

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ФІЗИКИ КОНДЕНСОВАНИХ СИСТЕМ

ШПОТ Микола Адріанович



УДК 538.9, 538.915, 544.225.23, 535.33, 535.36

**КРИТИЧНА ПОВЕДІНКА ПРОСТОРОВО НЕОДНОРІДНИХ
СИСТЕМ**

01.04.02 — теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів — 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем Національної академії наук України.

Науковий консультант: академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор **Юхновський Ігор Рафаїлович**, Президія НАН України (м. Київ), радник.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор **Ребенко Олексій Лукич**, Інститут математики НАН України (м. Київ), головний науковий співробітник відділу математичної фізики;

доктор фізико-математичних наук, професор **Доценко Віктор Степанович**, Університет Сорбонна (м. Париж, Франція), професор лабораторії теоретичної фізики конденсованої речовини;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник **Анчишкін Дмитро Владленович**, Інститут теоретичної фізики імені М.М. Боголюбова НАН України (м. Київ), провідний науковий співробітник відділу теорії ядра і квантової теорії поля.

Захист відбудеться «15» вересня 2021 р. о 15 год. 30 хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.156.01 при Інституті фізики конденсованих систем Національної академії наук України за адресою:
79011, м. Львів, вул. Свенціцького, 1.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Інституту фізики конденсованих систем Національної академії наук України за адресою:
79026, м. Львів, вул. Козельницька, 4.

Автореферат розісланий “12” серпня 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 35.156.01,
доктор фіз.-мат. наук



А.М. Швайка

Актуальність теми. У нашому світі ідеальні та безмежні фізичні об'єкти не існують. Усі вони обмежені поверхнями і мають скінченні розміри. Крім цього, реальні об'єкти характеризуються різного роду структурними неоднорідностями та неоднаковими фізичними властивостями у різних просторових напрямках. В таких реальних умовах відбуваються і специфічні фізичні явища, яких немає в ідеальних модельних системах. Саме з такими об'єктами працюють експериментатори, а комп'ютерні симуляції виконуються виключно для скінченних систем.

Усе це необхідно брати до уваги і фізикам-теоретикам. Анізотропія, скінченність розмірів та наявність поверхонь, присутність випадкових домішок і дефектів — це загальні властивості, які можуть визначати і змінювати певні класи універсальності. Оскільки ці риси притаманні всім фізичним об'єктам — дослідження неідеальних, просторово неоднорідних систем було і залишається важливою галуззю теоретичної фізики. До цієї галузі належить і пропонується робота, в якій представлено математичний опис критичних явищ у невпорядкованих, обмежених, і анізотропних системах. В загальному — просторово неоднорідних.

Очевидно, що розвиток теорій, які описують критичну поведінку таких систем, представляє безсумнівний інтерес для теоретичної фізики взагалі. Тут коло нерозв'язаних задач і проблем є значно ширшим, ніж у випадку ідеалізованих моделей. Теоретичний опис систем, максимально наближених до реальних, є важливим для експериментаторів і спеціалістів з комп'ютерного моделювання. Необхідні математичні підходи є набагато складнішими, і їх розвиток представляє також інтерес для математики.

Нарешті, в наш час неможливо оминати увагою “революцію” конформного бутстрапу — нове явище в теоретичній фізиці, яке ми спостерігаємо протягом останнього десятиріччя. Все почалося з роботи¹, де нові ідеї та сучасні чисельні методи були застосовані до старих самоузгоджених рівнянь, відомих ще з початку 70-х років минулого сторіччя. У цьому підході обмеження, що диктуються “бутстрапними” рівняннями, генеруються на основі базових умов самоузгодженості та конформної симетрії, присутньої в критичній точці, безвідносно до будь-яких мікроскопічних деталей і без звертань до мікроскопічних гамільтоніанів. За допомогою чисельного дослідження таких умов стало можливим дуже точно знаходження даних, безпосередньо пов'язаних з критичними показниками, звичними в теорії критичних явищ.²

Ці успіхи стимулювали численні дослідження в статистичній фізиці, а також у різних суміжних наукових галузях. Достатньо зробити пошуковий запит “bootstrapping” в Google Scholar щоб знайти тисячі найрізноманітніших цікавих робіт. Науковці, що володіють новими методами конформного бутстрапу, шукають цікаві задачі фізики багаточастинкових систем, особливо ті, в розв'язанні

¹R. Rattazzi, V.S. Rychkov, E. Tonni, A. Vichi, J. High Energy Phys. **2008**, 031 (2008).

²Кульмінацією “нового” методу конформного бутстрапу є найбільш точний на сьогоднішній день розрахунок критичних показників моделі Ізінга у вимірності простору $d = 3$, а саме $\eta = 0.0362978(20)$ і $\nu = 0.629971(4)$ (F. Kos та ін., J. High Energy Phys. **2016**, 036 (2016)). Вичерпне порівняння з альтернативними чисельними оцінками, зокрема, шестипетльовими результатами $\varepsilon = 4 - d$ -розкладу, представлено в M.V. Kompaniets, E. Panzer, Phys. Rev. D **96**, 036016 (2017).

яких у минулому виникали труднощі та неузгодження.

Так, з нової перспективи починають розглядатися, і, відповідно, знов набувають актуальності задачі, близькі до розглянутих у дисертаційній роботі. Досліджуються неупорядковані системи з замороженим безпорядком³, системи з нецілими вимірностями простору⁴, з анізотропною скейлінговою інваріантністю⁵, зі структурними фазовими переходами⁶ та інші.

Серед досліджень складних систем статистичної фізики, що набули особливої актуальності у зв'язку з розвитком останніх подій, для нас особливий інтерес представляє вивчення критичної поведінки обмежених поверхнями систем з застосуванням методів конформної теорії поля. Ця галузь відома під назвою “boundary conformal field theory”, BCFT.

Перша робота, в якій з точки зору конформного бутстрапу досліджувалася критична поведінка напівбезмежних систем, з'явилася у 2013 р.⁷ Тут були сформульовані самоузгоджені рівняння, специфічні для задач цієї категорії. За допомогою методів лінійного програмування були отримані чисельні оцінки для деяких базових скейлінгових вимірностей, пов'язаних з поверхневими критичними показниками спеціального та екстраординарного переходів при $d = 3$. Аналіз отримуваних результатів відбувався з використанням даних нашої роботи [5].

Більш точні дані були отримані в роботах⁸. Результати порівнювались як з теоретичними розрахунками нашої роботи [5], так і з низкою даних, отриманих методом Монте Карло (див. табл. 1 роботи Gliozzi^{8b}). У випадку екстраординарного переходу конформний бутстрап дав певну інформацію про спектр об'ємних операторів, що представляє інтерес поза межами теорії систем з поверхнею. Аналогічна задача розглядалася також у недавній роботі здобувача із співавторами^{9a}.

Значного прогресу було досягнуто і в розвитку *аналітичних* методів. В роботі¹⁰ були відтворені відомі скейлінгові вимірності головних поверхневих операторів, що відповідають спеціальному та звичайному переходам, у порядку $O(\varepsilon^2)$. Це — найвищий порядок ε -розкладу, відомий на сьогодні для критичних показників цих переходів. Більше того, тут вперше знайшли внесок порядку $O(\varepsilon^2)$ в парні кореляційні функції переходів цих двох видів. Підкреслимо, що аналогічні явні результати порядку $O(\varepsilon^2)$ дотепер не були відомими в статистичній фізиці.

Найновіші досягнення в аналітичних дослідженнях напівбезмежних систем пов'язані також і з нашими недавніми роботами⁹. Тут були отримані явні вирази для шарової сприйнятливості напівбезмежних моделей з однокомпонентним та

³Z. Komargodski, D. Simmons-Duffin, J. Phys. A: Math. Theor. **50**, 154001 (2017), O. Aharony, V. Narovlansky, Phys. Rev. D **98**, 045012 (2018).

⁴A. Cappelli, L. Maffi, S. Okuda, J. High Energy Phys. **01**, 161 (2019).

⁵B. Chen, P-X. Hao, Z-f. Yu, Phys. Rev. D **101**, 066029 (2020).

⁶J. Henriksson, S.R. Kousvos, A. Stergiou, SciPost Phys. **9**, 35 (2020).

⁷P. Liendo, L. Rastelli, B.C. van Rees, J. High Energy Phys. **2013**, 113 (2013).

^{8a}F. Gliozzi та ін., J. High Energy Phys. **2015**, 036 (2015), ^{8b}F. Gliozzi, J. High Energy Phys. **2016**, 037 (2016).

^{9a}P. Dey, T. Hansen, M. Shpot, J. High Energy Phys. **2020**, 051 (2020), ^{9b}M.A. Shpot, J. High Energy Phys. **2021**, 055 (2021).

¹⁰A. Bissi, T. Hansen, A. Söderberg, J. High Energy Phys. **2019**, 010 (2019).

$O(n)$ -симетричним параметром порядку при екстраординарному переході, виходячи з яких, і використовуючи новітні методи конформної теорії поля, ми вперше виконали явний розрахунок парної кореляційної функції для цього класу універсальності в наближенні $O(\varepsilon)$. Дотепер ці функції були відомими лише в класичному наближенні Ландау (отриманому ще в 1975 р.!).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем НАН України, з науковою тематикою якого пов'язаний вибраний напрямок досліджень. Представлені в дисертації результати отримані згідно з планами робіт в рамках держбюджетних тем НАН України: “Дослідження фазових переходів першого та другого роду з використанням функціональних методів” (1988–1993 рр., номер державної реєстрації 01 88 0086790), “Дослідження критичної поведінки простих та багатокомпонентних флюїдів та спінових систем” (1994–1998 рр., номер державної реєстрації 01 94 022987), “Дослідження фазових переходів в об'ємних і просторово-обмежених системах та опис на мікроскопічному рівні їх термодинамічних та структурних характеристик” (1999–2001 рр., номер державної реєстрації 0199U000668), “Розвиток кількісної теорії фазових переходів у конденсованих системах” (2002–2004 рр., номер державної реєстрації 0102U000218), “Особливості критичної поведінки конденсованих систем під впливом зовнішнього поля, структурного безладу, фрустрацій та анізотропії” (2005–2007 рр., номер державної реєстрації 0105U002081), “Розвиток і застосування методів аналітичної теорії та комп'ютерного експерименту для опису явищ переносу в іон-електронних системах” (2007–2011 рр., номер державної реєстрації 0107U002081), “Аналітичні та чисельні дослідження скейлінгових властивостей та фазових переходів у багато-частинкових системах” (2008–2012 рр., номер державної реєстрації 0108U001152), “Розвиток теорії складних плинів та міжфазних областей: фазова поведінка, структурні, термодинамічні та динамічні властивості” (2009–2013 рр., номер державної реєстрації 0109U001058), “Багатомасштабність і структурна складність конденсованої речовини: теорія і застосування” (2013–2016 рр., номер державної реєстрації 0112U003119), “Розвиток теоретичних методів опису флюїдних, ґраткових та складних систем поблизу точок фазового переходу” (2013–2017 рр., номер державної реєстрації 0112U007763), “Нові концепції статистичного опису і їх застосування у теорії багаточастинкових систем” (2017–2019 рр., номер державної реєстрації 0117U002093), “Методи і моделі статистичної фізики для опису виникнення структур та пояснення скейлінгу у складних системах” (2018–2022 рр., номер державної реєстрації 0118U003012). Робота з іноземними співавторами проводилася за підтримки Комісії з атомної енергії (СЕА), Франція (1991–1992 рр.), гранту фонду Александра фон Гумбольдта, ФРН (1993–1995 рр.), грантів Sonderforschungsbe- reich 237 і Програми Лейбніца Di 378/2-1, Di 378/3, Di 378/5 Німецького фізичного товариства (DFG) (1996–2014 рр.).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є опис критичної поведінки складних систем статистичної фізики, характерною рисою яких є неідеальність їх властивостей в реальному просторі. До такого опису в пер-

шу чергу належить дослідження параметрів, які характеризують термодинамічні величини і кореляційні функції в околі критичної температури T_c , — критичних показників і критичних амплітуд. Вони визначають загальну форму сингулярностей досліджуваних величин у критичній області, і є доступними для експериментальних вимірювань. Однією з наших цілей є якомога точніше визначення чисельних значень цих параметрів, а також явних функціональних форм кореляційних функцій при $T = T_c$. Для таких розрахунків потрібне просування до чимраз вищих наближень теорії збурень в поєднанні зі специфічною подальшою математичною обробкою отримуваних даних. При роботі зі складними системами це вимагає використання передових математичних підходів.

Для досягнення поставленої мети в роботі необхідно було виконати наступні завдання, серед яких:

1. Розрахунок критичних показників і універсальних комбінацій критичних амплітуд неупорядкованих систем у фіксованих вимірностях простору, зокрема при $d = 3$.
2. Знаходження поверхневих критичних показників тривимірних напівбезмежних систем при звичайному і спеціальному переходах.
3. Вивід критичних показників сильно анізотропних систем в точці Ліфшица в рамках ε - $1/n$ -розкладів.
4. Розрахунок явних виразів для кореляційних функцій в точці Ліфшица.
5. Знаходження критичних амплітуд Казимира ізотропних та анізотропних просторово обмежених систем з двома поверхнями.
6. Дослідження деяких математичних властивостей вищих трансцендентних функцій (таких як функції Апеля, узагальнені гіпергеометричні функції ${}_3F_2$) та інтегралів від добутків дзета-функцій Гурвіца.

При розв'язанні перелічених задач кожен раз нашою метою був їх розгляд у найвищих доступних наближеннях. З часу наших публікацій жодна з цих задач не була розв'язана іншими авторами у вищих наближеннях (за винятком робіт¹¹ для неупорядкованої моделі Ізінга), чи більш досконалішими методами.

Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є просторово неоднорідні системи з різними видами неоднорідності, що перебувають у точці фазового переходу другого роду та її околі.

Предметом дослідження є критичні показники, критичні амплітуди та кореляційні функції, що описують статичну критичну поведінку просторово неоднорідних систем.

Методи дослідження. Ключовим методом дослідження, що використовується в роботі, є теоретико-польовий підхід до критичних явищ в контексті ренормалізаційної групи (РГ) Вільсона. В загальних рамках цього підходу використовуються різні варіанти ε -розкладу Вільсона-Фішера, “масивна” теорія поля

¹¹ Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, J. Stat. Phys. **92**, 785 (1998), I. Mayer, Physica A **252**, 450 (1998), P. Calabrese та ін., Phys. Rev. B **68**, 134418 (2003), див. стор. 9, 11.

Парізі у фіксованих вимірностях простору, $1/n$ -розклад за великим числом компонент параметра порядку n Абе-Ма, розклади в ряди теорії збурень в термінах діаграм Фейнмана. Застосування цих методів у даній роботі є нетривіальними і оригінальними. Вони приводять до нових результатів у нетривіальних наближеннях, більшість з яких залишається найвищими до теперішнього часу.

Наукова новизна одержаних результатів. Вперше масивна теорія поля застосована при *нецілих* фіксованих вимірностях простору $2 < d < 4$. Виведено явні вирази двопетльових функцій ренормалізаційної групи для довільних d . Побудовано плавні залежності від d критичних показників ізінгівських систем з замороженим безпорядком.

Вперше масивна теорія поля при $d = 3$ застосована до дослідження *критичних амплітуд* неупорядкованих ізінгівських систем при температурах, вищих і нижчих за критичну. На основі цього методу вперше здійснено розрахунок універсальних комбінацій критичних амплітуд, зокрема відношень їх величин при $T > T_c$ і $T < T_c$. Зроблено висновок про те, що теоретичне значення відношення критичних амплітуд питомої теплоємності A_+/A_- при $d = 3$ може бути додатнім на противагу передбаченням $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу.

Вперше масивна теорія поля при довільних вимірностях простору d сформульована для *напівбезмежних* систем. Запропоновано умови нормування для випадків звичайного та спеціального переходів. Проведені двопетльові розрахунки поверхневих критичних показників цих переходів при $d = 3$. Зроблено висновок про те, що неупорядкованість поверхні не впливає на особливості спеціального переходу, а об'ємний безпорядок змінює показники звичайного переходу.

У дисертації запропоновано новий підхід до розрахунку критичних показників точки Ліфшица (ТЛ) з довільною кількістю осей анізотропії m . Вперше отримані правильні ε -розклади показників ТЛ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ і зроблено висновок про те, що в нетривіальній взаємодіючій теорії індекс анізотропії θ є неklasичним для будь-якої кількості напрямів модуляції m . Виявлено та проаналізовано помилки інших авторів в аналогічних розрахунках.

Вперше поставлена задача про вплив кристалічної структури на критичну поведінку m -вісних ТЛ і показано, що анізотропія підпростору модуляції може бути причиною зміни характеру фазового переходу в ТЛ.

Сформульовано ренормгруповий опис напівбезмежних анізотропних систем з поверхнею, перпендикулярною до однієї з осей анізотропії. Виведені неklasичні поверхневі показники звичайного переходу в таких системах.

Вперше для ТЛ з $0 \leq m \leq d$ застосований $1/n$ -розклад за великою кількістю компонент параметра порядку. Знайдено поправки порядку $1/n$ для кореляційних і термодинамічних показників. Встановлено узгодження з відомими результатами у чотирьох різних граничних режимах. Якісний аналіз залежностей критичних показників від вимірності простору d дозволив зробити висновок про те, що кореляційний критичний показник $\eta_4(m, d)$ міняє знак при зміні d .

Виявлена неаналітичність ε -розкладу амплітуд Казимира плівкових систем з періодичними і спеціальними граничними умовами, в явному вигляді знайдено

поправки порядку $O(\varepsilon^{3/2})$ для цих амплітуд.

Вперше отримано результати, що стосуються флуктуаційно індукованих сил у сильно анізотропних системах, по різному орієнтованих між двома паралельними поверхнями, що їх обмежують.

Практичне значення одержаних результатів. Узагальнення теоретико-польових підходів у дослідженнях критичних явищ, розроблені в дисертації, можуть використовуватися для уточнення отриманих даних шляхом розгляду вищих наближень теорії збурень. Так, в рамках цікавої і актуальної задачі про зміну поведінки критичних систем із зміною вимірності простору d , а також при розрахунку величини R_ξ^+ у неупорядкованій моделі Ізінга, розрахунки у вищих наближеннях були виконані в роботах різних авторів¹¹. Підходи наших робіт [1] і [2] можуть бути поширеними також на інші моделі та задачі в теорії багаточастинкових систем.

Отримані нами в [5] чисельні оцінки поверхневих критичних показників цитуються практично всіма роботами, присвяченими критичним явищам в напівбезмежних системах, зокрема вони використовуються в найновіших дослідженнях методами конформного бутстрапу^{7,8}.

Наші формулювання теорії сильно анізотропних систем в точці Ліфшица і технологічні засоби, які при цьому використовуються, з певністю є корисними для квантових теорій поля з порушенням Лоренцівської інваріантності (див. стор. 23). Деякі математичні аспекти таких теорій ґрунтовно досліджувалися в нашій роботі [26]. Пропоновані нами способи розрахунків є суттєво ефективнішими за всі попередні і дозволяють проводити аналогії до інших складних систем.

Запропонований в роботі [15] підхід до реорганізації теорії збурень, де вона не працює традиційним чином, дає загальний алгоритм, який також може бути використаний для знаходження спостережуваних величин в інших теоріях, таких як *тиск* в температурній теорії поля¹².

Нарешті, наші статті [16, 22] використовуються і цитуються в математичних роботах, присвячених дослідженням спеціальних функцій.

Особистий внесок здобувача. В роботах [1, 27] здобувачем виконані аналітичні розрахунки, пов'язані з інтегралами Фейнмана і функціями Γ , аналіз отриманих результатів і написання тексту статті. В [2] поставлена задача, виконані всі аналітичні розрахунки і аналіз чисельних результатів. В [3, 5] виконані всі розрахунки (за винятком дослідження неаналітичності в перенормуванні поверхневих взаємодій), обробка і аналіз отриманих даних. В [6, 7] здобувачеві належить оригінальна ідея розрахунку полюсних частин діаграм Фейнмана і інтегральних представлень їх лишків, аналітичні (за винятком аналізу рівнянь Γ) та чисельні розрахунки, аналіз результатів і їх порівняння з даними інших робіт. Коментарі [8, 11] і присвячена ізотропній ТЛ стаття [10] написані співавтором здобувача у значній мірі на основі його попередніх досліджень; в задачі про критичну поведінку напівбезмежних систем в ТЛ [14] здобувач виконав аналітичні розрахунки

¹²U. Kraemmer, A. Rebhan, Rep. Prog. Phys. **67**, 351 (2004).

функцій РГ, отримав остаточні чисельні результати. В роботі [9] здобувачу належить постановка задачі, розрахунки в порядку $O(\sqrt{\varepsilon}^2)$ поверхневих критичних показників, написання остаточної версії опублікованої статті. Здобувачу належить також постановка задачі роботи [12] про вплив кристалічної структури підпростору модуляції на критичну поведінку m -вісних ТЛ і аналітичний розрахунок відповідного кросоверного показника. В [13, 17, 21] здобувач виконав всю аналітичну і чисельну роботу за винятком найперших загальних інтегральних представлень кореляційних показників, написав текст статті [21]. В [15] здобувач ідентифікував проблеми вищих порядків теорії збурень для амплітуд Казимира в плівкових системах з періодичними граничними умовами і вперше отримав неаналітичний внесок $O(\varepsilon^{3/2})$ шляхом сумування безмежного ряду діаграм. В [19, 20] здобувач брав активну участь на всіх етапах роботи, в першу чергу — розрахунків діаграмних розкладів; виявив і виправив помилки в оригінальних статтях та ініціював публікацію коректних результатів. В [22–26] здобувач задіяв відомих математиків до розв’язання математичних задач, що виникали в процесі його фізичних досліджень. В одноосібних статтях [4, 16, 18] вся робота виконана здобувачем.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідалися і обговорювалися на: The 18th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Berlin, FRG, 2–8 August 1992); The 19th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Xiamen, PRC 31 July – 4 August 1995); Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 7/1995 (Berlin, FRG, 1995); Науковий семінар з статистичної терорії конденсованих систем (Львів, Україна, 14–15 березня 1997); Ізингівські читання (Львів, Україна, 29 квітня 1998); International Congress on Mathematical Physics “ICMP 2000” (London, UK, July 17–22 2000); Workshop on Modern Problems of Soft Matter Theory (Lviv, Ukraine, August 27–31 2000); Meeting of the American Physical Society (Seattle, USA, March 12–16 2001); 20–th European Conference on Surface Science (Krakow, Poland, September 04–07 2001); The 21th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Cancun, July 15–21 2001); Різдвяні дискусії (Львів, Україна, 4–5 січня 2002); VI Ukrainian–Polish and II East–European Meeting on Ferroelectrics Physics (Uzhgorod–Synjak, Ukraine, September 6–10, 2002); The Spring–Meeting of the German Physical Society (Berlin, FRG, March 04–09 2005); The 6th International Conference “Renormalization Group 2005” (Helsinki, Finland, 30 August – 03 September 2005); The 23th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Genova, Italy, July 09–13 2007); The 3rd Conference “Statistical Physics: Modern Trends and Applications” (Lviv, Ukraine, June 23–25 2009); Meeting of the American Physical Society (Portland, Oregon, USA, March 15–19 2010); Meeting of the American Physical Society (Dallas, Texas, USA, March 21–25 2011); The 36th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics MECO 36 (Lviv, Ukraine, April 5–7 2011); The 4th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications (Lviv, Ukraine, July 3–6 2012); 13–та Всеукраїнська школа–семінар та Конкурс молодих вчених (Львів, Україна, 5–7 червня 2013); Йорданські читання (Львів, Україна, 2018), а також на семінарах Інституту фізики конденсованих систем НАН України, факультету фізики Університету Дуйсбург–Ессен

(Ессен, Дуйсбург ФРН), кафедри теоретичної фізики Університету Аахен (Аахен, ФРН) відділу теоретичної фізики Центру ядерних досліджень Сакле (Сакле, Франція), факультету фізики Університету Нансі (Нансі, Франція), факультету математики Південно-китайського університету технології (Гуангджоу, КНР).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 27 статей у фахових наукових виданнях [1–27] (серед них 3 статті [4, 16, 18] є одноосібними) і 21 тези міжнародних конференцій [28–48].

Структура та об’єм дисертації. Дисертаційна робота складається із переліку умовних скорочень, вступу, 7 розділів основної частини, загальних висновків, списку використаних джерел з 398 найменувань, двох додатків, і містить 14 рисунків і 12 таблиць. Робота викладена на 265 сторінках (зі списком використаних джерел і додатками — 307 сторінок).

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У дисертаційній роботі досліджується критична поведінка просторово неоднорідних багаточастинкових систем. Термін “неоднорідність” передбачає наявність заморожених домішок, однієї чи двох поверхонь, просторової анізотропії, а також поєднання цих різних властивостей.

У **вступі** висвітлено актуальність теми, сформульовано мету і завдання дисертації, окреслено наукову новизну і практичне значення отриманих результатів, визначено особистий внесок здобувача та наведено інформацію щодо апробації роботи.

У **першому розділі** представлено короткий огляд літератури за темами, безпосередньо дослідженими в дисертаційній роботі. Спочатку системи всіх розглянутих типів розглядаються на рівні спінових гамільтоніанів. Далі говориться про літературу, пов’язану з кожною з них, і про роль роботи здобувача та її місце серед літератури — як до написання оригінальних статей, так і після їх публікації.

Другий розділ присвячений дослідженню (слабо)невпорядкованої моделі Ізінга з замороженим безпорядком, чи *розведеної моделі Ізінга* — “dilute Ising model”, DIM. Її критична поведінка вивчається в тривимірному просторі $d = 3$, а також в нецілих вимірностях простору d між $d = 2$ і $d = 4$. Ми працюємо з ефективним гамільтоніаном (ЕГ) Ландау-Гінзбурга-Вільсона

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla \phi)^2 + m_0^2 |\phi|^2] + \frac{u_0}{4!} (|\phi|^2)^2 + \frac{v_0}{4!} \sum_{a=1}^n \phi_a^4 \right\}, \quad (1)$$

де векторне поле параметра порядку $\phi = \phi(x) = \{\phi_a(x), a = 1, \dots, n\}$. Число компонент поля n вважається неперервним, і в остаточних результатах, що стосуються DIM, розглядається реплічна границя $n \rightarrow 0$. Модель (1) означена в безмежному ізотропному і трансляційно інваріантному d -вимірному евклідовому координатному просторі \mathbb{R}^d з радіус-вектором $\mathbf{x} = \{x_\alpha, \alpha = 1, \dots, d\} \in \mathbb{R}^d$.

Вимірність простору d теж вважається неперервною змінною на протязі всієї роботи. Завдяки ізотропії і трансляційній інваріантності простору поле ϕ залежить від модуля x радіус-вектора \mathbf{x} .

Початковими (неперенормованими) параметрами теорії є “маса” m_0^2 , лінійна функція температури, і дві константи зв’язку, u_0 і v_0 . Константа зв’язку u_0 стоїть біля звичного $O(n)$ -симетричного члена типу ϕ^4 . В теоріях ідеальних систем $u_0 > 0$, але, за побудовою, при описі DIM u_0 є від’ємною: $u_0 < 0$. Цей знак повинен зберігатися у відповідній нерухомій точці. В останньому доданку проявляється кубічна анізотропія простору параметра порядку; тут ми маємо $v_0 > 0$ ¹³.

В наших розрахунках ми дотримувалися загальної схеми масивної теорії поля при фіксованих вимірностях простору d ,¹⁴ з використанням звичайних умов нормування вершинних функцій Гріна при нульових зовнішніх імпульсах і ненульовій масі (тобто при температурі, відмінній від критичної). Стандартні комбінації інтегралів Фейнмана вдалося знайти в термінах гіпергеометричних функцій Гауса ${}_2F_1$, залежних від довільного параметра $\varepsilon = 4 - d$:

$$i(d) = \frac{\text{diagram 1}}{\text{diagram 2}} = \frac{1}{2-\varepsilon} \left[2 + {}_2F_1\left(\varepsilon, 1; \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}; \frac{1}{4}\right) - 2 {}_2F_1\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \right],$$

$$j(d) = \frac{\partial}{\partial k^2} \text{diagram 3} \Big|_{k^2=0} / \text{diagram 2} = \frac{1}{3d} [4 - (4+d)i(d)].$$

Знання явних залежностей функцій РГ від вимірності простору d дозволяє проводити розрахунок критичних показників DIM безпосередньо при довільних нецілих значеннях d . Так ми побудували плавні залежності від вимірності простору критичних показників DIM і виконали необхідні порівняння — див. Рис. 1.

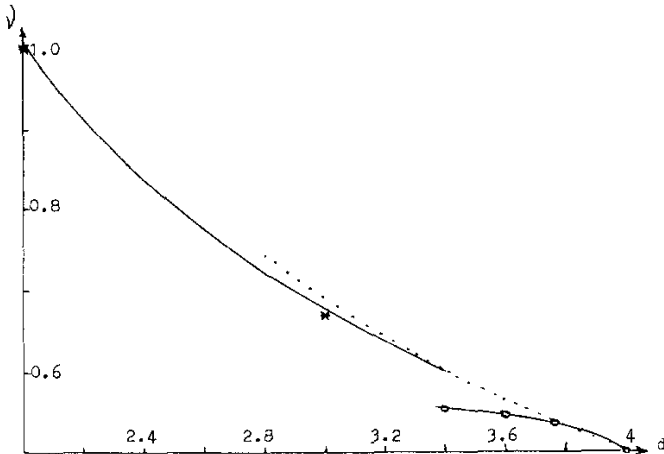


Рис. 1. Критичний показник ν DIM як функція вимірності простору d .

— суцільна лінія: [1] при $2 \leq d \leq 3.4$

— крива з “виколеними” точками: пересумування $O(\sqrt{\varepsilon^2})$

— точкова лінія: *Newman, Riedel, Phys. Rev. B* **25**, 264 (1982)

— *: точно при $d = 2$; найкраще на 1992 р. при $d = 3$, *Mayer та ін. Ferroel.* **95**, 93 (1989)

Аналогічні криві наступного, трипетльового наближення — на рис. 5 в *Holovatch, Yavors'kii, J. Stat. Phys.* **92**, 785 (1998)

Дослідження універсальних комбінацій критичних амплітуд і рівняння стану DIM технічно набагато складніше, і робота виконувалася безпосередньо в тривимірному просторі. Тут використовувалися безпосереднє узагальнення теорії

¹³Це обмеження не накладається при розгляді кубічної моделі з $n > 1$; в граничному випадку $n = 1$ обидва члени типу ϕ^4 стають однаковими, і ЕГ (1) втрачає свою анізотропність у параметричному просторі.

¹⁴ G. Parisi, *J. Stat. Phys.* **23**, 49 (1980).

Парізі¹⁴ на випадок розрахунків критичних амплітуд, а також на розгляд низькотемпературної фази $T < T_c$ з урахуванням спонтанного порушення симетрії та наявності в системі ненульового параметра порядку.¹⁵

У високотемпературній фазі $T > T_c$ визначається універсальна комбінація R_ξ^+ , фізичний зміст якої полягає у зв'язку з величиною вільної енергії (ВЕ) в кореляційному об'ємі, тобто, з добутком $f_{\text{sing}}\xi^d$, де f_{sing} — сингулярна частина густини ВЕ, а ξ — кореляційна довжина. При $T \rightarrow T_c$ величина $f_{\text{sing}}\xi^d \propto t^{2-\alpha}t^{-d\nu}$ є незалежною від температури, оскільки $2 - \alpha = d\nu$.¹⁶ В термінах критичних амплітуд, $R_\xi^+ = A_+^{1/d}\xi_0^+$, де ξ_0^+ — амплітуда температурної залежності кореляційної довжини $\xi(t) \simeq \xi_0^+t^{-\nu} + o(t^{-\nu})$ при $t \equiv (T - T_c)/T_c \rightarrow 0$, а A_+ — амплітуда сингулярної частини питомої теплоємності

$$C(t) = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \simeq \frac{A_\pm}{\alpha} |t|^{-\alpha} + C_0. \quad (2)$$

В термінах залежних від температури фізичних величин ми маємо

$$R_\xi^+ = [\alpha t^2 C_{\text{sing}}(t)]^{\frac{1}{d}} \xi(t) = t [-C'(t)]^{\frac{1}{d}} \xi(t). \quad (3)$$

Перевагою другого запису є те, що похідна за t ліквідує постійний внесок C_0 з (2).

Оскільки в масивній теорії температурною змінною, яка контролює наближення до критичної точки, є перенормована маса $m = \xi^{-1} \propto t^\nu$ або $m_1^2 = Z_\phi^{-1} m^2 = \chi^{-1} \propto t^\gamma$, для розрахунку R_ξ^+ потрібно визначити зведену температуру t . Як у роботі¹⁷, ми визначаємо $t = \gamma Z_\phi Z_{\phi^2} m_1^2$, де Z_ϕ і Z_{ϕ^2} — звичайні ренормалізаційні фактори поля і його квадрата. Питому теплоємність розраховуємо за означенням (2) з діаграмного розкладу для ВЕ в чотирипетльовому наближенні (для компактності чотири чотирипетльові діаграми (4L) опущені)

$$F = \bigcirc - \bigcirc \! \! \bigcirc - \bigcirc \! \! \bigcirc \! \! \bigcirc - \bigcirc \! \! \bigcirc \! \! \bigcirc \! \! \bigcirc - 4L - \dots, \quad (4)$$

і ще раз диференціюємо її відповідно до (3). Потрібні інтеграли Фейнмана були розраховані в явному вигляді [2].¹⁸

Для чисельних оцінок величини R_ξ^+ використовувалися апроксиманти типу Паде для подвійних рядів і координати нерухомої точки трипетльового наближення¹⁹ $v^* = 2.26212$, $u^* = -0.74537$. Результати і порівняння наведені в Табл. 1.

¹⁵Для ідеальних систем таке узагальнення було розроблене в С. Bagnuls, та ін. Phys. Rev. B **35**, 3585 (1987).

¹⁶ Універсальність R_ξ^+ була передбачена ще на початку 1970-х років, див. V. Privman, та ін. Universal critical-point amplitude relations, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 14, 1–134, 364–367, Academic, NY, 1991.

¹⁷C. Bervillier, C. Godrèche, Phys. Rev. B **21**, 5427 (1980).

¹⁸ Правильність отриманих виразів підтверджувалася звіркою з чисельними даними таблиць В.Г. Nickel, D.I. Meiron, G.A. Baker, Jr., Compilation of 2-pt and 4-pt graphs for continuum spin models, *Guelph University Report*, 1977. Згодом аналогічні результати були отримані в роботі А.К. Rajantie, Nucl. Phys. B **480**, 729 (1996).

¹⁹ Вперше правильно визначені в Н.А. Шпот, Препринт ИТФ-88-140Р (1988), Phys. Lett. A **142**, 474 (1989).

n	R_ξ^+
0	0.286 ± 0.004
0	0.2886 ± 0.0006^a
0	$0.290(10)^b$
0	$0.2885(15)^c$
3	0.42 ± 0.01

Табл. 1. Чисельні оцінки R_ξ^+ при $d = 3$ для DIM ($n = 0$) і кубічної моделі ($n = 3$)

Без індексів — величини, отримані в нашій роботі [2]

^a 5-петльове наближення: *Mayer, Physica A* **252**, 450 (1998)

^b 6-петльове наближення: *Calabrese та ін. Phys. Rev. B* **68**, 134418 (2003)

^c Монте Карло: *Calabrese та ін. Phys. Rev. E* **68**, 036136 (2003)

При $T < T_c$ ми повинні враховувати спонтанне порушення симетрії і працювати з квазісереднім Боголюбова, що передбачає включення зовнішнього поля h_0 . Це приводить до появи додаткового члена $-h_0 \int d^d x \sum_{a=1}^n \phi_a$ в ЕГ (1). Далі виконується поворот системи координат, який приводить цей доданок до стандартного вигляду $-h_0 \int d^d x \phi_1$. В результаті виділення середнього значення $M_0 = \langle \phi_1 \rangle$ виникають поздовжня та поперечна обернені сприйнятливості, що задіюються в результуючій теорії збурень з вершинами ϕ^4 , ϕ^3 і ϕ^2 . У трипетльовому наближенні слід враховувати більше 50 діаграм Фейнмана з *нетривіальною* реплічною границею $n \rightarrow 0$ через наявність від'ємних степенів n в проміжних викладках. Ми

Табл. 2. Чисельні оцінки універсальних комбінацій критичних амплітуд DIM.

DIM: [2]; $\sqrt{\varepsilon}$: *Шном, ЖЭТФ* **98**, 1762 (1990), тут $A_+/A_- < -1/2$; Експ: експериментальні дані ^a*Jaccarino, King, J. Phys. Paris* **49**, 1209 (1988), ^b*Birgeneau та ін. Phys. Rev. B* **27**, 6747 (1983); CPPV: *Calabrese та ін. Phys. Rev. B* **68**, 134418 (2003), тут $A_+/A_- = 1.6(3)$, як і в^b; ІМ: комбінації амплітуд чистої моделі Ізінга з *Vagnuls та ін. Phys. Rev. B* **35**, 3585 (1987)

	DIM	$\sqrt{\varepsilon}$	Експ	CPPV	ІМ
Γ_+/Γ_-	3.05 ± 0.32	> 2	2.8 ± 0.2^a	5.5(1.0)	4.77 ± 0.30
A_-/A_+	0.17 ± 0.16	< 0	0.625^b	0.625	1.848
R_C	0.070 ± 0.002	0.03		0.08(2)	0.0594 ± 0.0011
r	2.8 ± 0.9			3.57	2.998

отримуємо термодинамічний потенціал $\Gamma(M_0, T)$, рівняння стану, спонтанну намагніченість, магнітну сприйнятливість і питому теплоємність у вигляді подвійних рядів за перенормованими константами зв'язку u і v . З них виводимо аналогічні розклади для відношень критичних амплітуд сприйнятливості $\chi \simeq \Gamma_\pm |t|^{-\gamma}$, теплоємності (2) і комбінацій $R_C = A_+ \Gamma_+ / B^2$ і $r = R_C / (R_\xi^+)^3 = \Gamma_+ (\xi_0^+)^{-3} B^{-2}$, де B — амплітуда намагніченості $M_0 = B |t|^\beta$. Чисельні оцінки і порівняння наведені в Табл. 2.

У **третьому розділі** досліджується критична поведінка *напівбезмежних* систем — “semi-infinite systems”, SIS, з ізотропними короткосяжними взаємодіями, на основі ефективного гамільтоніана

$$\mathcal{H}[\phi] = \int_0^\infty dz \int d^{d-1} r \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 |\phi|^2 + \frac{u_0}{4!} (|\phi|^2)^2 \right] + \int_{\partial V} d^{d-1} r \left(\frac{1}{2} c_0 |\phi_s|^2 \right). \quad (5)$$

На відміну від звичайних об'ємних систем, тут система “займає” верхню половину d -вимірному простору $V = \mathbb{R}_+^d \equiv \{\mathbf{x} = (\mathbf{r}, z) \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{d-1}, z \geq 0\}$, обмежену плоскою $(d - 1)$ -вимірною гіперповерхнею ∂V при $z = 0$ з поверхневими полями $\phi_s(\mathbf{r}) = \phi(r, 0)$. Константа зв'язку $u_0 > 0$ характеризує флуктуації полів в об'ємі системи, а c_0 — локальний поверхневий параметр, що описує відхилення сили поверхневих взаємодій від об'ємних — “surface enhancement”. Якщо поверхневі взаємодії не особливо сильні, при $T = T_c$ в SIS відбувається т. зв. звичайний перехід, при якому впорядкування об'єму системи V “індукує” критичні особливості фізичних величин на поверхні ∂V . Але, існує таке *спеціальне* значення $c_0 = c_0^{sp}$, що при $T \rightarrow T_c$ і об'єм і поверхня системи впорядковуються одночасно. Такий фазовий перехід називається спеціальним. Екстраординарний перехід, що відбувається в SIS у присутності далекосяжного впорядкування на поверхні, дуже цікавий з точки зору теорії⁹, але надалі не розглядатиметься.

Ми узагальнили формулювання масивної теорії поля¹⁴ на випадок SIS. Це дало можливість досліджувати поверхневу критичну поведінку безпосередньо у фізичній вимірності простору $d = 3$, хоча насправді наш метод є більш загальним і теорія працює при довільних d в межах $d^* \geq d > d_\ell^{(n)}$ між верхньою граничною вимірністю d^* і нижньою, $d_\ell^{(n)}$, що залежить від вимірності параметра порядку n .

Наприклад, у випадку спеціального переходу ми отримали загальні вирази для ренормгрупових функцій з довільним d в однопетльовому наближенні [4]

$$\eta_1^{sp}(u^*) = \eta_{\parallel}^{sp}(u^*) = -\frac{n+2}{n+8} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

$$\eta_c(u^*) = \frac{n+2}{n+8} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \left[1 - 2^{\frac{1+\varepsilon}{2}} {}_2F_1\left(\frac{3-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}; \frac{3+\varepsilon}{2}; \frac{1}{2}\right) \right],$$

де $\varepsilon = 4 - d > 0$ не обов'язково мале, а ${}_2F_1$ - гіпергеометрична функція Гауса. При $\varepsilon \rightarrow 0$ звідси відтворюються відомі результати порядку $O(\varepsilon)$. А при $d = 3$ простою підстановкою $\varepsilon = 1$ можна отримати чисельні оцінки показників паралельних кореляцій²⁰ $\eta_{\parallel}^{sp}(n=0) = -\frac{1}{8} \simeq -0.13$ і $\eta_{\parallel}^{sp}(n=1) = -\frac{1}{6} \simeq -0.17$, а також $\eta_c(n=0) = \frac{1}{8}(1 - 4 \ln 2) \simeq -0.22$ і $\eta_c(n=1) = \frac{1}{6}(1 - 4 \ln 2) \simeq -0.30$. Величини, отримані в цьому найпростішому наближенні для η_{\parallel}^{sp} , дуже добре узгоджуються з результатами наших складних двопетльових розрахунків (див. Табл. 3). Ренормгрупова функція η_c визначає кросоверний показник $\Phi = \nu[1 + \eta_c(u^*)]$ і показник локальної поверхневої теплоємності $\alpha_{11}^{sp} = \alpha + \nu - 2 + 2\Phi = -\nu[d - 3 - \eta_c(u^*)]$. У випадку η_c узгодження є слабкішим: ряд теорії збурень для цієї функції поводить себе значно гірше, для надійних чисельних оцінок необхідно переходити до вищих наближень і застосовувати спеціальні методи пересумувань.

Для отримання чисельних даних у двопетльовому наближенні ми застосовували таблиці Паде і, де це можливо — пересумування типу Паде-Бореля. Наші

²⁰Підкреслимо, що, на відміну від реплічної границі у випадку DIM, тут значення $n = 0$ відповідає опису напівбезмежних *полімерних* систем.

Табл. 3. Величини поверхневих критичних показників спеціального переходу у тривимірних полімерних ($n = 0$) та ізінгівських ($n = 1$) системах станом на 1998 рік. ^aMeirovitch, Livne, J. Chem. Phys. **88**, 4507 (1988), ^bHegger, Grassberger, J. Phys. A **27**, 4069 (1994), ^cLandau, Binder, Phys. Rev. B **41**, 4633 (1990), ^dVendruscolo, Rovere, Fasolino, EPL **20**, 547 (1992), ^eRuge, та ін., J. Stat. Phys. **73**, 293 (1993), ^fRuge, Wagner, Phys. Rev. B **52**, 4209 (1995)

	η_{\parallel}	η_{\perp}	β_1	γ_{11}	γ_1	Φ
	<u>$n = 0$</u>					
[3–5]	-0.133	-0.053	0.255	0.666	1.207	0.518
^a 1988				0.805(15)	1.304(6)	0.530(7)
^b 1994				0.714(6)	1.230(2)	0.496(4)
	<u>$n = 1$</u>					
[3–5]	-0.165	-0.067	0.263	0.734	1.302	0.539
^c 1990			0.18(2)	0.96(9)	1.41(14)	0.59(4)
^d 1992			0.22			0.74
^e 1993			0.237(5)			0.461(15)
^f 1995			0.2375(15)	0.788(1)	1.328(1)	

результати в ряді випадків поправляють попередні оцінки, отримані з ε -розкладу, і добре узгоджуються з даними експериментальних робіт і найкращими результатами чисельних досліджень методами Монте Карло. В Табл. 3 ми наводимо приклади наших чисельних оцінок, порівнюючи їх з результатами інших робіт (додаткові дані — до 2004 р. — містяться в табл. 3 огляду²¹).

Зокрема, наша оцінка критичного показника поверхневої теплоємності $\alpha_{11}^{sp}(n = 1) = -0.182$ означає виконання нерівності $\alpha_{11}^{sp} < 0$ для ізінгівських систем. Ця нерівність є, фактично, критерієм несуттєвості²² слабкої короткосяжно корельованої замороженої невпорядкованості на поверхні для систем такого типу у тривимірному просторі при спеціальному переході. Цей фізичний висновок, зроблений у нашій статті [5], підтверджений симуляціями Монте Карло^{22†}.

Наша теорія сформульована таким чином, що поверхневі Z -фактори і η -функції залежать як від перенормованої константи зв'язку, так і від безрозмірної змінної $\mathbf{c} = c/m$. Це дозволяє, в принципі, охопити як граничні випадки спеціального і звичайного переходів, так і кросоверну область між ними. Спеціальний перехід відбувається при $c = m = 0$ і $\mathbf{c} = 0$, а звичайний — в границі $m \rightarrow 0$ з фіксованим $c > 0$, а отже при $\mathbf{c} \rightarrow \infty$.

Безмежне значення \mathbf{c} відповідає виконанню в асимптотичному режимі граничної умови Діріхле, $\phi(\mathbf{r}, z)|_{z=0} \equiv \phi_s(r) = 0$. При цьому будь-які кореляційні функції, що включають хоч одне поле на поверхні, тотожно обертаються в нуль. У такій ситуації в пригоді стає операторний розклад поля $\phi(\mathbf{r}, z \rightarrow 0)$ біля поверхні — “boundary-operator expansion”, БОЕ.²³ В термінах перенормо-

²¹M. Pleimling, J. Phys. A **37**, R79 (2004).

²²H.W. Diehl, A. Nüsser, Z. Phys. B **79**, 69 (1990), [†]M. Pleimling, W. Selke, Eur. Phys. J. B **1**, 385 (1998).

²³H.W. Diehl, S. Dietrich, Z. Phys. B **42**, 65 (1981), H.W. Diehl, Int. J. Mod. Phys. B **11**, 3503 (1997). У сучасній

ваних величин цей розклад має вигляд $\phi_R(\mathbf{r}, z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} C_{\partial_n \phi}(z) (\partial_n \phi)_R(\mathbf{r}) + \dots$, де $\partial_n \phi(\mathbf{r}) = \partial \phi(\mathbf{r}, z) / \partial z|_{z=0}$, нормальна похідна поля на поверхні, є головним оператором розкладу. Таким чином, необхідна інформація може бути отримана з розгляду кумулянтних середніх

$$\mathcal{G}^{(N,M)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{r}_M) \equiv \left\langle \left[\prod_{j=1}^N \phi_{a_j}(\mathbf{x}_j) \right] \left[\prod_{k=1}^M \partial_n \phi_{a_k}(\mathbf{r}_k) \right] \right\rangle_{\text{con}}.$$

Кореляційні функції $\mathcal{G}^{N,M}$ не зникають при $c_0 = \infty$, і дають, таким чином, можливість визначити скейлінгову вимірність поля $\partial_n \phi(\mathbf{r})$, пов'язану з критичним показником поверхневих кореляцій при звичайному переході, $\eta_{\parallel}^{\text{ord}}$.

Табл. 4. Величини деяких поверхневих критичних показників звичайного переходу при $n = 1$, $n = 2$ і $n = 3$. Теорія і чисельний експеримент. ^gPhys. Rev. E **72**, 016128 (2005), ⁱPhys. Rev. E **78**, 011127 (2008), ^jPhys. Rev. B **83**, 134425 (2011)

	β_1	$y_{h_1} = \Delta_1/\nu$
	$n = 1$	
[3, 5]	0.796	0.737
^g Deng, Blöte, Nightingale 2005 Monte Carlo	0.796(1)	0.7374(15)
ⁱ Lin, Zheng 2008 Monte Carlo	0.795(6)	—
^j Hasenbusch 2011 Monte Carlo	—	0.7249(6)
^{10a} Gliozzi, Liendo, Meineri, Rago 2015 Bootstrap	—	0.724(2)
^{10b} Gliozzi 2016 Bootstrap	—	0.72558(18)
	$n = 2$	
[3, 5]	0.810	0.788
^g Deng, Blöte, Nightingale 2005 Monte Carlo	—	0.781(2)
	$n = 3$	
[3, 5]	0.824	0.825
^g Deng, Blöte, Nightingale 2005 Monte Carlo	—	0.813(2)

У завершальній частині третього розділу розглянуті SIS з об'ємною неупорядкованістю при звичайному переході. Тут ми узагальнили дослідження більш ранньої роботи²⁴: з одного боку — поширили на наступний порядок результати $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу²⁴, а з іншого — застосували до розгляду цієї задачі метод масивної теорії поля. У другому порядку $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу ми отримали для показника паралельних до поверхні кореляцій явний вираз

$$\eta_{\parallel} = 2 - \sqrt{\frac{6\varepsilon}{53}} + \frac{756\zeta(3) - 5}{2 \cdot 53^2} \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \text{де } \zeta(a) \text{ — дзета-функція Рімана.}$$

конформної теорії поля SIS (BCFT, див. стор. 2), BOE є одним з ключових “інструментів”.

²⁴ К. Ohno, Y. Okabe, Phys. Rev. B **46**, 5917 (1992).

Апроксиманта Паде $[1/1]$ дає для цього показника значення $\eta_{\parallel} = 1.772$. Альтернативна оцінка $\eta_{\parallel} = 1.36$ отримана нами за допомогою масивної теорії поля. Подібно, як при аналізі даних апроксимант Паде, ми приймаємо за остаточний результат для показника η_{\parallel} середнє арифметичне $\eta_{\parallel} = 1.566$. Це значення є більшим за результат $\eta_{\parallel}^{ord} = 1.528$, отриманий нами для чистих систем. Нерівності $\eta_{\parallel}^{DIM} > \eta_{\parallel}^{ord}$ слід очікувати, оскільки зменшення скорельованості системи при її розпорядкуванні повинно приводити до більш швидкого спадання парної кореляційної функції $G(r) \sim r^{-(d-2+\eta_{\parallel})}$, яке визначається величиною показника η_{\parallel} .

Четвертий розділ розпочинає вивчення критичної поведінки сильно анізотропних систем у мультикритичній точці Ліфшица (ТЛ). Теоретичний опис базується на розгляді ЕГ

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^{d-m}r \int d^m z \left[\frac{m_0^2}{2} |\phi|^2 + \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2} (\nabla_{\parallel} \phi)^2 + \frac{\sigma_0}{2} (\Delta_{\parallel} \phi)^2 + \frac{u_0}{4!} |\phi|^4 \right], \quad (6)$$

де взаємодія описується звичайним $O(n)$ -симетричним членом ϕ^4 . Важливим тут є те, що фізичні властивості систем, які описуються ЕГ (6), суттєво відрізняються вздовж різних просторових осей, і ці відмінності не можуть бути усунуті простими змінами величин параметрів теорії. Відповідно, d -вимірний координатний простір \mathbb{R}^d розділяється на два ізотропні евклідові підпростори \mathbb{R}^{d-m} і \mathbb{R}^m . Подібно, як і у випадку вимірності простору d , кількість осей анізотропії m змінюється неперервно у проміжку $0 \leq m \leq d$. Кожен радіус-вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d-m} \times \mathbb{R}^m$ має $(d-m)$ -вимірну “перпендикулярну” компоненту $\mathbf{x}_{\perp} \equiv \mathbf{r}$ і m -вимірну “паралельну” компоненту, $\mathbf{x}_{\parallel} \equiv \mathbf{z}$. Градієнтні оператори ∇_{\perp} і ∇_{\parallel} діють у підпросторах \mathbb{R}^{d-m} і \mathbb{R}^m , відповідно, а $\Delta_{\parallel} \equiv \nabla_{\parallel}^2$ є лапласіаном, що діє у паралельних до осей анізотропії напрямках. Член $(\Delta_{\parallel} \phi)^2$ є обертово симетричним в \mathbb{R}^m . Але, взагалі кажучи, ЕГ (6) дозволяє включення також і додаткових менш симетричних доданків четвертого порядку за похідними, які порушують ізотропію модуляційного підпростору \mathbb{R}^m при $m > 1$. Вплив таких доданків, і, зокрема, додаткових членів з кубічною симетрією буде розглядатися далі.

При розгляді критичної поведінки ЕГ (6) в околі ТЛ необхідно, щоб члени $(\nabla_{\perp} \phi)^2$ і $\sigma_0 (\Delta_{\parallel} \phi)^2$ поводити себе однаково в асимптотичному скейлінговому режимі. Відповідно модифікований аналіз вимірностей передбачає співвідношення

$$[m_0^2] = -2[r], \quad [z] = \frac{1}{2}[r] + \frac{1}{4}[\sigma_0], \quad [\phi] = -\frac{1}{2}[d^d x] + [r] = \frac{1}{2}(d - \frac{m}{2} - 2)[\mu] - \frac{m}{8}[\sigma_0],$$

$$[\rho_0] = 2[z/r] = -[r] + \frac{1}{2}[\sigma_0], \quad [u_0] = [\mu^{\varepsilon}] + \frac{m}{4}[\sigma_0], \quad \text{де} \quad [\mu] = -[r],$$

і μ — довільна величина імпульсу, що задає масштаб. Як завжди, вимірність константи зв'язку u_0 пов'язана з відхиленням ε вимірності простору d від верхньої граничної вимірності d^* : ми маємо $\varepsilon \equiv d^*(m) - d = 4 + m/2 - d$. Розмірний параметр $\sigma_0^{1/4}$ задає масштаб “вимірювання” відстаней у паралельному підпросторі. Його

класичною вимірністю $\epsilon [\sigma_0^{1/4}] = [z/r^{1/2}]$. Безрозмірна комбінація $v \equiv \sigma_0^{-1/4} z r^{-1/2}$ проявляється як аргумент скейлінгової функції Φ вільного пропагатора

$$G_0(\mathbf{x}) \equiv G_0(r, z) = r^{-2+\epsilon} \sigma_0^{-m/4} \Phi(v), \quad v = \sigma_0^{-1/4} z / \sqrt{r}. \quad (7)$$

Ефективний параметр розкладу $\bar{u}_0 \equiv u_0 \sigma_0^{-m/4}$ має звичну μ -вимірність $[\mu^\epsilon]$ і стає граничним при $d = d^*(m)$. Подібним чином нормоване поле $\phi(\mathbf{x}) \sigma_0^{m/8}$ стає безрозмірним у нижній граничній вимірності $d_\ell(m) = 2 + m/2$ моделей з неперервною обертовою $O(n)$ симетрією у випадку $n > 1$. Ми звертатимосся до епсилон-розкладу за малим відхиленням $\epsilon_\ell = d - d_\ell$ при розгляді $1/n$ -розкладу в розділі 6.

У повній, взаємодіючій теорії, анізотропна скейлінгова інваріантність передбачає, що парна кореляційна функція ϵ узагальненою однорідною функцією

$$G(r, z) = r^{-2\Delta_\phi} \Omega(z r^{-\theta}) = z^{-2\Delta_\phi/\theta} \hat{\Omega}(r z^{-1/\theta}) \quad (8)$$

де $\Delta_\phi = (d - m + \theta m - 2 + \eta_2) / 2$ — скейлінгова вимірність поля, η_2 — кореляційний критичний показник в ТЛ, аналог “малого” індекса Фішера η , а θ — індекс анізотропії. Ми показали дві альтернативні форми, і, для простоти запису, прийняли $\sigma := 1^{25}$. Перетворення Фур’є, визначені в кожному з підпросторів \mathbb{R}^{d-m} і \mathbb{R}^m ставлять у відповідність просторовим компонентам \mathbf{r} і \mathbf{z} перпендикулярні і паралельні імпульси \mathbf{p} і \mathbf{q} . Так, за аналогією до запису $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{z})$, в оберненому просторі ми маємо $\mathbf{k} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$, а для кореляційної функції —

$$G(p, q) = p^{-2+\eta_2} \Psi(q p^{-\theta}) = q^{-4+\eta_4} \hat{\Psi}(p q^{-1/\theta}), \quad \theta = (2 - \eta_2) / (4 - \eta_4). \quad (9)$$

Тут означений індекс анізотропії θ і з’являється ще один, *незалежний* кореляційний критичний показник ТЛ, η_4 , пов’язаний з перенормуванням параметра σ_0 .

В імпульсному представленні вільний пропагатор має, на перший погляд, відносно простий вигляд:

$$G_0(p, q) = (m_0^2 + p^2 + \rho_0 q^2 + \sigma_0 q^4)^{-1}.$$

Проте, четвертий степінь змінної $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ приводить до суттєвих труднощів у виконанні розрахунків навіть у безмасовій теорії з $m_0^2 = \rho_0 = 0$, тобто, безпосередньо в ТЛ.²⁶ Зокрема, в термінах такого пропагатора компактно записується однопетльовий інтеграл Фейнмана $I(p, q)$ (імпульсні інтеграли означені в (11)),

$$I(p, q) = \int_{\mathbf{q}'}^{(m)} \int_{\mathbf{p}'}^{(d-m)} \frac{1}{p'^2 + q'^4} \frac{1}{|\mathbf{p}' + \mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}' + \mathbf{q}|^4}; \quad I(1, 0) = \frac{F_{m,\epsilon}}{\epsilon} = \frac{c_{-1}}{\epsilon} + O(1). \quad (10)$$

Водночас, скейлінгова функція $\Phi(v)$ координатного представлення вільного пропагатора $G_0(r, z)$ з (7) є складною. Вона визначається фур’є-перетворенням

$$\Phi(v) = \int_{\mathbf{p}}^{(d-m)} \int_{\mathbf{q}}^{(m)} \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{1}e^{i\mathbf{q}\mathbf{v}}}}{p^2 + q^4}, \quad \text{де} \quad \int_{\mathbf{p}}^{(d-m)} \equiv \int_{\mathbb{R}^{d-m}} \frac{d^{d-m}p}{(2\pi)^{d-m}}, \quad \int_{\mathbf{q}}^{(m)} \equiv \int_{\mathbb{R}^m} \frac{d^m q}{(2\pi)^m} \quad (11)$$

²⁵ σ — результат перенормування параметра σ_0 у взаємодіючій теорії, $\sigma_0 = Z_\sigma \sigma$; Z_σ — Z -фактор РГ.

²⁶Цьому ми завдячуємо великою кількістю некоректних результатів, що з’явилися в літературі.

і записується в термінах функції Фокса-Райта (Fox-Wright)

$$\Phi(v) = \Phi(v; m, d) = C_\Phi \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{m}{4} + \frac{n}{2})} \left(-\frac{v^2}{4}\right)^n \quad \text{з} \quad C_\Phi = 2^{-2-m} \pi^{-\frac{d-1}{2}} \quad (12)$$

або як лінійна комбінація двох узагальнених гіпергеометричних функцій ${}_1F_2$. Але, оскільки вільний пропагатор має скейлінгове представлення (7), то полюси діаграм Фейнмана, які походять від сингулярностей на малих відстанях, можуть бути ізольовані тільки за рахунок степеня r (множник $r^{-2+\varepsilon}$ є аналогічним до $x^{-2+\varepsilon}$ у звичних ізотропних системах), а лишки цих полюсів представляються інтегралами від скейлінгової функції $\Phi(v)$. Завдяки цьому ключовому спостереженню, автору дисертації вперше вдалося отримати коректні вирази для критичних показників ТЛ з точністю до $O(\varepsilon^2)$.

Типовими результатами є:

$$\eta_2 = \frac{n+2}{(n+8)^2} \frac{2j_\phi(m)}{8-m} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad j_\phi(m) \equiv B_m \int_0^\infty dv v^{m-1} \Phi^3(v; m, d^*); \quad (13)$$

$$\eta_4 = -\frac{n+2}{(n+8)^2} \frac{j_\sigma(m)}{2m(m+2)} + O(\varepsilon^3), \quad j_\sigma(m) \equiv B_m \int_0^\infty dv v^{m+3} \Phi^3(v; m, d^*), \quad (14)$$

де $B_m = S_{4-\frac{m}{2}} S_m F_{m,0}^{-2}$, константа $F_{m,0}$ визначена формулою (10), а геометричний множник $S_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$ є площею поверхні сфери одиничного радіуса в просторі вимірності D .

Інтеграли в (13) і (14) не є повністю безнадійними в плані аналітичних розрахунків. Виходячи з цих загальних формул можливо показати, що в граничних випадках $m \rightarrow 0$ і $m \rightarrow d$ з інтервалу $0 \leq m \leq d$ відтворюються відомі ε -розклади другого порядку для критичних показників звичайної критичної точки з $\varepsilon = 4 - d$ та ізотропної ТЛ з $\varepsilon = 8 - d$. Цей факт є важливим аргументом на користь правильності отриманих результатів. Із загальних формул (13) і (14) можливо отримати явні вирази для критичних показників ТЛ у часткових випадках $m = 2$ і $m = 6$, які теж узгоджуються з деякими відомими результатами. Крім цього показано [17], що ε -розклади типу (13) і (14) узгоджуються з $1/n$ -розкладами, розглянутими в розділі 6, в їх спільній області застосовності.

Оскільки в доданку $(\Delta_{\parallel}\phi)^2$ ЕГ (6) ми маємо справу з четвертими степенями компонент просторових похідних, що діють на поля ϕ , ці похідні можуть формувати інваріанти з різними симетріями в \mathbb{R}^m . Тому тут, як і у формулі (1), де ми мали справу з двома різними комбінаціями компонент поля ϕ , можна додатково включити доданок $w_0 \sum_{\alpha=1}^m (\partial_\alpha^2 \phi)^2$, який порушує початково прийняту обертову симетрію в підпросторі модуляції \mathbb{R}^m . Наш додатковий член має кубічну симетрію і моделює присутність просторової анізотропії в твердих тілах, зумовленої їх кристалічною структурою.

За допомогою класичного аналізу стійкості системи в роботі [12] ми розраховували кросоверний показник $\phi_{\text{cub}} = C_{\text{cub}}(m; n)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$, пов'язаний з появою

додаткового доданка $\sim w_0$ в ЕГ (6). Як і в (13) і (14), функція $C_{\text{cub}}(m; n)$ включає в себе складний інтеграл від двох скейлінгових функцій. Чисельні значення коефіцієнтів $C_{\text{cub}}(m; n)$ при всіх n і цілих m від 2 до 6 є додатними. Це означає, що принаймні при незначних відхиленнях ε від верхньої граничної вимірності, кубічна анізотропія є суттєвим фізичним фактором, який може привести до значних змін у критичній поведінці в ТЛ.

У заключній частині розділу 4 ми розглянули напівбезмежні системи з m -вісною анізотропією, поверхня яких орієнтована перпендикулярно до одного з m напрямів модуляції. При звичайному переході, поля на “вільній” поверхні повинні задовольняти узагальненим асимптотичним граничним умовам Діріхле $\phi(\mathbf{r}; z = 0) = \partial_n \phi(\mathbf{r}; z)|_{z=0} = 0$. Достатньо визначити один з поверхневих показників, щоб через скейлінгові співвідношення отримати доступ до всіх решти. Ми розрахували критичний показник поверхневої намагніченості $\beta_{L1}^{\perp \text{ord}}$ з точністю до $O(\varepsilon)$. Для випадку ізінгівських ($n = 1$) одновісних ($m = 1$) систем проста екстраполяція ε -розкладу до $d = 3$ дає $\beta_{L1}^{\perp \text{ord}} = 0.31$, а апроксиманта Паде $[0,1]$ дає значення 0.59. Такий розкид даних є нормальним для лінійного наближення, тим більше при великому значенні $\varepsilon=3/2$. Величина 0.59 є дуже близькою до результату Монте Карло²⁷, 0.62(1). Таким чином, ми отримали правильну тенденцію до зменшення величини $\beta_{L1}^{\perp \text{ord}}$ від класичного значення 1 і задовільне узгодження з чисельним експериментом.

П’ятий розділ присвячений критичному перегляду т. зв. гіпотези локальної скейлінгової інваріантності (ГЛСІ), запропонованої М. Генкелем²⁸, яка представляє собою спробу формулювання аналога конформної інваріантності для систем з сильною анізотропією, і порівнянню її передбачень з розрахованими нами епсилон-розкладами для парних кореляційних функцій m -вісних анізотропних систем у ТЛ.

Добре відомо, що в масштабно-інваріантних теоріях в ізотропному просторі \mathbb{R}^d при однорідних змінах масштабу координат $\mathbf{x}' = \ell \mathbf{x}$ з постійним масштабним множником ℓ , локальні флуктуюючі величини (оператори) зі скейлінговими вимірностями $\Delta_{\mathcal{O}}$ перетворюються як $\mathcal{O}(\ell \mathbf{x}) = \ell^{-\Delta_{\mathcal{O}}} \mathcal{O}(\mathbf{x})$. При *конформних* перетвореннях із залежним від координат масштабним множником $\ell(x)$, попереднє правило перетворення узагальнюється до $\mathcal{O}[\ell(x)\mathbf{x}] = [\ell(x)]^{-\Delta_{\mathcal{O}}} \mathcal{O}(\mathbf{x})$. При розгляді *сильно анізотропних* систем в просторі $\mathbb{R}^{d-m} \oplus \mathbb{R}^m$, аналогом масштабної інваріантності стає (глобальна) *анізотропна* масштабна інваріантність, яка передбачає перетворення операторів $\mathcal{O}(\ell \mathbf{r}, \ell^\theta \mathbf{z}) = \ell^{-\Delta_{\mathcal{O}}} \mathcal{O}(\mathbf{r}, \mathbf{z})$, де різні просторові напрями — в \mathbb{R}^{d-m} і \mathbb{R}^m — масштабуються різними множниками, ℓ і ℓ^θ з $\theta \neq 1$ (це приводить до скейлінгових форм (8-9)). Конформної інваріантності в таких системах немає, і, питання, яке поставив Генкель, було: *яким є узагальнення конформної інваріантності на випадок сильно анізотропних систем, коли вони перебувають у критичному стані?*

²⁷M. Pleimling, Phys. Rev. B **65**, 184406 (2002).

²⁸Головною роботою Генкеля на цю тему є M. Henkel, Nucl. Phys. B **641**, 405 (2002).

Постулюючи ряд “аксіом локальної скейлінгової інваріантності”, Генкель записав набір локальних диференціальних генераторів перетворень координат, які певним чином узагальнюють відомі конформні перетворення на випадок d -вимірного анізотропного простору з одновісною анізотропією, $\mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^{d-1}$. Аналізуючи дію цих генераторів на кореляційні функції (8) він прийшов до висновку, що скейлінгові функції $\Omega(v)$ повинні задовольняти диференціальному рівнянню

$$(\alpha \partial_v^{N-1} - v^2 \partial_v - vN\Delta) \Omega^{(N)}(v) = 0 \quad \text{з} \quad \alpha \neq 0 \quad \text{і} \quad N \equiv 2/\theta \quad (15)$$

розглядаючи його на інтервалі $v \in [0, \infty)$ з граничними умовами (ГУ)

$$\Omega^{(N)}(0) = \omega_0^{(N)} \quad \text{і} \quad \Omega^{(N)}(v) \underset{v \rightarrow \infty}{\approx} \omega_\infty^{(N)} v^{-N\Delta}, \quad \text{де} \quad \omega_0^{(N)} \neq 0 \quad \text{і} \quad \omega_\infty^{(N)} \neq 0. \quad (16)$$

При цьому, якщо розглядаються натуральні числа N , що забезпечує цілочисельність порядків похідних ∂_v^{N-1} , то на індекс анізотропії θ вводиться обмеження. Для нього дозволяються тільки дробові значення $\theta_N \equiv 2/N$ з $N \in \mathbb{N}$, а відповідна скейлінгова функція Ω позначається індексом N . Коли $N = 4$, величина $\theta_4 = 1/2$ співпадає з індексом анізотропії θ вільної теорії m -вісних ТЛ. Як і в роботах Генкеля, ми розглядали виключно цілі значення чисел N , не вникаючи в проблематику узагальнення порядків похідних на нецілі величини.

Розв’язуючи диференціальне рівняння (15) з ГУ (16) безпосередньо в координатному просторі, Генкель отримав його загальний розв’язок у вигляді

$$\Omega^{(N)}(v) = \sum_{p=0}^{N-3} b_p^{(N)} \left[v^p \mathcal{F}_p(v) - a_p^{(N)} (\alpha/N^2)^{(p+2-N)/N} v^{N-2} \mathcal{F}_{N-2}(v) \right], \quad (17)$$

який включає $N - 2$ вільні параметри $b_p^{(N)}$ з $p = 0, \dots, N - 3$ і стільки ж відомих у явному вигляді констант $a_p^{(N)}$. Функції $\mathcal{F}_p(v)$ — це узагальнені гіпергеометричні функції

$$\mathcal{F}_p(v) \equiv {}_2F_{N-1} \left(\frac{N\Delta + p}{N}, 1; 1 + \frac{p}{N}, 1 + \frac{p-1}{N}, \dots, \frac{p+2}{N}; \frac{v^N}{N^{N-2}\alpha} \right)$$

Ми провели альтернативний аналіз диференціального рівняння (15). Застосовуючи нове інтегральне представлення його розв’язків і досліджуючи їх асимптотичну поведінку при великих аргументах ми показали, що розв’язки (17) задовольняють ГУ на $+\infty$ тільки при $N = 3, 4$ і 5 . У випадку $N = 6$, який є особливим, скейлінгова функція $\Omega^{(6)}$, задана формулою (17) з довільними коефіцієнтами $b_p^{(6)}$, $p = 0, \dots, 3$, не задовольняє заданій ГУ при $v \rightarrow \infty$, а навпаки — алгебраїчно розбігається в цій границі. Усунення цієї розбіжності зменшує кількість вільних параметрів в $\Omega^{(6)}$ з 4 до 3. При цілих $N \geq 7$, в $\Omega^{(N)}(v)$ залишаються експонентно зростаючі члени при великих v . Для їх ліквідації необхідно накладати додаткові обмеження на коефіцієнти $b_p^{(N)}$, що знов приводить до зменшення їх кількості.

Зокрема, при $N = 7$ загальний розв'язок рівняння (15), що задовольняє ГУ (16), повинен мати тільки три, а не п'ять констант інтегрування $b_p^{(7)}$. При $N = 4, 6$ і 7 правильні розв'язки повинні мати 1, 3 і 3 вільні параметри, а не 2, 4 і 5, як передбачив Генкель.

Крім цього, в контексті розгляду анізотропних систем з одновісною анізотропією в ТЛ, очевидним є те, що запропоновані рівняння повинні працювати в повному d -вимірному просторі $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ з одновимірною змінною $z \in]-\infty, \infty[$. При цьому немає підстав обмежувати змінну z тільки додатньою піввіссю, як це було зроблено Генкелем при розгляді рівняння (15) в термінах одновимірної "часової" змінної t , що привело в ньому до обмеження $v \geq 0$. Таким чином, початкові рівняння, що виражають ГЛСІ, можна розв'язати за допомогою перетворення Фур'є, що приводить до результату

$$G(p, q) = [p^2 + 4\alpha N^{-2}(iq)^N]^{-\tilde{\Delta}} \quad \text{з} \quad \tilde{\Delta} = \frac{1}{N} - \Delta + \frac{d-1}{2}$$

і $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_\beta^{d-1}$, $q \in \mathbb{R}$ для Фур'є-образу $G(p, q)$ кореляційної функції $G(r, z)$ з (8).

Для подальшого порівняння передбачень ГЛСІ з результатами теорії, яка явно враховує взаємодії та флуктуації, ми виконали в рамках теоретико-польової моделі (6) і епсилон-розкладу розрахунки парних кореляційних функцій (параметр порядку)-(параметр порядку) та енергія-енергія, $\langle \phi\phi \rangle$ і $\langle \frac{1}{2}\phi^2 \frac{1}{2}\phi^2 \rangle$. В імпульсному представленні величина, обернена до кумулянтного середнього $\langle \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \phi_{-\mathbf{p}, -\mathbf{q}} \rangle_{\text{con}}$, має вигляд

$$[G_R(p, q)]^{-1} = Z_\phi [G(p, q)]^{-1} = Z_\phi [p^2 + \sigma_0 q^4 - \bigcirc + O(\varepsilon^3)]. \quad (18)$$

Насправді, діаграмний розклад (18) вже опрацьовувався в попередньому розділі для виводу кореляційних критичних показників η_2 і η_4 . З точністю до стандартних комбінаторних множників, двопетльовій діаграмі з (18) відповідає функція зовнішніх імпульсів $p^{2-2\varepsilon} I_3(s)$, де $s = \sigma_0^{1/4} q / \sqrt{p}$, а інтеграл Фейнмана²⁹

$$I_3(s) = \int d^{d-m} r \int d^m z G^3(r, z) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} e^{isz} |_{p=1} = \varepsilon^{-1} (c_2 + c_4 s^4) + R_0^{(3)}(s) + O(\varepsilon). \quad (19)$$

Коефіцієнти c_2 і c_4 полюсних членів у (19) (саме про них йшла мова на стор. 17) визначають величини кореляційних критичних показників η_2 і η_4 з (13) і (14). Ці полюсні члени віднімаються в ході стандартного перенормування функції $G^{-1}(p, q)$, при чому залишається скінченна частина $R_0^{(3)}(s)$ інтеграла $I_3(s)$, і саме вона цікавитиме нас у подальшому.

У ТЛ перенормована функція $G_R^{(2)}(p, q)$ має загальний вигляд (9), і з формул (18-19) отримується

$$\Psi^{-1}(\mathbf{k}) = 1 + \mathbf{k}^4 - 2\varepsilon^2 \frac{n+2}{(n+8)^2} R_0^{(3)}(\mathbf{k}) + O(\varepsilon^3) \quad \text{де} \quad \mathbf{k} = qp^{-\theta}. \quad (20)$$

²⁹ Функція $I(p, q)$ з (10) визначається аналогічним інтегралом з $G^2(r, z)$ в підінтегральній функції.

Скейлінгова змінна k відрізняється від її аналога $s = \sigma_0^{1/4} q / \sqrt{p}$ з (19) тим, що при визначенні k в нормування хвильового вектора q увійшов перенормований параметр σ , а в степені імпульса p з'явилася нетривіальна поправка до класичного значення $1/2$, яка міститься в індексі анізотропії θ .

Загальний вираз для $R_0^{(3)}(k)$ при довільному m наведений в [S. Rutkevich, та ін., Nucl. Phys. B **853**, 210 (2011) Erratum, (5.16)], він виправляє неправильну формулу [20, (5.16)]. Сюди входить ряд складних інтегралів із степенями скейлінгової функції $\Phi(v; m, d^*)$ з (11), подібних до тих, що фігурують в (13) і (14). Розрахувати такі інтеграли для довільних m в явному вигляді нереально. Тому для отримання явних результатів слід звернутися до розгляду часткових випадків.

Математичні спрощення відбуваються в околі граничної точки ($m = 2, d = d^* = 5$), причому ε -розклади можна проводити у двох різних напрямках (m, d)-площини: вздовж лінії $m = 2$ (при цьому $d = 5 - \varepsilon$) і лінії $d = m + 3$ (у цьому випадку зберігаються співвідношення $m = 2 - 2\varepsilon$ і $d = 5 - 2\varepsilon$) — див. Рис. 2. При $d = 3 + m$, завдяки максимальному спрощенню скейлінгової функції $\Phi(v; m, d)$ з (11), ми отримали безпосередньо з (19) відносно простий вираз

$$R_0^{(3)}(k)|_{d=m+3} = \frac{1}{27} \left(5 - 3 \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{k^4}{3} - 1 \right) - \frac{2}{9} \operatorname{Im} \left[\left(\frac{k^2}{3} + i \right)^3 \ln \left(\frac{k^2}{3} + i \right) \right].$$

Деякі складніші розрахунки при фіксованому $m = 2$ дають

$$R_0^{(3)}(k)|_{m=2} = R_0^{(3)}(k)|_{d=3+m} + \frac{2}{9} \left(1 + \ln \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{k^4}{3} - 1 \right). \quad (21)$$

Результати різні, тому що були враховані відмінності поведінки скейлінгової функції $\Phi(v; m, d)$ в околі $d = d^*$, в залежності від того, в якому напрямку (m, d)-площини ми виконуємо ε -розклад. Така залежність від напрямку ε -розкладу спостерігалася вперше.³⁰

У шостому розділі ми повертаємося до розрахунку критичних показників ТЛ, але вже без залучення ε -розкладу. На відміну від розділу 4, тут ми застосовуємо розклад за оберненими степенями великого числа компонент параметра порядку n . Цей альтернативний підхід не потребує епсилон-розкладів за відхиленнями від граничних вимірностей; в цьому його велика перевага і схожість з масивною теорією поля. Він придатний для роботи в будь-яких вимірностях простору між верхньою і нижньою граничними. У застосуванні до ТЛ, це дає змогу

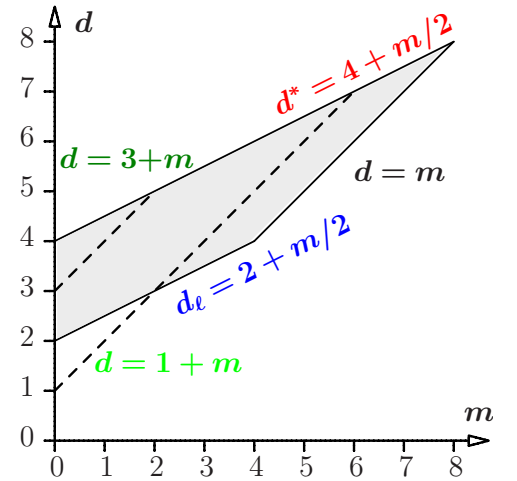


Рис. 2. Область застосування $1/n$ -розкладу

³⁰На рівні двопетельового наближення залежності критичних показників від “напрямів” ε -розкладу немає, оскільки у відповідних інтегралах не з’являються похідні скейлінгових функцій за ε при $d = d^*$ — див. (13), (14).

прослідковувати залежності критичних показників від вимірності d в цілій смузі між лініями граничних вимірностей $d^* = 4 + m/2$ і $d_\ell = 2 + m/2$ з врахуванням очевидного фізичного обмеження на кількість осей анізотропії, $0 \leq m \leq d$ — див. Рис. 2.

З використанням рівнянь самоузгодження типу Швінгера-Дайсона нам вдалося знайти в загальному вигляді перші нетривіальні поправки порядку $1/n$ для двох незалежних кореляційних критичних показників η_2 і η_4 , і пов'язаного з ними індекса анізотропії θ , а також критичних показників кореляційних довжин, ν_2 і ν_4 , і основних термодинамічних функцій, α_L , β_L , і γ_L .

$1/n$ -розклади для η_2 , η_4 і θ , подібно як і для всіх інших показників, формально записуються у вигляді

$$\eta_2 = \frac{\eta_2^{(1)}}{n} + O(n^{-2}), \quad \eta_4 = \frac{\eta_4^{(1)}}{n} + O(n^{-2}) \quad \text{і} \quad \theta = \frac{1}{2} + \frac{\theta^{(1)}}{n} + O(n^{-2}); \quad (22)$$

головними результатами для коефіцієнтів $\eta_2^{(1)}$ і $\eta_4^{(1)}$ є інтегральні представлення

$$\eta_2^{(1)} = \frac{2K_{d-m}}{d-m} \int_q^{(m)} \frac{4 - (d-m)(1+q^4)}{(1+q^4)^3 I(1, q)}, \quad \eta_4^{(1)} = \frac{2K_m}{m(m+2)} \int_p^{(d-m)} \frac{\mathcal{P}_2(p^2)}{(p^2+1)^5} \frac{1}{I(p, 1)}, \quad (23)$$

де в знаменниках підінтегральних функцій фігурує однопетльовий інтеграл (10). Для індекса анізотропії, згідно з (9), маємо $\theta^{(1)} = -\eta_2^{(1)}/4 + \eta_4^{(1)}/8$.

Складність інтегралів не дозволяє їх розрахунку в загальному вигляді, але, не дивлячись на це, з наших інтегральних представлень було отримано багато корисної і цікавої інформації. Явні вирази для критичних показників вдалося знайти тільки в деяких часткових випадках — для окремих точок (m, d) -площини $(1, 4)$ і $(4, 5)$, які належать лініям $d = 3 + m$ і $d = 1 + m$, зображеним на Рис. 2. У фізичному випадку $m = 1$, $d = 3$ ми отримали вираз для $I(p, q)$ в термінах гіпергеометричної функції Гауса ${}_2F_1$, але це дало спрощення тільки в подальшому чисельному інтегруванні.

Для підтвердження правильності результатів ми перевірили їх у чотирьох різних граничних режимах. При $m = 0$ і $m = d$ відтворюються відомі $1/n$ -розклади показників для звичайної критичної точки та ізотропної ТЛ з довільними d , допустимими для цих випадків. При малих відхиленнях ε і ε_ℓ від верхньої і нижньої граничних вимірностей $d^*(m)$ і $d_\ell(m)$ є узгодження з епсилон-розкладами для m -вісних ТЛ з довільним m . Це особливо важливо, зважаючи на кількість неправильних результатів і дикусій в літературі — див. [6, 8, 11].

Найважливішим з точки зору статистичної фізики є випадок одновісної анізотропії $m = 1$ в реальному тривимірному просторі $d = 3$. Але нажаль, при цих значеннях параметрів теорія виявляється надто складною для аналітичних розрахунків. Ми повернемося до цієї ситуації згодом. А поки що розглянемо ті випадки, де математичні спрощення дозволяють отримати певні результати в аналітичному вигляді.

Частковий випадок $m = 1$, $d = 4$ має відношення до до т. зв. квантових теорій поля з порушенням Лоренцівської інваріантності. За аналогією з задачами статистичної фізики, в цих теоріях вводиться анізотропія між часовою і просторовими координатами, а інколи також і між самими просторовими напрямками³¹ Це порушує симетрію Лоренца в таких теоріях поля, і тому їх часто називають “Lorentz violating (LV) theories”. У цьому контексті робота Ансельмі^{31†} дає явні розрахунки і результати, які у випадку скалярних полів є повністю аналогічними до представлених у наших роботах [13] і [21] при $m = 1$, $d = 4$ і $n \rightarrow \infty$. Як деталі розрахунків, так і результати можна порівняти.

Точка $(m, d) = (1, 4)$ належить лінії $d = 3 + m$, див. Рис. 2. На цій лінії суттєво спрощується функціональна форма вільного пропагатора ТЛ у прямому просторі (12). Теорія спрощується і в імпульсному представленні. Функція $I(p, q)$ з (10), в знаменниках (23), легко визначається з формули типу (19)²⁹, $I(1, q) = \sqrt{\sqrt{q^4 + 4} - q^2} / (8\pi\sqrt{2})$, і ми без проблем отримуємо критичні показники парної кореляційної функції та індекс анізотропії у явному вигляді:

$$\eta_2 = \frac{5}{9\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n} + O(n^{-2}), \quad \eta_4 = -\frac{2}{27\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n} + O(n^{-2}), \quad \theta = \frac{1}{2} - \frac{4}{27\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n} + O(n^{-2}). \quad (24)$$

Звідси $\eta_2 = 0.102/n + O(n^{-2})$ і $\eta_4 = -0.014/n + O(n^{-2})$. Наші результати для η_2 і η_4 з (24) (в інших позначеннях) були відтворені в^{31†}. Крім цього, для оберненого критичного показника кореляційної довжини ТЛ ми отримуємо

$$\nu_2^{-1}(m = 1, d = 4) = \frac{3}{2} + \frac{301}{54\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n} + O(n^{-2}). \quad (25)$$

Способи розрахунку і результати були співставлені з їх аналогами з роботи^{31†}. Але для даного часткового випадку з $m = 1$ і $d = 4$ наші результати виводяться з надійно апробованих формул, справедливих для всіх фізично допустимих значень параметрів теорії m і d . Очевидно, неузгодження (25) з даними^{31†} з певністю вказує на помилку в цій роботі.

На відміну від (25), для тривимірних систем з одновісною анізотропією результати можливо отримати тільки чисельно. Наприклад,

$$\begin{aligned} \eta_2 &= 0.306/n + O(n^{-2}), & \nu_2 &= 2 - 1.274/n + O(n^{-2}), & \nu_2^{-1} &= \frac{1}{2} + 0.319/n + O(n^{-2}) \\ \eta_4 &= 0.223/n + O(n^{-2}), & \nu_4 &= 1 - 0.734/n + O(n^{-2}), & \nu_4^{-1} &= 1 + 0.734/n + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Аналогічні $1/n$ -розклади записані і для декількох інших показників.

Як зауважили Есафі, Ковнацкі і Муана³², чисельні значення критичних показників ν_2 і ν_4 , що отримуються з наведених $1/n$ -розкладів для випадку гайзенбергівських спінових моделей з $n = 3$, а саме $\nu_2(d = 3, m = 1; n = 3) = 1.575$ і

³¹ Anselmi, M. Halat, Phys Rev. D **76**, 125011 (2007), [†]D. Anselmi, JHEP **2**, 051 (2008); див. також огляди в A. Wang, Int. J. Mod. Phys. D, 1730014 (2017) і [21].

³²K. Essafi, J.-P. Kownacki, D. Mouhanna, EPL **98**, 51002 (2012).

$\nu_4(d = 3, m = 1; n = 3) = 0.755$, хоч і не є близькими до аналогічних результатів епсилон-розкладу, зате дуже добре узгоджуються з оцінками $\nu_2(d = 3, m = 1; n = 3) = 1.655(5)$ і $\nu_4(d = 3, m = 1; n = 3) = 0.78(1)$, отриманими цими авторами за допомогою наближеного розв'язування точних рівнянь ренормалізаційної групи. Для порівняння, більша кількість чисельних оцінок критичних показників ТЛ, отриманих різними способами, наведена в Табл. 4.2 дисертаційної роботи.

При великих n , наші загальні результати дали можливість якісно прослідкувати залежності критичних показників m -вісних ТЛ від вимірності простору d в цілій області їх визначення (див. Рис. 2) між лініями граничних вимірностей $d^*(m) = 4 + m/2$ і $d_\ell(m) = 2 + m/2$, що принципово не є можливим в розкладах за степенями малих відхилень d від кожної з цих граничних ліній.

Головні порядки епсилон-розкладів біля $d^*(m)$ і $d_\ell(m)$ задають обов'язкові напрями відхилень критичних показників від їх класичних значень, як зображено суцільними лініями на краях Рис. 3. При більших відстанях вимірності простору d від цих ліній ми маємо результати $1/n$ -розкладів, отримані безпосередньо для конкретних значень m і d , позначені хрестиками і кільцями.³³

Схематичні з'єднання цих відрізків і точок дають нам якісне уявлення про залежності кореляційних критичних показників η_2 і η_4 від вимірності d при великих n . Окреслюючи криві на Рис. 3 ми виходили з фізично, а також математично, найбільш ймовірного припущення щодо гладкої і неперервної зміни цих спостережуваних величин із зміною d .

Таким чином ми прийшли до важливого висновку про те, що характерний для анізотропних ТЛ показник η_4 повинен міняти свій знак при переході від вищих до нижчих вимірностей простору, будучи досить складною немонотонною функцією від d . Ми передбачаємо додатне значення η_4 у фізичній вимірності простору $d = 3$, тоді як головний внесок ε -розкладу в η_4 є від'ємним. Натомість, критичний показник поперечних кореляцій η_2 виявляє поведінку досить стандартного типу і зберігає свій додатний знак у всій області визначення.

Передбачена нами в [13] якісна поведінка критичних показників згодом була підтверджена в роботі³² (рис. 1) з використанням зовсім інших методів і міркувань, а саме — розв'язування точних рівнянь ренормалізаційної групи для ТЛ.

Заключний **сьомий розділ** представляє дослідження флуктуаційно-індукованих сил, що з'являються в просторово обмежених статистичних системах при посередництві далекосяжних флуктуацій, які виникають при критичній температурі.

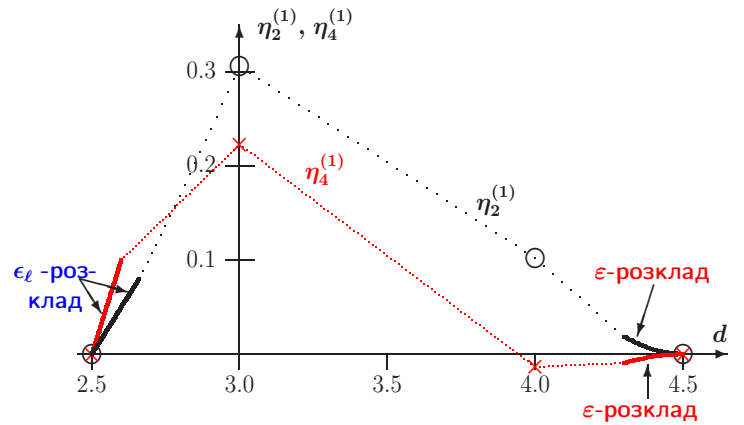


Рис. 3. Схематичні залежності від d коефіцієнтів $1/n$ -розкладів (22) при $m = 1$

³³Конкретні значення $\eta_2^{(1)}$ і $\eta_4^{(1)}$ при $m = 1$ і $d = 4, 3$ наведені на попередній сторінці.

Величина цих сил визначається т. зв. амплітудами Казимира. Назва ефекту походить від імені датського фізика, який у 1948 р. показав, що паралельні провідні пластини у вакуумі *взаємодіють* завдяки нульовим вакуумним флуктуаціям електромагнітного поля.³⁴ В статистичну фізику ефект Казимира “прийшов” завдяки роботам Фішера і де Жена 1978 р.^{34†} і Симанзіка 1981 р.^{34‡} Останній показав, що аналог ефекту Казимира існує в безмасовій (супер)перенормовній квантовій теорії поля з взаємодією ϕ^4 в просторі вимірності $d = 4 - \varepsilon$ і геометрією плівки $\infty^{d-1} \times L$. Відповідним узагальненням ЕГ (5) є

$$\mathcal{H}[\phi] = \int_0^L dz \int d^{d-1}r \mathcal{L}_{\text{bulk}}(\phi) + \frac{1}{2} \int d^{d-1}r \left[c_0^{(0)} |\phi(\mathbf{r}, 0)|^2 + c_0^{(L)} |\phi(\mathbf{r}, L)|^2 \right], \quad (26)$$

де інтегрування об’ємної частини обмежене зверху товщиною плівки L і з’являється відповідний додатковий поверхневий член, а в $\mathcal{L}_{\text{bulk}}(\phi)$ містяться ті ж самі доданки, що й в об’ємному інтегралі з (5). Різні параметри c_0 в (26) контролюють локальні поверхневі взаємодії при $z = 0$ і $z = L$, відповідно, де ми можемо встановлювати різні ГУ $\{a, b\}$. При розгляді періодичних ГУ поверхневі доданки в (26) не використовуються.

На основі ЕГ (26) в роботі³⁵ амплітуди Казимира були знайдені для декількох різних ГУ у наближенні $O(\varepsilon)$. Ця робота дала поштовх до появи великої кількості теоретичних, експериментальних і чисельних досліджень, але в жодному з них ці амплітуди не були розраховані у вищому порядку $O(\varepsilon)$ -розкладу до виходу нашої роботи [15].

Інтуїтивно, випадок періодичних ГУ здається найпростішим, оскільки він зберігає трансляційну інваріантність вздовж осі z . Але при накладанні цих, а також спеціальних ГУ, ми стикаємося з проблемою безмасовості нульової моди при $T = T_c$, що призводить до появи неконтрольованих інфрачервоних розбіжностей в певних класах діаграм Фейнмана. Внаслідок цього ε -розклад амплітуд Казимира втрачає аналітичність за межами наближення $O(\varepsilon)$. Тут ми виявили поправку порядку $O(\varepsilon^{3/2})$ і знайшли коефіцієнт цієї нової поправки у явному вигляді. В загальному, ε -розклади таких амплітуд, крім цілих степенів ε , включають *нецілі* степені $\varepsilon^{k/2}$ з $k \geq 3$, а також степені $\ln \varepsilon$.

Для отримання амплітуд Казимира необхідно розраховувати надлишкову вільну енергію $f_{\text{res}}^{a,b}(L)$, яка визначається з густини вільної енергії плівки на одиницю площі

$$f_L \equiv \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{F}{Ak_B T} = L f_\infty + f_s^a + f_s^b + f_{\text{res}}^{a,b}(L).$$

Тут F — повна вільна енергія системи в шарі товщини L , A — площа $(d - 1)$ -вимірних гіперповерхонь, якими ця система обмежена, f_∞ — густина вільної енергії

³⁴ H.B.G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **B51**, 793 (1948), [†]M.E. Fisher, P.-G. de Gennes, C.R. Acad. Sci. Paris Série B **287**, 207 (1978), [‡]K. Symanzik, Nucl. Phys. B **190**, 1 (1981).

³⁵ M. Krech, S. Dietrich, Phys. Rev. Lett. **66**, 345 (1991), [Erratum **67**, 1055 (1991)]; Phys. Rev. A **46**, 1886 (1992).

безмежної системи на одиницю об'єму, і $f_s^a + f_s^b$ — густина поверхневих вільних енергій на одиницю площі. Індexами a, b позначаємо як самі поверхні, так і ГУ, вибрані на кожній з них. Згідно з теорією скінченновимірною скейлінгу^{34†}, для достатньо великих відстаней L надлишкова вільна енергія $f_{\text{res}}^{a,b}(L)$ має скейлінгову форму

$$f_{\text{res}}^{a,b}(L) \approx L^{-(d-1)} \Theta_{a,b}(L/\xi_\infty).$$

Тут $\Theta_{a,b}(x)$ — універсальна скейлінгова функція, форма якої залежить від об'ємного класу універсальності системи, її геометрії і типів поверхонь, а ξ_∞ — об'ємна кореляційна довжина. Коли температура плівки співпадає з критичною температурою *безмежної* системи T_c і об'ємна кореляційна довжина ξ_∞ стає безмежною,³⁶ скейлінгова функція $\Theta_{a,b}(x)$ дає амплітуду Казимира, $\Delta^{a,b} \equiv \Theta_{a,b}(0)$. Вона теж універсальна, тобто залежить тільки від найважливіших загальних характеристик системи і ГУ на поверхнях, і пропорційна до величини флуктуаційно індукованої сили

$$\frac{\mathcal{F}_C}{k_B T_c} = -\frac{\partial}{\partial L} f_{\text{res}}^{a,b}(L; T = T_c) = (d-1) \Delta^{a,b} L^{-d}. \quad (27)$$

Від'ємні $\Delta^{a,b}$ відповідають силам притягання.

У практичних розрахунках на основі ЕГ (26) потрібно мати справу з діаграмними розкладами вільної енергії плівки, які мають звичайний вигляд (4). Розгляньмо третю діаграму цього розкладу. Її внутрішній елемент \bigcirc в об'ємному випадку $L = \infty$ поводить себе як $(m_0^2)^{-\varepsilon/2}$, і, отже, є сингулярним в інфрачервоній області при $m_0^2 = 0$, тобто при $T = T_c$. Але при $L = \infty$ дві інші замкнені петлі вносять множники $\sim (m_0^2)^{1-\varepsilon/2}$, і границя $m_0^2 \rightarrow 0$ для всієї діаграми зникає.

Натомість, коли $L < \infty$, внески від кожної з зовнішніх петель є скінченними при $m_0^2 \rightarrow 0$. Зокрема, для випадку періодичних ГУ

$$\bigcirc = \lim_{m_0^2 \rightarrow 0} \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbf{p}}^{(d-1)} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{2\pi}{L}n\right)^2 + m_0^2} - \int_{\mathbf{k}}^{(d)} \frac{1}{k^2 + m_0^2} = \frac{\Gamma(1 - \varepsilon/2)}{2\pi^{2-\varepsilon/2}} \frac{\zeta(2 - \varepsilon)}{L^{2-\varepsilon}},$$

де $\zeta(a)$ — ζ -функція Рімана, а внутрішня частина

$$\bigcirc = \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbf{p}}^{(d-1)} \left[p^2 + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n^2 + m_0^2 \right]^{-2} \sim (m_0^2)^{-(1+\varepsilon)/2}.$$

Разом із скінченними внесками від зовнішніх кілець вона спричинює розбіжність трипетльової діаграми, яку ми розглядаємо, при $m_0^2 \rightarrow 0$. Подібним чином розбігаються і діаграми вищих порядків теорії збурень з більше ніж двома точками

³⁶ При цьому в самій плівці фазовий перехід не відбувається. Критична температура $(d-1)$ -вимірною переходу в обмеженій системі, $T_c^{(L)}$, відрізняється від $T_c = T_c^{(\infty)}$.

на лініях. Це робить стандартну теорію збурень поза першим порядком за константою зв'язку, разом і з відповідним ε -розкладом, незастосовними. *Потрібна її реорганізація.*

Одним з виходів може бути сумування безмежних рядів кільцевих діаграм Фейнмана $\bigcirc\bigcirc\bigcirc$. Такий підхід широко застосовувався в температурній теорії поля при розрахунку *тиску*,¹² аналога амплітуди Казимира.

Ключовою ідеєю нашої роботи [15], яка забезпечила систематичний підхід до проблеми, є виділення небезпечної нульової моди і утворення пов'язаного з нею ефективного гамільтоніана $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(d-1)}$ шляхом відінтегровування ненульових мод, подібно як це робиться при розгляді безмежних систем при температурах нижчих за критичну чи в теорії скінченновимірного скейлінгу. В результаті такого відінтегровування нульова мода стає *масивною* при $T = T_c$ для обмеженої системи з товщиною $L < \infty$, як це і повинно бути³⁶. Подальший розрахунок надлишкової вільної енергії проводиться в новій, ефективній $(d-1)$ -вимірній теорії поля на основі ефективного гамільтоніана $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(d-1)}$. Остаточним результатом є вирази

$$\Delta^{\text{per}} = 2^{4-\varepsilon} \Delta^{\text{ord}} - \frac{\pi^2 n}{9\sqrt{6}} \left(\frac{n+2}{n+8} \varepsilon \right)^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon^2), \quad \Delta^{\text{sp}} = \Delta^{\text{ord}} - \frac{\pi^2 n}{72\sqrt{6}} \left(\frac{n+2}{n+8} \varepsilon \right)^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon^2) \quad (28)$$

де Δ^{ord} — амплітуда Казимира плівки з вільними ГУ^{34†,35},

$$\Delta^{\text{ord}} = -\frac{\pi^2 n}{1440} \left[1 + \left(\frac{C_E - 1}{2} + \ln(2\sqrt{\pi}) - \frac{\zeta'(4)}{\zeta(4)} - \frac{5n+2}{4n+8} \right) \varepsilon \right] + O(\varepsilon^2), \quad (29)$$

$C_E \approx 0.5772$ — константа Ейлера. Принципово нові члени порядку $O(\varepsilon^{3/2})$ походять від внесків $\sim u_0^{(3-\varepsilon)/2}$. Очевидно, останні передбачають також наявність членів типу $\varepsilon^{k+3/2} \ln^k \varepsilon$ з $k \in \mathbb{N}$ у вищих порядках ε -розкладів для амплітуд Казимира. Крім цього, опущені члени порядку $u_0^{2-\varepsilon}$ приведуть до появи доданків $\sim \varepsilon^{k+2} \ln^k \varepsilon$.

В *сильно анізотропних* системах флуктуаційно індуковані сили відрізняються як кількісно, так і якісно. Зокрема, вони набувають залежності від орієнтації поверхонь відносно напрямів осей анізотропії, як і у випадку напівбезмежних систем, розглянутих наприкінці розділу 4. Подібно як і в (27), для даного середовища і типу поверхонь, в границі $L \rightarrow \infty$ надлишкова вільна енергія спадає як $f_{\text{res}}(L) \sim \Delta_{\lambda}^{\text{a,b}} L^{-\zeta_{\lambda}}$, $\lambda = \{\parallel, \perp\}$. Але зараз потрібно розрізняти дві принципово різні геометрії: “паралельну”, коли поверхні є паралельними до всіх m напрямів осей модуляції, і “перпендикулярну”, коли поверхні є перпендикулярними до одного з цих напрямів. Відповідними показниками спадання є [19] $\zeta_{\parallel} = d - m + \theta m - 1$ і $\zeta_{\perp} = (d - m)/\theta + m - 1$, відрізняються між собою і амплітуди Казимира $\Delta_{\lambda}^{\text{a,b}}$ з $\lambda = \parallel$ і \perp .

При *паралельній* орієнтації поверхонь з періодичними ГУ і ГУ Діріхле нашими результатами ε -розкладів для амплітуд Казимира є

$$\Delta_{\parallel\text{LP}}^{\text{per}} = C_m \Delta^{\text{per}} + o(\varepsilon^{3/2}), \quad \Delta_{\parallel\text{LP}}^{\text{ord}} = C_m \Delta^{\text{ord}} + O(\varepsilon^2), \quad \text{з } \varepsilon = 4 + m/2 - d.$$

Тут Δ^{per} і Δ^{ord} — відомі ε -розклади амплітуд Казимира ізотропних плівкових систем з (28) і (29), де $\varepsilon = 4 - d$ слід замінити на $\varepsilon = 4 + m/2 - d$, а $C_m = 2^{-m} \pi^{(2-m)/4} \Gamma[(m+2)/4]$. Подібне співвідношення між амплітудами Казимира справедливе і для сферичної моделі з $n = \infty$:

$$\Delta_{\parallel\text{LP},\infty}^{\text{BC}}(d, m) = C_m \Delta_{\text{CP},\infty}^{\text{BC}}(d - m/2), \text{ BC}=\{\text{per}, \text{ord}\} \text{ при } 2+m/2 \leq d \leq 4+m/2.$$

У випадку *перпендикулярної* орієнтації і періодичних ГУ перші два члени ε -розкладу амплітуди Казимира $\Delta_{\perp\text{LP}}^{\text{per}}$ мають вигляд, подібний до (29), але з додатковою залежністю від числа осей анізотропії m . Для роботи з вищими порядками за ε тут теж потрібна аналогічна реорганізація теорії збурень. Проте, є неприємна проблема з остаточним результатом: коефіцієнт $a_{7/4}(m, n) \sim [(m-2)/4]^{7/4}$ при степені $\varepsilon^{7/4}$, що тут виникає, виявився комплексним у важливому випадку $m = 1$. Це робить новий внесок $\sim (-1/4)^{7/4} \varepsilon^{7/4}$ в ε -розклад $\Delta_{\perp\text{LP}}^{\text{per}}$ непридатним.

У технічно найскладнішому випадку перпендикулярної орієнтації і вільних ГУ ми обмежилися розглядом гаусового наближення, отримали інтегральні представлення для відповідних амплітуд Казимира і деякі чисельні результати. Розрахунок поправок порядку $O(\varepsilon)$ залишається цікавою задачею для майбутнього. Певні підготовчі роботи, проведені нами в роботі [24], описані в заключному параграфі дисертації.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі виконано ряд узагальнень відомих теоретико-польових підходів до дослідження критичних явищ у просторово неоднорідних системах:

- масивна теорія поля Парізі при фіксованих вимірностях простору застосована при *нецілих* вимірностях d , а також до дослідження *критичних амплітуд* неупорядкованих ізінгівських систем
- сформульоване узагальнення цієї теорії на випадок *напівбезмежних* систем у довільних вимірностях простору d
- запропоновано новий систематичний підхід до розрахунку ε -розкладів критичних показників і кореляційних функцій в точці Ліфшица (ТЛ)
- сформульовано ренормгруповий опис напівбезмежних анізотропних систем з поверхнею, перпендикулярною до однієї з осей анізотропії
- проаналізована гіпотеза локальної скейлінгової інваріантності (ГЛСІ) Генкеля, визначені межі її застосовності
- $1/n$ -розклад за великою кількістю компонент параметра порядку успішно сформульований і застосований при наявності просторової анізотропії
- шляхом реорганізації теорії збурень розв'язана проблема неконтрольованих інфрачервоних розбіжностей в ε -розкладах амплітуд Казимира.

Отримано наступні результати та зроблено наступні висновки:

1. Виведено явні вирази для двопетльових функцій ренормалізаційної групи при довільних вимірностях простору d . Побудовано плавні залежності критичних показників неупорядкованих ізінгівських систем від вимірності d .
2. Розраховані універсальні комбінації критичних амплітуд неупорядкованої моделі Ізінга і відношення їх величин при $T > T_c$ і $T < T_c$. Зроблено висновок про те, що теоретичне значення відношення амплітуд теплоємності A_+/A_- при $d = 3$ може бути додатнім всупереч передбаченням $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу.
3. Виконані двопетльові розрахунки поверхневих критичних показників звичайного та спеціального переходів при $d = 3$. Зроблено висновок про те, що неупорядкованість поверхні не впливає на особливості спеціального переходу, а об'ємний безпорядок змінює показники звичайного переходу.
4. Отримані коректні ε -розклади критичних показників ТЛ з довільною кількістю осей анізотропії у порядку $O(\varepsilon^2)$ і зроблено висновок про те, що в нетривіальній взаємодіючій теорії показник анізотропії є неklasичним. Виявлено та проаналізовано помилки інших авторів в аналогічних розрахунках.
5. Поставлена задача про вплив кристалічної структури на критичну поведінку m -вісних ТЛ і показано, що анізотропія підпростору модуляції може бути причиною зміни характеру фазового переходу в ТЛ.
6. Отримані неklasичні поверхневі показники звичайного переходу в напівбездмежних сильно анізотропних системах з поверхнею, перпендикулярною до однієї з осей анізотропії.
7. Виявлено ряд неточностей в математичних формулюваннях ГЛСІ. Отримано нову інформацію стосовно математичної структури і явного вигляду парних кореляційних функцій систем з одновісною анізотропією в ТЛ.
8. Знайдено поправки порядку $1/n$ для кореляційних і термодинамічних показників ТЛ з довільною кількістю осей анізотропії. Встановлено узгодження з відомими результатами в чотирьох різних граничних режимах. Зроблений висновок про те, що кореляційний критичний показник η_4 змінює свій знак при зміні вимірності простору d .
9. Виявлена неаналітичність ε -розкладу амплітуд Казимира плівкових систем з періодичними і спеціальними граничними умовами, в явному вигляді знайдено поправки $O(\varepsilon^{3/2})$ для цих амплітуд.
10. Аналогічні результати отримані для просторово обмежених *анізотропних* систем, по різному орієнтованих між двома паралельними поверхнями. Показано, що флуктуаційно індуковані сили залежать від просторової орієнтації граничних поверхонь відносно напрямів осей анізотропії.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ

1. Holovatch, Yu. Critical exponents of random Ising-like systems in general dimensions / Holovatch, Yu. and Shpot, M. // J. Stat. Phys. — 1992. — Vol. 66, no. 3/4.

- P. 867–883.
2. Bervillier, C. Universal amplitude combinations of the three-dimensional random Ising system / Bervillier, C. and Shpot, M. // Phys. Rev. B. — 1992. — Vol. 46, no. 2. — P. 955–968.
 3. Diehl, H. W. Surface critical behavior in fixed dimensions $d < 4$: Nonanalyticity of critical surface enhancement and massive field theory approach / Diehl, H. W. and Shpot, M. // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 73, no. 25. — P. 3431–3434.
 4. Shpot, M. Special surface transition: Massive field theory and critical exponents in three dimensions // Condens. Matter Phys. — 1997. — no. 10. — P. 143–164.
 5. Diehl, H. W. Massive field-theory approach to surface critical behavior in three-dimensional systems / Diehl, H. W. and Shpot, M. // Nucl. Phys. B. — 1998. — Vol. 528, no. 3. — P. 595–647.
 6. Diehl, H. W. Critical behavior at m -axial Lifshitz points: Field-theory analysis and ϵ -expansion results / Diehl, H. W. and Shpot, M. // Phys. Rev. B. — 2000. — Vol. 62, no. 18. — P. 12338–12349.
 7. Shpot, M. Two-loop renormalization-group analysis of critical behavior at m -axial Lifshitz points / Shpot, M. and Diehl, H. W. // Nucl. Phys. B. — 2001. — Vol. 612, no. 3. — P. 340–372.
 8. Diehl, H. W. Lifshitz-point critical behaviour to $O(\epsilon^2)$ / Diehl, H. W. and Shpot, M. // J. Phys. A. — 2001. — Vol. 34, no. 42. — P. 9101–9105.
 9. Usatenko, Z. E. Surface critical behavior of random systems: Ordinary transition / Usatenko, Z. E., Shpot, M. A., Chin-Kun Hu // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 63, no. 42. — P. 056102-1–8.
 10. Diehl, H. W. Critical, crossover and correction-to-scaling exponents for isotropic Lifshitz points to order $(8 - d)^2$ / Diehl, H. W. and Shpot, M. // J. Phys. A. — 2002. — Vol. 35, no. 30. — P. 6249–6259.
 11. Diehl, H. W. Comment on “Renormalization-group picture of the Lifshitz critical behavior” / Diehl, H. W. and Shpot, M. // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol. 68, no. 6. — P. 066401-1–2.
 12. Diehl, H. W. Relevance of space anisotropy in the critical behavior of m -axial Lifshitz points / Diehl, H. W., Shpot, M. A., Zia, R. K. P. // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol. 68, no. 2. — P. 224415.
 13. Shpot, M. A. Large- n expansion for m -axial Lifshitz points / Shpot, M. A., Pis'mak, Yu. M., Diehl, H. W. // J. Phys.: Condens. Matter. — 2005. — Vol. 17, no. 20. — P. S1947–S1972.
 14. Diehl, H. W. Boundary critical behaviour at m -axial Lifshitz points of semi-infinite systems with a surface plane perpendicular to a modulation axis / Diehl, H. W., Shpot, M. A., Prudnikov, P. V. // J. Phys. A. — 2006. — Vol. 39, no. 25. — P. 7927–7942.
 15. Diehl, H. W. Fluctuation-induced forces in periodic slabs: Breakdown of epsilon expansion at the bulk critical point and revised field theory / Diehl, H. W., Grüneberg, D., Shpot, M. A. // Europhys. Lett. — 2006. — Vol. 75, no. 2. — P. 241–247.

16. Shpot, M. A. A massive Feynman integral and some reduction relations for Appell functions // *J. Math. Phys.* — 2007. — Vol. 48, no. 12. — P. 123512.
17. Shpot, M. A. Compatibility of $1/n$ and ε expansions for critical exponents at m -axial Lifshitz points / Shpot, M. A., Diehl, H. W., and Pis'mak, Yu. M. // *J. Phys. A.* — 2008. — Vol. 41, no. 13. — P. 135003.
18. Shpot, M. A. Two-loop RG functions of the massive ϕ^4 field theory in general dimensions // *Condens. Matter Phys.* — 2010. — Vol. 13, no. 1. — P. 13101.
19. Burgsmüller, M. Fluctuation-induced forces in strongly anisotropic critical systems / Burgsmüller, M., Diehl, H. W., Shpot, M. A. // *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* — 2010. — Vol. 2010. — P. P11020. — Erratum: *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* — 2011. — Vol. 2011. — P. E05001-1-2.
20. Rutkevich, S. On conjectured local generalizations of anisotropic scale invariance and their implications / Rutkevich, S., Diehl, H. W., Shpot, M. A. // *Nucl. Phys. B.* — 2011. — Vol. 843, no. 1. — P. 255–301. — Erratum: *Nucl. Phys. B.* — 2011. — Vol. 853. — P. 210–211.
21. Shpot, M. A. Lifshitz-point correlation length exponents from the large- n expansion / Shpot, M. A. and Pis'mak, Yu. M. // *Nucl. Phys. B.* — 2012. — Vol. 862, no. 1. — P. 75–106.
22. Shpot, M. A. The Clausenian hypergeometric function with unit argument and negative integral parameter differences / Shpot, M. A. and Srivastava, H. M. // *Appl. Math. Comput.* — 2015. — Vol. 259. — P. 819 – 827.
23. Shpot, M. A. The Feynman integral in $\mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^m$ and complex expansion of ${}_2F_1$ / Shpot, M. A. and Pogány, T. K. // *Integral Transforms Spec. Funct.* — 2016. — Vol. 27, no. 7. — P. 533–547.
24. Shpot, M. A. Integrals of products of Hurwitz zeta functions and the Casimir effect in ϕ^4 field theories / Shpot, M. A., Chaudhary, M. P., Paris, R. B. // *J. Class. Anal.* — 2016. — Vol. 9, no. 2. — P. 99–115.
25. Shpot, M. A. Integrals of products of Hurwitz zeta functions via Feynman parametrization and two double sums of Riemann zeta functions / Shpot, M. A. and Paris, R. B. // *Math. Aeterna.* — 2016. — Vol. 6, no. 5. — P. 745–764.
26. Paris, R. B. A Feynman integral in Lifshitz-point and Lorentz-violating theories in $\mathbb{R}^D \oplus \mathbb{R}^m$ / Paris, R. B. and Shpot, M. A. // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2018. — Vol. 41, no. 5. — P. 2220–2246.
27. Головач, Ю. В. Критическое поведение разбавленной m -векторной модели при нецелых размерностях пространства / Головач, Ю. В. и Шпот, Н. А. // *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-физические исследования (теория и эксперимент).* — 1992. — № 3(24). — С. 48–53.
28. Bervillier, C. Critical amplitude relations for disordered Ising systems / Bervillier, C. and Shpot, M. // *The 18th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Berlin, 2–8 August 1992) Programme and Abstracts.* — 1992. — P. 219.
29. Diehl, H. W. Massive field-theory approach to surface critical behavior in three-dimensional systems / Diehl, H. W. and Shpot, M. // *The 19th IUPAP*

- International Conference on Statistical Physics (Xiamen 31 July – 4 August 1995) Programme and Abstracts. — 1995. — P. 182.
30. Diehl, H. W. Massive field-theory approach to surface critical behavior in three-dimensional systems / Diehl, H. W. and Shpot, M. // Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 7/1995 (Berlin, 1995). — 1995. — P. 1075.
 31. Diehl, H. W. Surface critical exponents in three-dimensional semi-infinite systems / Diehl, H. W., Shpot, M. // Науковий семінар з статистичної терорії конденсованих систем (Львів, Україна, 14–15 березня 1997), програма і тези доповідей. — 1997. — С. 20.
 32. Shpot, M. Critical phenomena on surfaces // Ising Lectures in Lviv (1997–2017) / ed. by M. Krasnytska et. al. — Lviv: Institute for Condensed Matter Physics, 2017. — P. 69.
 33. Usatenko, Z. Surface critical behaviour of quenched dilute Ising-like systems at the ordinary transition / Usatenko, Z., Shpot, M., Hu, C.-K. // International Congress on Mathematical Physics, London, July 17–22 2000. — 2000. — P. 19.
 34. Diehl, H. W. Critical behavior at m -fold degenerate Lifshitz points: field-theory and ϵ -expansion / Diehl, H. W. and Shpot, M. // Workshop on Modern problems of soft matter theory (Lviv, Ukraine, August 27–31 2000). — 2000. — P. 155.
 35. Usatenko, Z. Critical behaviour of semi-infinite random Ising-like systems at the ordinary transition / Usatenko, Z. and Shpot, M. // Workshop "Modern problems of soft matter theory" (Lviv, Ukraine, August 27–31 2000). — 2000. — P. 175.
 36. Usatenko, Z. Surface critical behaviour of quenched dilute Ising-like systems at the ordinary transition / Usatenko, Z., Shpot, M., Hu, C.-K. // 20-th European Conference on Surface Science, Krakow, Poland, September 04–07 2001, Book of Abstracts. — 2001. — P. 120.
 37. Diehl, H. W. Critical behavior at m -axial Lifshitz points: field-theory analysis and ϵ -expansion results / Diehl, H. W. and Shpot, M. — 2001. — P. E10.006. — Meeting of the American Physical Society (Seattle, USA March 12–16 2001).
 38. Diehl, H. W. Critical behavior at m -axial Lifshitz points: a case study of anisotropic scale invariance / Diehl, H. W., Shpot, M., Zia, R. K. P. — 2001. — The 21th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Cancun, July 15–21 2001) Programme and Abstracts.
 39. Шпот, М. Критична поведінка в анізотропній точці Лівшица / Шпот, М. і Діль, Г. В. // Різдваїні дискусії 2002 (Львів, Україна, 4–5 січня 2002), програма і тези доповідей. — 2002. — С. 6.
 40. Shpot, M. A. Critical behavior at Lifshitz points // VI Ukrainian-Polish and II East-European Meeting on Ferroelectrics Physics, Uzhgorod-Synjak, Ukraine, September 6–10, 2002. — 2002. — P. 28.
 41. Shpot, M. A. Large- N expansion for m -axial Lifshitz points / Shpot, M. A., Pismak, Y., Diehl, H. W. // The Spring-Meeting of the German Physical Society (Berlin, FRG, March 04–09 2005). — 2005. — P. 202.
 42. Shpot, M. A. Large- N expansion for Lifshitz points // The 6th International Conference "Renormalization Group 2005 (Helsinki, Finland, 30 August – 03

- September 2005). — 2005.
43. Diehl, H. W. Revised field theory of finite size effects and Casimir forces in slabs / Diehl, H. W., Grüeneberg, D., Shpot, M. A. // The 23th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Genova, Italy, July 09–13 2007) Programme and Abstracts. — 2007.
 44. Shpot, M. A. Lifshitz points: Recent theoretical progress // The 3rd Conference "Statistical Physics: Modern Trends and Applications" (Lviv, Ukraine, June 23–25 2009), Programme and Abstracts. — 2009. — P. 67.
 45. Diehl, H. W. On conjectured local generalizations of anisotropic scale invariance and their implications / Diehl, H. W., Rutkevich, S., Shpot, M. // Meeting of the American Physical Society (Portland, Oregon, USA, March 15–19 2010), Book of Abstracts. — 2010. — P. 705.
 46. Burgsmüller, M. Fluctuation-induced forces in strongly anisotropic critical systems / Burgsmüller, M., Diehl, H. W., Shpot, M. A. // Meeting of the American Physical Society (Dallas, Texas, USA, March 21–25 2011), Book of Abstracts. — 2011. — P. 217.
 47. Shpot, M. A. Thermodynamic Casimir effect in isotropic and anisotropic systems // The 36th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics MECO 36 (Lviv, Ukraine, April 5–7 2011). — 2011. — P. 149.
 48. Shpot, M. A. Lifshitz points at large n // The 4th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications (Lviv, Ukraine, July 3–6 2012). — 2012. — P. 178.

АНОТАЦІЯ

Шпот М.А. Критична поведінка просторово неоднорідних систем. — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 — теоретична фізика (104 — Фізика та астрономія). — Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів, 2021.

У дисертаційній роботі розвинуто методи опису складних просторово неоднорідних систем: неупорядкованих, просторово обмежених, сильно анізотропних. У випадку ізінгівських систем з замороженим безпорядком масивна теорія поля вперше застосована при нецілих вимірностях простору $2 < d < 4$ для побудови залежностей критичних показників від d ; вперше розраховані універсальні комбінації критичних амплітуд при $T > T_c$ і $T < T_c$ у вимірності $d = 3$, отримане додатне значення відношення амплітуд теплоємності A_+/A_- . Масивна теорія поля при $2 < d < 4$ сформульована для напівбезмежних систем. Для звичайного та спеціального переходів отримані надійні чисельні оцінки поверхневих критичних показників при $d = 3$. Запропоновано новий підхід до розрахунку критичних показників точки Ліфшица (ТЛ) з довільною кількістю осей анізотропії m , вперше отримані правильні ε -розклади показників до $O(\varepsilon^2)$ і показано, що показник

анізотропії θ є неklasичним у взаємодіючій теорії. Виявлено та прокоментовано помилки інших авторів. Поставлена задача про вплив кристалічної структури на критичну поведінку m -вісних ТЛ і показано, що анізотропія підпростору модуляції може бути причиною кросоверу від ТЛ. Описано анізотропні системи з поверхнею, перпендикулярною до однієї з осей анізотропії. Вперше розраховано поправки $O(1/n)$ для кореляційних і термодинамічних показників ТЛ. Виявлена неаналітичність ε -розкладів амплітуд Казимира плівкових систем з періодичними і спеціальними граничними умовами, в явному вигляді знайдено поправки $O(\varepsilon^{3/2})$. Вперше розглянуто флуктуаційно індуковані сили в сильно анізотропних системах, по різному орієнтованих між двома паралельними площинами.

Ключові слова: непорядковані системи, сильно анізотропні системи, просторово обмежені системи, граничні умови, масивна теорія поля, нецілі вимірності простору, ε -розклад, $1/n$ -розклад, інтеграли Фейнмана, критичні показники, скейлінгові функції, критичні амплітуди, амплітуда Казимира, точка Ліфшица, локальна скейлінгова інваріантність.

АННОТАЦІЯ

Шпот М.А. Критическое поведение пространственно неоднородных систем. — На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика (104 — Физика и астрономия). — Институт физики конденсированных систем НАН Украины, Львов, 2021.

В диссертационной работе развиты методы описания сложных пространственно неоднородных систем: неупорядоченных, пространственно ограниченных, сильно анизотропных. В случае изинговских систем с замороженным беспорядком массивная теория поля впервые применена при нецелых размерностях пространства $2 < d < 4$ для построения зависимостей критических показателей от d ; впервые рассчитаны универсальные комбинации критических амплитуд при $T > T_c$ и $T < T_c$ в размерности $d = 3$, получено положительное значение отношения амплитуд теплоемкости A_+/A_- . Массивная теория поля при $2 < d < 4$ сформулирована для полубесконечных систем. Для обычного и специального переходов получены надежные численные оценки поверхностных критических показателей при $d = 3$. Предложен новый подход к расчету критических показателей точки Лифшица (ТЛ) с произвольным количеством осей анизотропии m , впервые получены правильные ε -разложения показателей до $O(\varepsilon^2)$ и показано, что показатель анизотропии θ является неклассическим во взаимодействующей теории. Прокомментированы ошибки других авторов. Поставлена задача о влиянии кристаллической структуры на критическое поведение m -осных ТЛ и показано, что анизотропия подпространства модуляции может быть причиной кросовера от ТЛ. Описаны анизотропные системы с поверхностью, перпендикулярной к одной из

осей анизотропии. Впервые рассчитаны поправки $O(1/n)$ для корреляционных и термодинамических показателей ТЛ. Обнаружена неаналитичность ε -разложения амплитуд Казимира пленочных систем с периодическими и специальными граничными условиями, в явном виде найдены поправки $O(\varepsilon^{3/2})$. Впервые рассмотрены флуктуационно индуцированные силы в сильно анизотропных системах, по-разному ориентированных между двумя параллельными плоскостями.

Ключевые слова: неупорядоченные системы, сильно анизотропные системы, пространственно ограниченные системы, граничные условия, массивная теория поля, нецелые размерности пространства, ε -разложение, $1/n$ -разложение, интегралы Фейнмана, критические показатели, скейлинговые функции, критические амплитуды, амплитуда Казимира, точка Лифшица, локальная скейлинговая инвариантность.

ABSTRACT

Shpot M.A. Critical behavior of spatially inhomogeneous systems. — On the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Sciences in Physics and Mathematics in specialization 01.04.02 — Theoretical Physics (104 — Physics and Astronomy). — Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2021.

The subject of the Thesis is a theoretical description of the critical behavior of non-ideal systems. Their non-ideality manifests itself in the presence of quenched disorder, one or two surfaces, strong spatial anisotropy. These special properties are generally termed as *spatial inhomogeneities*.

Disordered systems are studied using the Parisi's "massive" field theory in fixed space dimensions. We implement the idea of Parisi in *non-integer* dimensions d and construct a smooth dependence of critical exponents on d . Required Feynman integrals and renormalization group (RG) functions are calculated explicitly for generic d . The massive field theory is further generalized to the case of the *low-temperature* phase $T < T_c$. Universal critical amplitude combinations are calculated in the three-loop approximation.

The massive field theory with appropriate normalization conditions is formulated for semi-infinite systems with a flat boundary and different boundary conditions in $2 < d \leq 4$ dimensions. Numerical estimates of surface critical exponents at the special and ordinary transitions are given in $d = 3$ and compared with available experimental, theoretical and Monte Carlo data. The effect of the surface disorder on the special transition and changes of the ordinary-transition exponents in the presence of the bulk disorder are addressed.

A new approach is used for the calculation of critical exponents of strongly anisotropic systems at the Lifshitz point (LP). The *correct* $\varepsilon = 4 + m/2 - d$ -expansions for all LP exponents up to $O(\varepsilon^2)$ are derived, valid for arbitrary number of anisotropy

axes m . In particular, the *non-classical* anisotropy index θ is found $\forall m \in]0, d[$ in non-trivial interacting theories. We study the problem of the influence of crystal structure (cubic anisotropy) of the m -axial modulation subspace on the critical behavior of LPs. We calculate the corresponding crossover exponent and conclude that this anisotropy can influence the LP critical behavior. We give an RG description of *semi-infinite anisotropic* systems with a boundary perpendicular to one of the modulation axes.

A $1/n$ -expansion (with a *large* number of the order-parameter components n) for generic m -axial LPs is formulated, for all admissible d and $0 \leq m \leq d$ between the lower and upper critical dimensions $d_\ell(m) = 2 + m/2$ and $d^*(m) = 4 + m/2$. The results are consistent with four limiting cases: isotropic critical exponents to $O(1/n)$ at $m = 0$; isotropic LP ones at $m = d$; ε_ℓ - and ε -expansions for small $\varepsilon_\ell = d - d_\ell(m)$ and $\varepsilon = d^*(m) - d$. A number of other special cases are considered, in particular, important instances of uniaxial systems in three and four dimensions. Schematic patterns of correlation exponents $\eta_2(m, d)$ and $\eta_4(m, d)$ as functions of d are suggested. They are confirmed in³² by means of exact RG equations.

A thorough check is performed of the local scaling invariance (LSI) hypothesis by M. Henkel, an attempt to generalize the conformal invariance to anisotropic systems. We found a number of inaccuracies in its formulation and obtained new information regarding the mathematical structure and explicit form of two-point functions of uniaxial systems at the LP. Explicit expressions for correlation functions $\langle \phi \phi \rangle$ and $\langle \phi^2 \phi^2 \rangle$ up to $O(\varepsilon^2)$ have more complex mathematical structure as predicted by the LSI hypothesis, which appears to be valid only in interaction-free models.

Finally, we study effects of a geometric restriction of systems by two parallel surfaces with different boundary conditions. At criticality, fluctuation-induced forces arise between boundaries, analogous to Casimir forces in QED; their value is determined by the *Casimir amplitude*. We show that ε -expansions of Casimir amplitudes for systems with film geometry and periodic and special boundary conditions are nonanalytic. We explicitly find corrections of order $O(\varepsilon^{3/2})$ for these amplitudes. The reason for nonanalyticity is explained, numerical estimates are performed in $d = 3$. For possible future progress with Dirichlet boundary conditions, we study an alternative calculational scheme based on integrals of products of Hurwitz zeta functions. For *strongly anisotropic* systems, we argue that fluctuation-induced forces depend on the orientation of boundaries with respect to directions of anisotropy axes. For two orientations: *parallel*, when boundaries are parallel to all anisotropy axes, and *perpendicular*, when one of these axes is orthogonal to boundaries, we perform explicit calculations of Casimir amplitudes and provide their numerical estimates in three dimensions.

Keywords: disordered systems, strongly anisotropic systems, constrained systems, boundary conditions, massive field theory, non-integer space dimensions, ε -expansion, $1/n$ -expansion, Feynman integrals, critical exponents, scaling functions, critical amplitudes, Casimir amplitude, Lifshitz point, local scale invariance.