірному просторі-часі. Неважко переконатися, що побудовані на основі (30) векторні поля X_α задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лі групи Пуанкаре.

Якщо тепер в умовах пуанкаре-інваріантності (11) покласти

$$\Omega_\alpha = -\omega_\alpha L, \tag{31}$$

то вони набудуть вигляду

$$\hat{X}_\alpha L + L D\omega_\alpha = 0, \tag{32}$$

де $\hat{X}_\alpha \equiv X_\alpha + \omega_\alpha D$, і не накладатимуть обмежень на максимальний порядок похідних у лагранжіані. Зокрема, приймаючи, як це має місце в нерелятивістській механіці, що функція Лагранжа залежить максимум від перших похідних

$$L = L(t, \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{v}_a), \tag{33}$$

в (32) отримуємо

$$\hat{X}_\alpha = \omega_\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{a=1}^{2} \left(\zeta_{a\alpha}^i \frac{\partial}{\partial x_a^i} + (D\zeta_{a\alpha}^i - v_\alpha^i D\omega_\alpha)\frac{\partial}{\partial v_a^i}\right), \quad \zeta_{a\alpha}^i \equiv \zeta_a^i (x_a (t)). \tag{34}$$

Наприклад, для l-миттєвої форми умови пуанкаре-інваріантності набирають вигляду

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad \sum_{a=1}^{2} \frac{\partial L}{\partial x_a^i} = 0, \quad \sum_{a=1}^{2} \varepsilon_{ijk} \left(x_a^j \frac{\partial L}{\partial x_{ak}} + v_a^j \frac{\partial L}{\partial v_{ak}}\right) = 0, \tag{35}$$

$$\eta |\boldsymbol{r}| \frac{\partial L}{\partial r^i} + \sum_{a=1}^{2} \left(\left(1 - \frac{(-1)^a}{2} \eta \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}\right) \delta_i^j - v_a^j \dot{y}_i\right) \frac{\partial L}{\partial v_a^j} + \dot{y}_i L = 0, \tag{36}$$

де ε_{ijk} — символ Леві — Чівіта, верхні й нижні положення 3-вимірних індексів i, j, k вважаються еквівалентними і $\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$.

Неважко знайти загальний розв'язок рівнянь (35), (36) і узагальнити результати на довільну ізотропну форму динаміки. Можна, однак, легко зрозуміти, що у структурі загального розв'язку умов пуанкаре-інваріантності важливу роль повинні відігравати 4-скаляри, побудовані з векторів $x_1(t) - x_2(t)$ та $\dot{x}_a = dx_a(t)/dt$. Позначаючи

$$\sigma = (x_1^\mu - x_2^\mu)\, \dot{x}_{1\mu} = (x_1^\mu - x_2^\mu)\, \dot{x}_{2\mu} = \eta |\boldsymbol{r}| D\varphi (t, y) - \boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{y}}, \tag{37}$$

$$\Gamma_a^{-2} \equiv \dot{x}_a^2 = \dot{x}_a^\mu \dot{x}_{a\mu} = \left(D\varphi (t, \boldsymbol{y}) - \frac{(-1)^a}{2} \eta \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}\right)^2 - \boldsymbol{v}_a^2, \tag{38}$$

$$\varkappa \equiv \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2 = \dot{x}_1^\mu \dot{x}_{2\mu} = (D\varphi (t, \boldsymbol{y}))^2 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 - \frac{1}{4} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})^2, \tag{39}$$

де $v \equiv v_1 - v_2$, і враховуючи співвідношення

$$\hat{X}_\alpha \sigma = -\sigma D\omega_\alpha, \quad \hat{X}_\alpha \Gamma_a = \Gamma_a D\omega_\alpha, \quad \hat{X}_\alpha \varkappa = -2\varkappa D\omega_\alpha, \tag{40}$$

які можна перевірити безпосередньо, приходимо до висновку, що загальний розв'язок умов пуанкаре-інваріантності (32) 3-вимірного лагранжового опису в припущенні (33) у довільній ізотропній формі динаміки (16), (17), (19) має вигляд

$$L = \eta\sigma F(\sigma_1, \sigma_2, \omega), \tag{41}$$

де

$$\sigma_a \equiv \Gamma_a \sigma = (x_1^{\nu} - x_2^{\nu})\, \dot{x}_{a\nu} / \sqrt{\dot{x}_a^2}; \tag{42}$$

$$\omega \equiv \Gamma_1 \Gamma_2 \varkappa = \dot{x}_1^{\nu} \cdot \dot{x}_{2\nu} / \sqrt{\dot{x}_1^2 \dot{x}_2^2}; \tag{43}$$

F — довільна (гладка) функція трьох аргументів.

Останніми є параметрично-інваріантні скалярні комбінації 4-векторів $x_1(t) - x_2(t)$ та $\dot{x}_a(t)$, зображені у 3-вимірній формі за допомогою співвідношень (21).

У фронтальній формі в 1-вимірному випадку

$$\sigma = r, \quad \Gamma_a = (1 - 2v_a)^{-1/2}, \tag{44}$$

а ω є функцією інваріантів σ_1, σ_2,

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right), \tag{45}$$

отже, (41) відтворює результат (13) праці [7].

Питання конкретизації вигляду функції F для різного типу взаємодій із фізичною інтерпретацією буде розглянуто в п. 3.

2. Закони збереження. Згідно з теоремою Нетер [5], умовам інваріантності (32) відповідають закони збереження величин

$$G_\alpha = \sum_{a=1}^{2} (\zeta_{a\alpha}^i - v_a^i \omega_\alpha) \frac{\partial L}{\partial v_a^i} - \Omega_\alpha. \tag{46}$$

За допомогою (31) їх можна зобразити у вигляді

$$G_\alpha = \sum_{a=1}^{2} \zeta_{a\alpha}^i \frac{\partial L}{\partial v_a^i} - \omega_\alpha H, \tag{47}$$

де

$$H \equiv \sum_{a=1}^{2} v_a^i \frac{\partial L}{\partial u_a^i} - L. \tag{48}$$

Похідні від лагранжіана (41) за швидкостями розраховуються безпосередньо на основі виразів (37)—(39). Введемо пуанкаре-інваріантні функції

$$k_a \equiv \eta\left(\sigma_a^2 \frac{\partial F}{\partial \sigma_a} + (\omega\sigma_a - \sigma_b)\frac{\partial F}{\partial \omega}\right), \tag{49}$$

$$h_a \equiv \eta\left(\sigma_a^2 \frac{\partial F}{\partial \sigma_a} + (\omega\sigma_a + \sigma_b)\frac{\partial F}{\partial \omega}\right). \tag{50}$$

Вони не є незалежними:

$$\sigma_2(k_1 - h_1) = \sigma_1(k_2 - h_2). \tag{51}$$

У термінах цих функцій отримуємо

$$\frac{\partial L}{\partial v_a^i} = \frac{1}{2}(|\boldsymbol{r}|\varphi_i - \eta r_i) f + v_{ai}\Gamma_a\sigma_a\left(\sigma_a \frac{\partial L}{\partial \sigma_a} + \omega\frac{\partial L}{\partial \omega}\right) - v_{bi}\Gamma_b\sigma_a \frac{\partial F}{\partial \omega} -$$

$$- \frac{1}{2}\varphi_i(\Gamma_1 \dot{x}_1^0 k_1 + \Gamma_2 \dot{x}_2^0 k_2) + \frac{(-1)^a}{2}\eta n_i(\Gamma_1 \dot{x}_1^0 h_1 - \Gamma_2 \dot{x}_2^0 h_2), \tag{52}$$

де $\varphi_i \equiv \partial\varphi(t, y)/dy^i$;

$$f = F + \sum_{a=1}^{2} \sigma_a \frac{\partial L}{\partial \sigma_a}. \qquad (53)$$

Відповідно для функції (48) знаходимо

$$H = \varphi_t(-|\boldsymbol{r}|f + \Gamma_1 \dot{x}_1^0 k_1 + \Gamma_2 \dot{x}_2^0 k_2), \qquad (54)$$

де $\varphi_t \equiv \partial\varphi(t, y)/\partial t$.

Вирази для інтегралів руху (46) набирають вигляду

$$G_\alpha = -\zeta_\alpha^0 \varphi_t^{-1} H + \zeta_\alpha^i (t, y)(-\eta r_i f + \Gamma_1 v_{1i} k_1 + \Gamma_2 v_{2i} k_2) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\zeta_{1\alpha}^i - \zeta_{2\alpha}^i)(\Gamma_2(\eta n_i \dot{x}_2^0 - v_{2i}) h_2 - \Gamma_1(\eta n_i \dot{x}_1^0 - v_{1i}) h_1). \qquad (55)$$

Підставляючи сюди вирази для функцій ζ_α^ν, що відповідають групі Пуанкаре, та ототожнюючи, як звичайно, збережувані величини, що є наслідками інваріантності відносно часових і просторових трансляцій, 3-вимірних і лоренцових поворотів, відповідно з енергією E, імпульсом $\boldsymbol{P}$, моментом імпульсу $\boldsymbol{J}$ та інтегралом руху центра мас $\boldsymbol{K}$, одержуємо

$$E = \varphi_t^{-1} H = -|\boldsymbol{r}|f + \Gamma_1 \dot{x}_1^0 k_1 + \Gamma_2 \dot{x}_2^0 k_2, \qquad (56)$$

$$P_i = -\eta r_i f + \Gamma_1 v_{1i} k_1 + \Gamma_2 v_{2i} k_2, \qquad (57)$$

$$J_i = \varepsilon_{ij}^k y^j P_k + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^k r^j (\Gamma_1 v_{1k} h_1 - \Gamma_2 v_{2k} h_2), \qquad (58)$$

$$K_i = y_i E - \varphi(t, y) P_i - \frac{1}{2}(\Gamma_2 (r_i \dot{x}_2^0 - \eta|\boldsymbol{r}| v_{2i}) h_2 -$$

$$- \Gamma_1 (r_i \dot{x}_1^0 - \eta|\boldsymbol{r}| v_{1i}) h_1). \qquad (59)$$

Зазначимо, що вирази (56), (57) можна об'єднати в один 4-вектор енергії-імпульса P_μ, а (58), (59) — у антисиметричний 4-тензор моментів $J_{\mu\nu}$:

$$P_\mu = \eta r_\mu f - \frac{\dot{x}_{1\mu}}{\sqrt{\dot{x}_1^2}} k_1 - \frac{\dot{x}_{2\mu}}{\sqrt{\dot{x}_2^2}} k_2, \qquad (60)$$

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{2} y_\nu P_\mu - \frac{1}{2} y_\mu P_\nu - \frac{1}{2}\left(r_\nu\left(\frac{\dot{x}_{1\mu}}{\sqrt{\dot{x}_1^2}} h_1 - \frac{\dot{x}_{2\mu}}{\sqrt{\dot{x}_2^2}} h_2\right) -\right.$$

$$\left. - r_\mu\left(\frac{\dot{x}_{1\nu}}{\sqrt{\dot{x}_1^2}} h_1 - \frac{\dot{x}_{2\nu}}{\sqrt{\dot{x}_2^2}} h_2\right)\right). \qquad (61)$$

При цьому

$$E = -P_0, \quad J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_i^{jk} J_{jk}, \quad K_i = J_{0i}, \qquad (62)$$

і нульові компоненти 4-векторів x_a та $\dot{x}_a$ в (60), (61) слід виключати за формулами (21).

Структура інтегралів руху (60), (61) тотожна з результатами праць [11, 12], виконаних у рамках явно коваріантного 4-вимірного формалізму.

Десяти інтегралів руху (56) — (59) достатньо для зведення релятивістської задачі двох тіл до квадратур. Детальний розгляд цього питання виходить за межі даної праці, зазначимо лише тут статтю [13], де це зведення явно проведено для одного часткового випадку релятивістського узагальнення кулонівської взаємодії.

3. **Інтеграли дії типу Фоккера і одночасові лагранжіани для асиметричних взаємодій.** Джерелом конкретизації довільної функції F, що визначає загальну структуру релятивістського лагранжіану (4), може служити порівняння з явно коваріантним підходом, який базується на інтегралах дії типу Фоккера. Загальна структура останніх для двох частинок

має вигляд [14, 15]

$$I = -\sum_{a=1}^{2} m_a \int d\tau_a \sqrt{\dot{x}_a^2(\tau_a)} - g_1 g_2 \int\int d\tau_1 d\tau_2 \tilde{F} \sqrt{\dot{x}_1^2(\tau_1)} \sqrt{\dot{x}_2^2(\tau_2)}, \quad (63)$$

де m_a — маси спокою частинок; g_a — константи взаємодії; τ_a — довільні параметри світових ліній частинок; $\tilde{F}$ — пуанкаре-інваріантна (узагальнена) функція 4-координат і 4-швидкостей частинок, що описує їх взаємодію.

При [14, 15]

$$\tilde{F} = \left(\frac{\dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2}\sqrt{\dot{x}_2^2}}\right)^n G(x_1 - x_2) \quad (64)$$

опис, який грунтується на дії (63), допускає інтерпретацію в теоретико-польових термінах як взаємодія, що переноситься тензорним полем рангу n. При цьому $G(x)$ є функцією Гріна відповідного польового рівняння.

Якщо $G(x)$ — симетрична функція Гріна, то (64) дає узагальнення електродинаміки Уілера — Фейнмана [16], якій відповідає $n = 1$ і $G(x) = \delta(x^2)$. Тут розглядаємо випадок, коли

$$\tilde{F} = \Phi\left(\frac{\dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2}\sqrt{\dot{x}_2^2}}, \frac{\dot{x}_1 \cdot r}{\sqrt{\dot{x}_1^2}}, \frac{\dot{x}_2 \cdot r}{\sqrt{\dot{x}_2^2}}\right) G_\eta(x_1 - x_2), \quad (65)$$

де Φ — довільна (гладка) функція вказаних аргументів; $G_\eta(x)$ є запізнена (при $\eta = 1$) або випереджаюча (при $\eta = -1$) функція Гріна рівняння д'Аламбера

$$G_\eta(x) = 2\theta(\eta x^0)\,\delta(x^2). \quad (66)$$

З огляду на параметричну інваріантність дії (63) при $\tilde{F}$ вигляду (65) конкретний вибір параметрів еволюції τ_a є цілком довільний. Тоді покладемо $\tau_a = t$, де спільний для обох частинок параметр еволюції t означений співвідношеннями (18), (19), і приведемо (63) до вигляду

$$I = \int dt L. \quad (67)$$

Згідно з (38) для вільночастинкових доданків отримуємо

$$L_f = -\sum_{a=1}^{2} m_a \Gamma_a^{-1}. \quad (68)$$

Член, що описує взаємодію, внаслідок співвідношення

$$2\theta(\eta(x_1^0 - x_2^0))\,\delta((x_1(t_1) - x_2(t_2))^2) = \theta(\eta(x_1^0 - x_2^0))\,\delta(t_1 - t_2)/|\dot{x}_2 \cdot r| \quad (69)$$

дає у лагранжіан L внесок

$$-U \equiv L - L_f = g_1 g_2 \frac{\Gamma_1^{-1}\Gamma_2^{-1}}{\eta\sigma} \Phi(\sigma_1, \sigma_2, \omega) = g_1 g_2 \sigma \frac{\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \omega)}{\eta\sigma_1\sigma_2}. \quad (70)$$

Тут враховано, що на часоподібних світових лініях при умовах (16), (17) $\operatorname{sgn}\sigma = \eta$.

Вирази (68), (70) вкладаються у загальну структуру функції Лагранжа (41), побудовану як результат розв'язування умов пуанкаре-інваріантності в ізотропних формах динаміки. При цьому довільна функція має вигляд

$$F = -\sum_{a=1}^{2} \eta \frac{m_a}{\sigma_a} + F_{int}, \quad (71)$$

$$F_{int} = -g_1 g_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \Phi(\sigma_1, \sigma_2, \omega). \quad (72)$$

Зокрема, тензорним полям рангу n відповідають вирази

$$F_{int}^{(n)} = -g_1 g_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \omega^n \quad (73)$$

(див. (64)). Інший приклад, вартий відпотовування, складає модель утримуючої взаємодії [17], для якої у (65)

$$\Phi = \frac{(\dot{x}_1 \cdot r)(\dot{x}_2 \cdot r)}{\sqrt{\dot{x}_1^2}\sqrt{\dot{x}_2^2}}. \tag{74}$$

Цій взаємодії відповідає 3-вимірний одночасовий лагранжіан (41) із

$$F_{int} = -g_1 g_2. \tag{75}$$

Отримані результати встановлюють взаємозв'язок між 3-вимірним лагранжовим описом в ізотропних формах динаміки та інтегралами дії типу Фоккера. Використання в останніх асиметричних (запізнених або випереджаючих) функцій Гріна означає, що розглядаються взаємодії, які (при можливості теоретико-польової інтерпретації) відповідають ситуаціям, коли перша частинка взаємодіє з другою своїм, наприклад, випереджаючим полем, а друга з першою — запізненим.

Зазначимо, що при використанні в дії Фоккера симетричних функцій Гріна відповідні одночасові лагранжіани взаємодії в ізотропних формах динаміки міститимуть похідні всіх порядків, як і у звичайному випадку геометричної миттєвої форми [18].

4. Явно коваріантні лагранжіани. Результату (41) можна надати прозорий сенс, якщо розглядати варіаційний принцип

$$I = \int d\tau \eta \dot{x}_2 \cdot r F(\sigma_1, \sigma_2, \omega) \equiv \int d\tau L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \tag{76}$$

із довільним параметром τ, розглядаючи L як функцію 4-координат $x_a^\mu(\tau)$ та 4-швидкостей $\dot{x}_a^\mu(\tau) \equiv dx_a^\mu(\tau)/d\tau$, обмежених голономною в'яззю (16), (17). Дія (76) володіє явною пуанкаре- та параметричною інваріантністю. Врахування в'язі (16) можна здійснити стандартним для аналітичної механіки способом через множник Лагранжа λ:

$$I_\lambda = \int d\tau (L + \lambda r^2), \tag{77}$$

де слід брати до уваги ще й неутримуючу в'язь $\eta r^0 > 0$.

Явна пуанкаре-інваріантність дозволяє отримати з (77) безпосередньо закони збереження повного 4-імпульсу P_μ і 4-тензора моменту імпульсу $J_{\mu\nu}$:

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1^\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2^\mu}, \tag{78}$$

$$J_{\mu\nu} = x_{1\mu}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1^\nu} + x_{2\mu}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2^\nu} - x_{1\nu}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1^\mu} - x_{2\nu}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2^\mu}. \tag{79}$$

Будучи розписані у термінах функції F, вони співпадають з виразами (60), (61).

Надалі замість частинкових змінних x_a^μ конфігураційного простору M_4^2 будемо здебільшого використовувати змінні y^μ, r^μ, а функцію Лагранжа $L: J^1(M_4^2) = TM_4^2 \to \mathbf{R}$ зобразимо у вигляді

$$L = TF(A, B, C), \tag{80}$$

де 4-скалярні аргументи

$$T \equiv \eta\dot{y} \cdot r = \eta\dot{x}_1 \cdot r = \eta\dot{x}_2 \cdot r, \tag{81}$$

$$A \equiv \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{y} \cdot \dot{r} + \frac{1}{4}\dot{r}^2}/T = \sqrt{\dot{x}_1^2}/T, \tag{82}$$

$$B \equiv \sqrt{\dot{y}^2 - \dot{y} \cdot \dot{r} + \frac{1}{4}\dot{r}^2}/T = \sqrt{\dot{x}_2^2}/T, \tag{83}$$

$$C \equiv \left(\dot{y}^2 - \frac{1}{4}\dot{r}^2\right)/T^2 = \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2/T^2 \tag{84}$$

є додатними на часоподібних світових лініях частинок, а функція F є такого ж типу, що і в (41) або (76). Зокрема, вирази (71) — (73) у нових термінах набувають вигляду

$$F \equiv -m_1 A - m_2 B - F_{int}, \tag{85}$$

$$F_{int} = -g_1 g_2 AB\Phi(A, B, C), \tag{86}$$

$$F_{int}^{(n)} = -g_1 g_2 (AB)^{1-n} C^n. \tag{87}$$

Варіаційний принцип (77) з функцією Лагранжа (80) є зручним вихідним пунктом для переходу до гамільтонового опису.

5. **Чотиривимірний канонічний формалізм з в'язями.** Введемо канонічні імпульси

$$P_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^\mu} = \left(\frac{F'_A}{A} + \frac{F'_B}{B} + 2F'_C\right)\frac{\dot{y}_\mu}{T} + \frac{1}{2}\left(\frac{F'_A}{A} - \frac{F'_B}{B}\right)\frac{\dot{r}_\mu}{T} + $$
$$+ (F - F'_A A - F'_B B - 2F'_C C)\,\eta r_\mu, \tag{88}$$

$$w_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{F'_A}{A} - \frac{F'_B}{B}\right)\frac{\dot{y}_\mu}{T} + \frac{1}{4}\left(\frac{F'_A}{A} + \frac{F'_B}{B} - 2F'_C\right)\frac{\dot{r}_\mu}{T}, \tag{89}$$

де $F'_A \equiv dF/dA$ і т. ін.

Разом із змінними y^μ і r^μ вони параметризують 16-вимірний фазовий простір $T^*M_4^2$, оснащений стандартними дужками Пуассона $\{\ldots, \ldots\}$.

Легко перевірити, що праві частини рівностей (78) і (88) співпадають. Це означає, що змінні P_μ є компонентами 4-імпульсу системи. Разом з компонентами 4-тензора моменту імпульсу $J_{\mu\nu}$ (79), які в термінах канонічних змінних набувають вигляду

$$J_{\mu\nu} = y_\mu P_\nu - y_\nu P_\mu + \Omega_{\mu\nu} \equiv y_\mu P_\nu - y_\nu P_\mu + r_\mu w_\nu - r_\nu w_\mu, \tag{90}$$

вони генерують канонічну реалізацію групи $\mathcal{P}$ (1.3) в $T^*M_4^2$.

Параметрична інваріантність дії (76) або (77) приводить до того, що канонічний гамільтоніан

$$H \equiv \dot{y}^\mu P_\mu + \dot{r}^\mu w_\mu - L = 0, \tag{91}$$

а динаміка системи задається гамільтоновою в'яззю — так званою в'яззю масової оболонки, яка з'являється поряд з кінематичною в'яззю (16). Щоб отримати її в явному вигляді, необхідно ліву частину (91) виразити в термінах канонічних змінних, використовуючи для цього співвідношення (88), (89) і умову (16).

Згорнувши ліву та праву частини (88), (89) з r^μ, отримаємо рівності

$$\frac{F'_A}{A} + F'_C = a \equiv \eta\left(\frac{1}{2} P \cdot r + w \cdot r\right), \tag{92}$$

$$\frac{F'_B}{B} + F'_C = b \equiv \eta\left(\frac{1}{2} P \cdot r - w \cdot r\right). \tag{93}$$

Піднісши ліву та праву частини (88) до квадрату, отримаємо ще одну рівність

$$a^2A^2 + b^2B^2 + 2abC + 2(a+b)(F - F'_A A - F'_B B - 2F'_C C) = P^2. \tag{94}$$

Рівняння (92) — (94) дозволяють у принципі виразити A, B, C у термінах канонічних змінних, а саме функцій P^2, a, b, або, що еквівалентно: P^2, $P \cdot r$, $w \cdot r$.

Розглядаючи тепер співвідношення (88), (89) як лінійну неоднорідну систему рівнянь відносно невідомих $\dot{y}_\mu/T$, $\dot{r}_\mu/T$, знайдемо її розв'язок. Очевидно, що він існує та єдиний тоді і тільки тоді, коли визначник системи (88), (89) відмінний від нуля:

$$\Delta \equiv ab - (a+b)F'_C \neq 0. \tag{95}$$

Підставляючи отриманий розв'язок в (91), після громіздких елементарних обчислень можна одержати шукану в'язь масової оболонки у вигляді

$$((P\cdot\Omega)^2+(w\cdot r)^2P^2)/(P\cdot r)^2+$$
$$+\frac{\Delta}{\eta P\cdot r}\left(\frac{P^2}{\eta P\cdot r}-2F+F'_AA+F'_BB+2F'_CC\right)=0. \qquad (96)$$

Можливість отримати явний вираз для в'язі масової оболонки (96) залежить від успіху розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (92) — (94). Легко, однак, побачити загальну структуру цієї в'язі:

$$\mu(P^2,\ (P\cdot\Omega)^2,\ P\cdot r,\ w\cdot r)=0, \qquad (97)$$

де μ — довільна у силу довільності F функція вказаних аргументів.

Розгляньмо класифікацію і роль гамільтонових в'язей (16) і (97). Вони з'явилися внаслідок переходу від лагранжового опису і з погляду канонічного формалізму з в'язями є первинними в'язями. Обчислюючи їх дужки Пуассона:

$$[\mu,r^2]=2\frac{\partial\mu}{\partial(w\cdot r)}r^2\approx 0, \qquad (98)$$

де «$\approx$» означає символ слабкої (згідно з Діраком [19]) рівності, можна переконатися, що (16) і (97) є в'язями першого роду і, отже, не породжують вторинних в'язей. Це означає, що функції у лівих частинах (16) і (97) генерують калібрувальні (тобто залежні від двох довільних функцій параметра τ) перетворення, а ефективне число ступенів вільності дорівнює 12. Щоб виділити їх явно, необхідно додатково накласти дві калібрувальні в'язі

$$\chi(y,\ r,\ P,\ w,\ t)=0, \qquad [\chi,\ \mu]\neq 0, \quad \partial\chi/\partial t\neq 0, \qquad (99)$$
$$\psi(y,\ r,\ P,\ w)=0, \qquad [\psi,\ r^2]\neq 0, \qquad (100)$$

які разом з (16), (97) дозволяють редукувати чотири зайві змінні.

У літературі існує опис релятивістської системи прямо взаємодіючих частинок у рамках канонічного формалізму з в'язями лише першого роду — це формалізм Дро — Венсана — Тодорова — Комара [20—22]. Як відомо, такий опис неоднозначно задає динаміку системи: вибір калібрувальних в'язей впливає на результуючі світові лінії частинок в M_4 (так звана семантична проблема; див. [21]). Покажемо, що отриманий в нашій праці формалізм вільний від цього недоліку.

Чисто кінематична в'язь (16) задовольняє очевидні рівності

$$[x_a^\mu,\ r^2]=0. \qquad (101)$$

Це означає, що вона генерує калібрувальне перетворення, яке є неспостережуване на світових лініях частинок: орбіти цього перетворення в $T^*M_4^2$ є трансверсальними до конфігураційного простору M_4^2. Отже, фіксування калібрувальної в'язі (100) не впливає на динаміку системи і може бути здійснено довільно.

У силу тотожності $H=0$ канонічний опис системи є інваріантним відносно фізично неспостережуваного перетворення репараметризації, генератором якого є в'язь масової оболонки (97). Це означає, що калібрувальна в'язь (99) також не впливає на динаміку системи і лише фіксує параметр еволюції $\tau=t$. Вона відіграє ту саму роль, що і співвідношення (19), запропоноване в п. 1 у рамках 3-вимірного лагранжевого опису, однак має більш загальну форму. Це природно допускається канонічним формалізмом з в'язями. Можливість широкого вибору калібрувальних в'язей є корисною при аналізі 3-вимірного гамільтонового опису системи, який розглядаємо нижче.

6. Перехід від явно коваріантного до 3-вимірного гамільтонового опису. Перехід від явно коваріантних описів канонічних систем з в'язями до їх 3-вимірних формулювань добре відомий в літературі [23—25]. У нашому випадку він полягає в редукції вихідного 16-вимірного фазового простору $T^*M_4^2$ до 12-вимірного фазового простору F і здійснюється у кілька кроків.

У першу чергу необхідно зафіксувати калібрувальні в'язі (99), (100). Разом з первинними в'язями (16), (97) вони визначають в $T^*\boldsymbol{M}_4^2$ сім'ю $\Xi = \{\Xi_t | t \in \boldsymbol{R}\}$ дифеоморфних один одному многовидів Ξ_t, $\dim \Xi = 12$, кожен з яких (наприклад, Ξ_0) можна розглядати як редукований фазовий простір $\boldsymbol{F}$.

Наступний крок полягає у побудові за допомогою повної системи в'язей (16), (97), (99), (100) (як в'язей другого роду) дужок Дірака $[\ldots, \ldots]^*$. Їх обмеження на кожен многовид Ξ_t задає на ньому симплектичну структуру (тобто невироджені дужки Пуассона)

$$\{\ldots, \ldots\} = -[\ldots, \ldots]^*|_{\Xi_t} \qquad (102)$$

(знак «—» у правій частині (30) зумовлений прийнятим тут вибором метрики Мінковського). Це дає змогу будувати всі динамічні величини системи шляхом обмеження відповідних функцій на Ξ_t.

І нарешті, для отримання стандартного гамільтонового опису необхідно параметризувати фазовий простір $\boldsymbol{F}$ такими змінними, у термінах яких дужки Пуассона (102) мають канонічний вигляд.

Для реалізації вказаної схеми переходу до опису на редукованому просторі $\boldsymbol{F}$ зручно скористатися методом Шанмугадхасана [23]. Він полягає у здійсненні у вихідному фазовому просторі (у даному випадку $T^*\boldsymbol{M}_4^2$) канонічного перетворення, яке зводить систему в'язей до канонічного вигляду (коли принаймні половина в'язей мають вигляд рівності нулю тих нових канонічних змінних, які мають бути виключені).

Вище було зазначено, що калібрувальні в'язі не впливають на динаміку системи у просторі Мінковського $\boldsymbol{M}_4$. Однак з поданої тут схеми видно, що їх вибір визначає характерні риси результуючого опису системи, а саме — редукований фазовий простір $\boldsymbol{F}$, індуковані на ньому дужки Пуассона $\{\ldots, \ldots\}$, а також можливий вибір змінних, у термінах яких ці дужки набувають канонічного вигляду. Очевидно, що вигляд генераторів G_α канонічної реалізації $\mathcal{AP}$ (1.3) на $\boldsymbol{F}$ також значною мірою визначається калібрувальними в'язями. Зокрема, суттєва залежність в'язі (99) від параметра еволюції t приводить до появи гамільтоніану H, що генерує еволюцію системи в $\boldsymbol{F}$.

До ілюстрації сказаного розгляньмо, при якому виборі калібрувальних в'язей у рамках даної схеми можна отримати 3-вимірний гамільтонів опис системи у термінах коваріантних частинкових змінних x_a^i. Згідно з теоремою Дарбу, достатньою умовою існування такого опису є комутативність (в розумінні дужок Пуассона простору $\boldsymbol{F}$) змінних x_a^i, яку з урахуванням співвідношення (102) можна зобразити у вигляді

$$[x_a^1, x_0^1)^*|_{\Xi_t} = 0, \quad i, J = 1, 2, 3; \quad a, b = 1, 2; \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (103)$$

або

$$[\psi, r^2]([x_a^i, \mu][\chi, x_0^j] - [x_a^i, \chi][\mu, x_0^j])|_{\Xi_t} +$$
$$+ [r^2, \chi]([x_a^i, \mu][\psi, x_b^j] - [x_a^i, \psi][\mu, x_b^j])|_{\Xi_t} = 0. \qquad (104)$$

Умову (104) слід розглядати як рівняння на калібрувальні в'язі χ, ψ. Не досліджуючи її в загальному випадку, зазначимо, що вона виконується при довільній $\psi(y, r, P, w)$, коли

$$\chi = \chi(y, r, P_0, \psi(y, r, F, w), t) \qquad (105)$$

є довільною функцією вказаних аргументів. Наприклад, вибір в'язі

$$\chi \equiv y_0 - \varphi(t, y) = 0 \qquad (106)$$

є еквівалентним умові (20) або (19) і приводить у рамках даної схеми до 3-вимірного гамільтонового опису, який також можна отримати перетворенням Лежандра від 3-вимірного лагранжового опису з лагранжіаном (41).

7. Тривимірний гамільтонів формалізм у змінних типу центра мас. Основною перешкодою при переході від канонічного формалізму з в'язями до 3-вимірного гамільтонового опису в коваріантних змінних є складна структура в'язі масової оболонки (97) (або (96)), що не дозволяє в замкненому вигляді виразити надлишкову змінну P_0. Щоб обійти цю трудність, здійснимо в $T^*M_4^2$ канонічне перетворення

$$(y^\mu,\ P_\mu,\ r^\mu,\ w_\mu) \mapsto (Q^\mu,\ P_\mu,\ \rho^\mu,\ \omega_\mu) \tag{107}$$

до нових змінних, в термінах яких в'язь масової оболонки (97) набуває простішого вигляду. Це перетворення зручно задати твірною функцією

$$W(y^\mu,\ P_\mu,\ r^\mu,\ \omega_\mu) = P_\mu y^\mu + \omega_\nu \Lambda (P/|P|)^\nu_\mu r^\mu, \tag{108}$$

де $|P| \equiv \sqrt{P^2}$, а $\|\Lambda P/|P|)^\nu_\mu\| \in SO\ (1.3)$ має властивість

$$\Lambda^\mu_\nu P^\nu = \delta^\mu_0 |P|. \tag{109}$$

Матриця Λ описує перетворення Лоренца в систему відліку центра інерції. Умова (109) фіксує Λ неоднозначно, залишаючи свободу довільного (залежного від P) повороту. Не зупиняючись на деталях, зазначимо, що ця свобода дає змогу отримати різні гамільтонові форми динаміки (див., наприклад, [25]). Виберемо Λ у вигляді чистого бусту

$$\|\Lambda^\mu_\nu\| = \left\| \begin{array}{c:c} \dfrac{P_0}{|P|} & \dfrac{P_j}{|P|} \\ \hdashline \dfrac{P_i}{|P|} & \delta_{ij} + \dfrac{P_i P_j}{|P|(|P| + P_0)} \end{array} \right\|, \tag{110}$$

що дає змогу перейти до опису у рамках моделі Бакамджіана — Томаса [26], тобто до 3-вимірного гамільтонового опису в миттєвій формі динаміки з використанням змінних типу центра мас.

Відповідне до твірної функції (108) перетворення має вигляд

$$y^\mu = Q^\mu - \frac{1}{2} S_{\lambda\nu} \Lambda^\lambda_\tau \tau \Lambda^{\nu\tau}/\partial P_\mu, \tag{111}$$

$$r^\mu = \rho^\nu \Lambda^\tau_\nu, \quad w_\mu = \omega_\nu \Lambda^\nu_\mu, \tag{112}$$

$$S_{\mu\nu} \equiv \Lambda^\tau_\mu \Lambda^\sigma_\nu \Omega_{\tau\sigma} = \rho_\mu \omega_\nu - \rho_\nu \omega_\mu. \tag{113}$$

В'язі (16), (17) (або (18)) і (97) в термінах нових змінних можна зобразити у вигляді

$$\rho^2 = 0,\ \eta\rho^0 > 0 \text{ або } \rho^0 - \eta|\boldsymbol{\rho}| = 0, \tag{114}$$

$$P^2 = M^2(S_{0\sigma}S^{0\sigma},\ \rho^0,\ \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega}) = 0, \tag{115}$$

де функція M є розв'язком рівняння

$$\varphi(M^2,\ M^2 S_{0\sigma}S^{0\sigma},\ M\rho^0,\ \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega}) = 0 \tag{116}$$

і має зміст повної маси системи. У силу довільності μ масу M також можна вважати довільною функцією вказаних скалярних комбінацій внутрішніх канонічних змінних ρ^μ, ω_ν, що значно спрощує загальний аналіз опису.

Скористаємося тепер поданою в п. 7 схемою для переходу до 3-вимірного гамільтонового опису. Зафіксуємо калібрувальну в'язь (99) у вигляді

$$Q^0 - t \equiv y^0 + \mathrm{tr}\,(\Lambda\Omega\partial\Lambda^T/\partial P_0) = 0, \tag{117}$$

вважаючи в'язь (100) довільною.

Згідно з методом Шанмугадхасана здійснимо канонічне перетворення

$$(Q^0,\ Q^i,\ P_0,\ P_i,\ \rho^0,\ \rho^i,\ \omega_0,\ \omega_i) \mapsto (\bar{Q}^0,\ Q^i,\ P_0,\ P_i,\ \bar{\rho}^0,\ \rho^i,\ \omega_0,\ \pi_i), \tag{118}$$

що задається твірною функцією

$$W = P_0(Q^0 - t) + P_i Q^i + \omega_0(\rho^0 - \eta|\boldsymbol{\rho}|) + \pi_i \rho^i. \tag{119}$$

Воно має явний вигляд

$$\bar{Q}^0 = Q^0 - t, \ \bar{\rho}^0 = \rho^0 - \eta\,|\boldsymbol{\rho}|, \ \pi_i = \omega_i - \frac{\rho_i}{\eta\,|\boldsymbol{\rho}|}\,\omega_0 \qquad (120)$$

(решта змінних не перетворюються) і приводить систему в'язей до канонічного вигляду (дві з чотирьох в'язі (114) і (117) мають вигляд $\bar{\rho}^0 = 0$, $\bar{Q}^0 = 0$). Крім цього, внаслідок явної залежності перетворення (118) — (120) від t з'являється канонічний гамільтоніан $H = P_0$. Подальша редукція опису до 12-вимірного фазового простору $\boldsymbol{F}$, параметризованого канонічними змінними Q^i, P_i, ρ^i, π, $i = 1, 2, 3$, здійснюється згідно зі схемою тривіально і приводить до моделі Бакамджіана — Томаса [26] з добре відомими генераторами канонічної реалізації $\mathscr{AP}$ (1.3):

$$H = P_0 = \sqrt{M^2 + \boldsymbol{P}^2}, \quad P_i,$$
$$J_i = \varepsilon_{ij}^{k} Q^j P_k + S_i, \qquad (121)$$
$$K_i = - tP_i + Q_i H + \frac{(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{S})_i}{M + H},$$

де $\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\pi}$ — повний спін системи; $M(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\pi})$ — повна маса системи, що визначає її динаміку у редукованому просторі $\boldsymbol{F}$.

У нашому випадку M є розв'язком рівняння

$$\mu\,(M^2, \ -M^2\rho^2\pi^2, \ M\eta\rho, \ -\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\pi}) = 0, \qquad (122)$$

де $\rho \equiv |\boldsymbol{\rho}|$; $\pi \equiv |\boldsymbol{\pi}|$.

Крім канонічної реалізації $\mathscr{AP}$ (1.3) подана в п. 7 схема дозволяє отримати коваріантні координати частинок x_a^{μ} як функції канонічних змінних, що необхідно для просторово-часової інтерпретації моделі Бакамджіана — Томаса у просторі Мінковського $\boldsymbol{M}_4$ [27]. Вони мають вигляд

$$x_a^{\mu} = X^{\mu} + (\Lambda^T (P/|P|))^{\mu}_{\nu}\, e_a^{\nu}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\pi}), \qquad (123)$$

де

$$X^0 = t; \qquad (124)$$

$$X^i = Q^i - \frac{(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{S})_i}{M\,(M + H)} \qquad (125)$$

є відомі змінні центра інерції Прайса [28],

$$e_a^0 = \frac{(-1)^b}{2}\,\eta\rho; \quad e_a^i = \frac{(-1)^b}{2}\,\rho^i + \eta\,\frac{\rho}{M}\,\pi^i; \qquad b \neq a. \qquad (126)$$

Зауважимо, що просторові коваріантні координати частинок x_a^i не комутують (в сенсі дужок Пуассона) між собою:

$$\{x_a^i, \ x_b^j\} \neq 0. \qquad (127)$$

Це означає, що отриманий тут опис двочастинкової системи на конусі у рамках моделі Бакамджіана — Томаса канонічно нееквівалентний її гамільтоновому описові в коваріантних змінних. Причина такої нееквівалентності полягає у виборі калібрувальної в'язі (117), ліва частина якої не належить до класу функцій (105).

8. **Висновки.** Підходам до релятивістської теорії прямих взаємодій, сформульованим у рамках геометричних форм динаміки, притаманні труднощі, пов'язані з неінваріантністю означення одночасності відносно перетворень Пуанкаре і які так чи інакше проявляються в усіх формалізмах. Так, в гамільтоновому 3-вимірному формалізмі виникає проблема просторово-часової інтерпретації канонічних змінних, спричинена відомою теоремою Каррі — Йордана — Сударшана про відсутність взаємодії [29]. Лагранжовий аналог цієї теореми приводить до суттєвої залежності лагранжіанів взаємодії від похідних усіх порядків [6]. Взаємозв'язок між лагранжовим і гамільтоновим формалізмами є нетривіальним і вимагає побудови складного неточкового перетворення, що практично може бути здійснене лише методом послідовних наближень [30].

Запропонована у цій праці двочастинкова динаміка на світловому конусі дає нам приклад, який обходить теорему про невзаємодію. Це досягається пуанкаре-інваріантним означенням одночасності, що звільняє такий опис від зазначених вище проблем і робить його досить простим.

По-перше, умови пуанкаре-інваріантності лагранжового опису на світловому конусі не тільки допускають існування лагранжіанів, залежних лише від координат і швидкостей, але й дозволяють знайти їх загальну форму у замкненому вигляді.

По-друге, перетворенням Лежандра можна перейти до 3-вимірного гамільтонового опису в коваріантних змінних, існування якого має принципове значення в рамках квантово-механічного розгляду.

По-третє, чисто технічні труднощі, які виникають при безпосередній гамільтонізації 3-вимірного лагранжового опису, можна обійти, використовуючи явно коваріантний канонічний формалізм з в'язями. Останній дає свободу для переходу до 3-вимірних гамільтонових описів і дозволяє, зокрема, перейти до простого опису у рамках моделі Бакамджіана — Томаса, що допускає повне розділення змінних стандартними методами гамільтонової механіки.

Важливим також є те, що динаміка на світловому конусі тісно пов'язана з класом асиметричних інтегралів дії типу Фоккера, які допускають теоретико-польову інтерпретацію. Це дозволяє одержувати змістовні моделі різних фізичних систем і проводити достатньо вичерпний їх аналіз аж до побудови світових ліній частинок.

Запропонована робота частково підтримана Фондом фундаментальних досліджень Державного комітету з питань науки і техніки України.

1. *Гайда Р. П.* Квазирелятивистские системы взаимодействующих частиц // Физика элем. частиц и атом. ядра.— 1982.— **13**, № 2.— С. 427—493.
2. *Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б., Третяк В. И.* Формы релятивистской динамики в классическом лагранжевом описании системы частиц // ТМФ.— 1983.— **55**, № 1.— С. 88—105.
3. *Dirac P. A.* M. Forms of relativistic dynamics // Rev. Mod. Phys.— 1949.— **21**, N 3.— P. 392—399.
4. *Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б., Третяк В. И.* Лагранжева классическая релятивистская механика системы прямо взаимодействующих частиц. I // ТМФ. - 1980. - **44**, № 2.— С. 194—208.
5. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике.— М. : Наука, 1983.— 280 с.
6. *Ключковский Ю. Б., Третяк В. И.* Касательные преобразования Ли — Беклунда и структура квазиинвариантных лагранжианов // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов.— Киев : Наук. думка, 1989.— С. 91—97.
7. *Соколов С. Н., Третяк В. И.* Фронтовая форма релятивистской лагранжевой динамики в двухмерном пространстве-времени и ее связь с гамильтоновым описанием // ТМФ.— 1986.— **67**, № 1.— С. 102—114.
8. *Майоров А. А., Соколов С. Н., Третяк В. И.* Особенности движения частиц и распространения возмущений во фронтовой форме двумерной релятивистской динамики.—Серпухов, 1988.— 60 с.— (Препр./ Ин.-т физики высок. энергий; 86-243).
9. *Третяк В. И., Шпытко В. Е.* Некоторые квантово-механические модели во фронтовой форме релятивитской динамики в двумерном пространстве-времени.— Львов, 1988.— 26 с. (Препр./ АН УССР. Ин-т прикл. пробл. механики и математики; № 13—88).
10. *Dam H. van, Wigner E. P.* Classical relativistic mechanics of interacting point particles // Phys. Rev. - 1965.— **136B**, N 6.— P. 1576—1582.
11. *Kunzle H. P.* Advanced-retarded polarization for relativistic Hamiltonian n-particle systems // Nuovo Cim.— 1978. — **43B**, N 1.— P. 87—109.
12. *Künzle H. P.* Classical Poincare and Galilei invariant Hamiltonian two-particle interactions with sommuting position variables // Nuovo Cim. B.— 1988.— **101**, N 6.— P. 721—749.
13. *Künzle H. P.* A relativistic analogue of the Kepler problem // Int. J. Theor. Phys.— **11**, N 6.— P. 395—417.
14. *Havas P.* Galilei- and Lorentz invariant particle systems and their conservation laws // Problems in the Foundations of Physics. - Berlin : Springer, 1971. - P. 31—48.
15. *Ramond P.* Action-at-a-distance theories and dual models // Phys. Rev. D. 1973.— **7**, N 2.— P. 449—458.
16. *Wheeler E. A., Feynman R. P.* Interaction with the absober as the mechanism of radiation // Rev. Mod. Phys.— 1945.— **17**, N 2—3. - P. 157—181.
17. *Wheeler J. A., Feynman R. P.* Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action // Ibid.— 1949.— **21**, N 3.— P. 425—433.

18. *Gaida R. P., Tretyak V. I.* Single-time form of the Fokker-type relativistic dynamics. I // Acta phys. pol. B.— 1980.— **11**, N 7.— P. 509—522.
19. *Dirac P. A. M.* Generalized Hamiltonian dynamics // Can. J. Math.— 1950.— **2**.— P. 129—148.
20. *Droz-Vincent Ph.* Two-body relativistic systems // Ann. Inst. H. Poincaré.— 1977.— **A27**, N 4.— P. 407—424.
21. *Komar A.* Space-time orbits for interacting relativistic particles: syntactic versus semantic observables // Phys. Rev. D.— 1978.— **18**, N 10.— P. 3617—3623.
22. *Todorov I. T.* Constraint Hamiltonian mechanics of directly interacting relativistic particles // Lect. Notes Phys.— 1982.— **162**.— P. 213—263.
23. *Shanmugadhasan S.* Canonical formalism for degenerate Lagrangians // J. Math. Phys.— 1973.— **14**, N 6.— P. 677—687.
24. *Клепиков Н. П., Шатний Ф. Н.* Ковариантная механика и формы релятивистской динамики // Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрономия.— 1983.— **24**, № 3.— С. 32—37.
25. *Gomis J., Novel M., Pons J. M.* Instant and front form realizations for N relativistic particles // Ann. Phys.— 1984.— **153**, N 2.— P. 389—404.
26. *Bakamjian B., Thomas L. H.* Relativistic particle dynamics. II // Phys. Rev.— 1953.— **92**, N 5.— P. 1300—1310.
27. *Дувіряк А. А., Ключковський Ю. Б.* Коваріантні двочастинкові світові лінії в релятивістській гамільтоновій механіці // Мат. методи і фіз.-мех. поля.— 1991.— Вип. 34.— С. 93—97.
28. *Pryce M. H. L.* The mass-centre in the restricted theory of relativity and its connection with the quantum theory of elementary particles // Proc. Roy. Soc. London.— 1948.— **A195**, N 1040.— P. 62—81.
29. *Currie D. G., Jordan T. F., Sudarshan E. C. G.* Relativistic invariance and Hamiltonian theories of interacting particles // Rev. Mod. Phys.— 1963.— **35**, N 2.— P. 350—375.
30. *Гайда Р. П., Третяк В. И.* Лагранжианы прямых взаимодействий и гамильтоново описание системы частиц в различных формах релятивистской динамики.—Киев, 1982.— 40 с.— (Препр./ АН УССР. Ин-т теорет. физики; № 82-87Р).

Інститут фізики конденсованих систем
АН України, Львів

Одержано 9.07.92

УДК 539.143.34

М. В. ТКАЧ, С. А. ОРЛОВСЬКИЙ

СПЕКТР ЕКСИТОНУ, ЛОКАЛІЗОВАНОГО БІЛЯ ПОВЕРХНІ РОЗДІЛУ СЕРЕДОВИЩ У ГЕТЕРОСИСТЕМІ

Самоузгодженим способом знайдено спектр поверхневого екситону, локалізованого на межі двох середовищ. Отримана залежність енергії зв'язку такого екситону для довільних співвідношень — компонент ефективних мас електрона і дірки та для довільних співвідношень між величинами діелектричних проникностей контактуючих кристалів. Показано, що за умовою $m_{\perp e}, m_{\perp h} \leqslant 3m_{\parallel}$, незалежно від величини діелектричної проникності зовнішнього середовища ($\varepsilon_з$) по відношенню до внутрішнього ($\varepsilon_в$), існує лише фаза об'ємних тривимірних екситонів. При $3m_{\parallel} < m_{\perp e}, m_{\perp h} \leqslant 25m_{\parallel}$ в області $\infty > \varepsilon_з > \varepsilon_к$ існує фаза плоского екситону, а в області $\varepsilon_к > \varepsilon_з > \varepsilon_в$ — фаза об'ємного екситону. При $m_{\perp e}, m_{\perp h} > 25m_{\parallel}$ в області $\infty > \varepsilon_з > \varepsilon_{к_1}$ існує фаза незв'язаних між собою, але зв'язаних зі своїми зображеннями електрона і дірки; в області $\varepsilon_{к_1} > \varepsilon_з > \varepsilon_{к_2}$ існує фаза плоского екситону і в області $\varepsilon_{к_2} > \varepsilon_з > \varepsilon_в$ — фаза об'ємного екситону.

Спектр квазічасток в неоднорідних і гетероструктурах останнім часом є об'єктом інтенсивного дослідження як теоретичного, так і експериментального. Інтерес до такого типу задач зумовлений відкриттям нових ефектів та механізмів їх утворень, нехарактерних для гомогенних середовищ.

Задача про спектр екситону, локалізованого на межі розділу двох середовищ, належить до згаданого класу. Її вже частково розв'язано у працях [1, 2], де в адіабатичному наближенні варіаційним методом оцінено енергію основного стану, знайдено залежність цієї енергії від співвідношення діелектричних проникностей при різних значеннях ефективних мас електрона і дірки. Суттєвим обмеженням теорії [1, 2] є також те, що «плоскі» компоненти ефективних мас електрона і дірки вважаються рівними, тимчасом як у загальному вигляді вони можуть значно відрізнятися. Нарешті, теорія не містить жодної інформації про вищі енергетичні стани локалізованого екситону.