

ІНСТИТУТ  
ФІЗИКИ  
КОНДЕНСОВАНИХ  
СИСТЕМ

ICMP-01-05U

М.В. Шовгенюк, Ю.М. Козловський

ДРОБОВЕ ФУР'Є-ПЕРЕТВОРЕННЯ  
ОПТИЧНИХ СИГНАЛІВ

ЛЬВІВ

УДК: 532; 533; 533.9:530.182; 536.75; 536-12.01.

РАС: 05.60.+w, 05.70.Ln, 05.20.Dd, 52.25.Dg, 52.25.Fi

### Дробове фур'є-перетворення оптичних сигналів

М.В. Шовгенюк, Ю.М. Козловський

**Анотація.** Дається опис інтегральних перетворень типу згортки, які використовуються при описі оптичних схем. На основі задачі на власні значення отримано аналітичний вираз для ядра прямого та оберненого дробового фур'є-перетворення (ДФП). Досліджені властивості спряжених зображень ДФП і введено частотне представлення. Запропоновано різні форми представлення ДФП. Показано, що ДФП можна інтерпритувати, як процес згортки і фільтрації. На основі методу оптичних сигналів побудований розподіл ДФП, а також спряжені зображення. Встановлено, що в точці  $p = 1/2$  спряжені зображення вироджуються в самоподібні для довільних оптичних сигналів. Приведені результати чисельного розрахунку спряжених зображень прямокутного імпульсу при різних значеннях числа Френеля.

### The fractional Fourier transform of the optical signals

M.V.Shovgenyuk, Yu.M.Kozlovskii

**Abstract.** The description of integral transforms such as convolution is given. This transforms will be utilized at the description of the optical schemes. On the basis of the task on eigenvalues the analytical expression for direct and inverse fractional Fourier transform (FFT) kernel is obtained. The properties of the conjugate images of the FFT are researched and the frequency representation is injected. The different forms of the FFT representation are offered. It is exhibited, that the FFT can be interpreted, as the process of convolution and filtering. On the basis of a method of optical signals the FFT distribution, and conjugate images are constructed. It is placed, that in a point  $p = 1/2$  the conjugate images degenerate in self-similar for arbitrary optical signals. The outcomes of numerical calculation of the conjugate images of the rectangular impulse are reduced at different values of the Fresnel's number.

© Інститут фізики конденсованих систем 2001

Institute for Condensed Matter Physics 2001

## 1. ВСТУП

При аналізі процесів, які відбуваються в голографічних установках, в довільних діапазонах хвиль, використовується цілий ряд математичних перетворень, які суттєво спрощують опис проходження оптичних сигналів через оптичні елементи. Одним з таких перетворень, яке описує дифракцію світла в далекій зоні (дифракцію Фраунгофера) є перетворення Фур'є. З допомогою цього перетворення вдається здійснити опис багатьох оптичних схем [1]. Однак для складних оптичних систем апарат звичайного фур'є-перетворення виявляється не достатньо ефективним.

В останній час велика увага в вирішенні цієї проблеми приділяється використанню дробового<sup>1</sup> фур'є-перетворення (ДФП), яке було запропоноване як узагальнення звичайного фур'є-перетворення. Вперше ДФП було запропоноване в 1937 році в роботі Кондома [2]. Згодом у 1961 році Бергмен [3] отримав аналітичний вираз для інтегрального ядра :

$$K_n(e^{-i\tau}, q', q) = C \exp \left\{ i \cot \tau \frac{q^2 + q'^2}{2} - i \frac{qq'}{\sin \tau} \right\}, \quad (1.1)$$

$$C = \frac{\exp \left\{ -in\varepsilon \left( \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\theta \right) \right\}}{(2\pi |\sin \tau|)^{n/2}}, \quad (1.2)$$

$$\tau = 2k\pi + \varepsilon\theta, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad 0 < \theta < \pi, \quad (1.3)$$

яке пізніше було вибрано за базове ядро ДФП.

В роботах [3, 4] було встановлено, що власними функціями оператора ДФП  $\hat{\mathcal{F}}_\phi$  є функції Ерміта

$$\hat{\mathcal{F}}_\phi[\Psi_n(x)] = \exp(in\phi) \Psi_n(x), \quad (1.4)$$

де  $\exp(in\phi)$  - власні значення оператора  $\hat{\mathcal{F}}_\phi$ .

$$\Psi_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x), \quad (1.5)$$

-власні функції.

<sup>1</sup>Переклад англійського терміну "fractional"

При дії оператора  $\hat{\mathcal{F}}_\phi$  на деяку функцію  $f(x)$  Наміас [4] отримав наступний вираз

$$\hat{\mathcal{F}}_\phi[f(x)] = \frac{\exp\left(i\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right]\right)}{\sqrt{\sin \phi}} \times \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(\frac{-i}{2 \operatorname{tg} \phi} [x^2 + y^2]\right) \exp\left(i \frac{xy}{\sin \phi}\right) dy. \quad (1.6)$$

Метод ДФП вперше проілюстрований в застосуванні до квантово-механічного гармонічного осцилятора, а також до інших задач квантової механіки [4]. Цей метод застосовувався до розв'язку диференціальних рівнянь другого порядку з коефіцієнтами залежними від часу, що описують квантово-механічну динаміку електронів у змінному в часі магнітному полі [5]. В роботі [6] узагальнено явний вигляд ядра ДФП на дво- та тривимірні випадки.

Своє застосування в теоретичному описі оптичних схем дробове фур'є-перетворення знайшло в роботах [7, 8]. Зокрема в роботі [7] дія оператора ДФП на функцію  $f(x, y)$  записується у вигляді розкладу за системою функцій Ерміта

$$\mathcal{F}^\alpha[f(x, y)] = \sum_l \sum_m A_{ml} \Psi_{ml}(x, y) \exp(i\beta_{ml} \alpha L), \quad (1.7)$$

де

$$L \equiv (\pi/2) \sqrt{n_1/n_2}, \quad (1.8)$$

відстань від вхідної площини, на якій фокусується паралельний пучок променів, а  $n_1$  і  $n_2$  пов'язані з ступінчастим показником заломлення наступним чином  $n(r)$

$$n^2(r) = n_1^2 [1 - (n_2/n_1)r^2], \quad (1.9)$$

$r^2 = x^2 + y^2$ -радіальна відстань від оптичних осей.

На основі розподілу Вігнера в [8] отримано вираз для ДФП з врахуванням оптичних констант

$$u_p(x) = \mathcal{F}^p[u(x_0)] = C_1 \int u(x_0) \exp\left(i\pi \frac{x_0^2 + x^2}{\lambda f_1 \operatorname{tg} \phi}\right) \exp\left(-i2\pi \frac{xx_0}{\lambda f_1 \sin \phi}\right) dx_0, \quad (1.10)$$

де

$$C_1 = \frac{\exp[-i(\pi \operatorname{sgn}(\sin \phi)/4)]}{|\lambda f_1 \sin \phi|^{1/2}}, \quad (1.11)$$

а також показано, що ДФП можна інтерпритувати як поворот функції розподілу Вігнера

$$\mathcal{W}_0(x, \xi) \rightarrow \mathcal{W}_P(x, \xi) = \mathcal{W}_0(x \cos \phi - \xi \cos \phi, \xi \cos \phi + x \cos \phi). \quad (1.12)$$

В роботі [9] встановлений зв'язок між ДФП і перетворенням Радона-Вігнера. Перетворення Радона-Вігнера інтерпритується як квадрат модуля ДФП. Це дає можливість перетворювати сигнали і зображення між різними представленнями сигналу, а також передбачувати нові можливості для часових і просторових варіативних фільтрів.

До схеми переломлюючих лінз ДФП було вперше застосоване в [10, 11]. Проаналізована основна концепція зв'язна з дробовим фур'є-перетворенням для оптичного опису систем, що складаються з позитивних і негативних лінз. Встановлено, що ДФП може бути застосоване до двох типів оптичних систем: одно- і дволінзових.

В роботах [12, 13] розглянули ДФП, як інструмент для опису поширення світлового пучка. Виведений розподіл комплексної амплітуди на двох сферичних поверхнях, а також показано, що кривизна і періодичність є просто пов'язані через ДФП. Показано, що параметр ДФП є пропорційний до фази "Goou", що змінюється між двома поверхнями. Цей результат забезпечує новий підхід до розповсюдження хвиль настільки добре наскільки можна використати ДФП як математичний інструмент при аналізі таких схем.

В подальших роботах [14, 15] були визначені два типи ДФП. Перший з них базувався на повороті функції Вігнера, а другий на розповсюдженні хвильового поля через середовище з ступінчастим показником заломлення. Показано, що обидва означення є еквівалентні, оскільки розподіл Вігнера хвильового поля повертається аналогічно до хвильового поля, яке розповсюджується через квадратичне середовище з ступінчастим показником заломлення. Описана фотонна інтерпретація ДФП.

В роботі [16] показано, що для значень  $0 < \alpha < 2$  інтегральне ДФП  $\mathcal{F}_\alpha$  Вігнерівського типу, має відношення до дробового Броунівського руху.

В ряді робіт [17, 18, 19] описана загальна схема застосування ДФП в реальних оптичних системах. Щоб продемонструвати ДФП на експерименті, потрібно дослідити всі значення параметру ДФП, і вибрати ті, що складаються з мінімальної кількості модулів. Під модулем

розуміється елементарне ДФП деякого порядку, що складається з лінз між площинами вільного простору. Через коммутативну адитивність перетворення, різні дробові порядки можуть бути досягнуті з використанням різної сукупності модулів. У роботах [20, 21] ДФП застосоване до дифракції Френеля.

## 2. ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

### 2.1. Перетворення Фур'є

Перетворення Фур'є описує дифракцію світла в далекій зоні дифракцію Фраунгофера [1]. За означенням перетворення Фур'є функції  $f(x)$  називається інтегральна операція

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\omega x) dx = \hat{\mathcal{F}}[f(x)], \quad (2.1)$$

де  $F(\omega)$  - фур'є-образ функції  $f(x)$ ,  $\hat{\mathcal{F}}$  - оператор прямого фур'є-перетворення. Обернене перетворення Фур'є записується наступним чином

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega x) d\omega = \hat{\mathcal{F}}^{-1}[F(\omega)], \quad (2.2)$$

$\hat{\mathcal{F}}^{-1}$  - оператор оберненого фур'є-перетворення.

Перетворення Фур'є є взаємообернене, тобто

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1} \hat{\mathcal{F}}[f(x)] = f(x). \quad (2.3)$$

### 2.2. Перетворення типу згортки

Важливим класом інтегральних перетворень, які відіграють важливу роль в оптиці і голографії, є інтегральна операція згортки

$$f(x) = \int f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi = f_1(x) \otimes f_2(x), \quad (2.4)$$

де  $\otimes$  - оператор згортки.

В просторово-частотній площині операція згортки еквівалентна операції фільтрації фур'є-образів оптичних сигналів

$$\hat{\mathcal{F}}[f(x)] = F_1(\omega) F_2(\omega). \quad (2.5)$$

Найбільш поширеною в оптиці операцією згортки є перетворення Френеля, яке описує дифракцію Френеля. Всі перетворення типу згортки встановлюють зв'язок між сигналами на виході і вході оптичної системи з її характеристичною функцією.

*Перетворення Френеля* За означенням [1] перетворенням Френеля називається інтегральне перетворення вигляду

$$\Phi(x) = \omega_0 \sqrt{2} \int f(\xi) \exp[i\omega_0^2(x - \xi)^2] d\xi = f(x) \otimes z(x), \quad (2.6)$$

де функція Френеля

$$z(x) = \omega_0 \sqrt{2} \exp[i\omega_0^2 x^2]. \quad (2.7)$$

Перетворення Френеля описує процес дифракції світла в близькій зоні (дифракцію Френеля) при проходженні когерентного пучка світла через оптичну систему.

*Перетворення Дірака* Співвідношення

$$g(x) = \int g(\xi) \delta(x - \xi) = g(x) \otimes \delta(x), \quad (2.8)$$

задає інтегральне перетворення Дірака, яке виділяє ефект точкового джерела світла. Згортка і перетворення Дірака є тотожними перетвореннями.

*Перетворення відліку* Якщо в перетворенні Дірака замість дельта-функції Дірака ввести інтегральне ядро вигляду

$$\frac{\sin(\pi\omega_0 x)}{\pi x} = \omega_0 \operatorname{sinc}(\omega_0 x), \quad (2.9)$$

то отримаємо перетворення відліку, яке задається наступним співвідношенням

$$S(\omega, x) = \int f(\xi) \frac{\sin \pi\omega_0(x - \xi)}{\pi(x - \xi)} d\xi = f(x) \otimes \frac{\sin \pi\omega_0 x}{\pi x}, \quad (2.10)$$

яке описує властивості оптичного сигналу, що поступає з системи з скінченною апертурою чи обмеженою полосою просторових частот. Зустрічається при оцінці роздільної здатності і інформаційної ємкості оптичного сигналу.

*Перетворення Гільберта* Перетворення Гільберта для довільної функції часу записується наступним чином

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(t') dt'}{t' - t} = \frac{1}{\pi} f(t) \otimes \frac{1}{t}. \quad (2.11)$$

Замість дійсного сигналу, який містить як позитивні так і негативні частоти, вводиться сигнал

$$V(t) = f(t) + i\chi(t), \quad (2.12)$$

який містить тільки позитивні частоти. Причому функція  $\chi(t)$  однозначно задається функцією  $f(x)$  і за будується за наступним правилом

$$f(t) \rightarrow \chi(t), \quad (2.13)$$

$$\cos(\omega t) \rightarrow \sin(\omega t), \quad (2.14)$$

$$\sin(\omega t) \rightarrow -\cos(\omega t). \quad (2.15)$$

Таке перетворення не змінює спектру сигналу, а лише подавляє негативні частоти, які не несуть ніякої додаткової інформації.

### 3. ОЗНАЧЕННЯ ДФП

#### 3.1. Базове (координатне) представлення ДФП

Дробове фур'є-перетворення деякого оптичного сигналу  $f(x)$  може бути записано в формі інтегрального перетворення [4, 8]

$$u_p(x) = \hat{\mathcal{F}}_\phi[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) K_\phi(x, y) dy, \quad (3.1)$$

де  $u_p(x)$ -дробовий фур'є-образ порядку  $p$  функції  $f(x)$ .

Ядро ДФП не залежить від вигляду функції  $f(x)$  і містить в собі параметр дробового фур'є-перетворення  $\phi = p\pi/2$ ,  $p$  - порядок ДФП.

Викладемо спосіб отримання явного вигляду ДФП. При цьому приймемо до уваги результати робіт [4, 7, 9]. Задача на власні значення оператора  $\hat{\mathcal{F}}_\phi$  в даному випадку має вигляд

$$\hat{\mathcal{F}}_\phi[\Psi_n(x)] = \exp(-in\phi) \Psi_n(x), \quad (3.2)$$

На відміну від формули (1.4) в оптиці власні значення  $\exp(-in\phi)$  доцільно вибрати зі знаком мінус. Використаємо в якості  $\Psi_n(x)$  мо-

дифіковані функції Ерміта<sup>2</sup>

$$\Psi_n(x) = \exp\left(-\frac{kx^2}{2d_0}\right) H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}x\right), \quad (3.4)$$

де  $k = 2\pi/\lambda$  - хвильове число,  $d_0$  - лінійна константа,

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2), \quad (3.5)$$

$H_n(x)$  - поліноми Ерміта. Декілька перших поліномів Ерміта мають вигляд:

$$H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = 2x; \quad H_2(x) = 4x^2 - 2; \quad (3.6)$$

Для  $H_n(x)$  мають місце рекурентні співвідношення:

$$xH_n(x) = nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}H_{n+1}(x), \quad (3.7)$$

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x); \quad \frac{d^2H_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0. \quad (3.8)$$

Система функцій Ерміта різних порядків є ортогональна: [4, 12]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(x) \Psi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{коли } n \neq m \\ \sqrt{\frac{\pi d_0}{k}} 2^n n! & m = n. \end{cases}$$

Звідси слідує, що поліноми Ерміта  $H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}x\right)$  ортогональні з ваговою функцією Гауса  $\exp\left(-\frac{k}{d_0}x^2\right)$ .

Оскільки маємо ортонормовану систему функцій, то по ній можна розкласти будь-яку квадратично інтегровану функцію  $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \Psi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \exp\left(-\frac{kx^2}{2d_0}\right) H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}x\right), \quad (3.9)$$

<sup>2</sup>В роботі [12] запропоновано функцію Ерміта-Гауса записувати у загальному вигляді

$$\Psi_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sigma}\right), \quad (3.3)$$

де  $\sigma$  - константа. Покладаючи  $\sigma^2 = 2d_0/k$ , отримуємо формулу (3.4). Відповідно, при  $\sigma^2 = 2$  маємо загальноприйняте означення функцій Ерміта (1.5).

де коефіцієнти розкладу

$$q_n = \sqrt{\frac{k}{\pi d_0}} \frac{1}{2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{ky^2}{2d_0}\right) H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}y\right) dy. \quad (3.10)$$

Подіємо оператором  $\hat{\mathcal{F}}_{-\phi}$  на функцію  $f(x)$ , яка записана в вигляді розкладу (3.9) за власними функціями

$$\hat{\mathcal{F}}_{\phi}[f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \exp(-in\phi) \exp\left(-\frac{kx^2}{2d_0}\right) H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}x\right), \quad (3.11)$$

Якщо підставити в дану формулу загальний вигляд коефіцієнтів розкладу (3.10), то знаходимо

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_{\phi}[f(x)] &= \sqrt{\frac{k}{\pi d_0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{k}{2d_0}[x^2 + y^2]\right) \\ &\times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-in\phi)}{2^n n!} H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}x\right) H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}y\right) \right\} dy. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для сумування поліномів Ерміта використаємо формулу Мелера [33]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp\left(\frac{2xyz - [x^2 + y^2]z^2}{1-z^2}\right). \quad (3.13)$$

Покладаючи  $z = \exp(-i\phi)$ , формула (3.12) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_{\phi}[f(x)] &= \sqrt{\frac{k}{\pi d_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - \exp(-2i\phi)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{k[x^2 + y^2]}{2d_0}\right) \\ &\times \exp\left(\frac{k(x^2 + y^2)}{d_0} \frac{2xy \exp(-i\phi) - v \exp(-2i\phi)}{1 - \exp(-2i\phi)}\right) dy. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Для спрощення формули (3.14) використаємо деякі відомі співвідношення:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \exp(2i\phi)}} = \frac{\exp\left(i\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right]\right)}{\sqrt{2 \sin \phi}}; \quad (3.15)$$

$$\frac{\exp(i\phi)}{1 - \exp(2i\phi)} = \frac{i}{2 \sin \phi}; \quad \frac{\exp(2i\phi)}{1 - \exp(2i\phi)} = i \frac{\cos \phi}{2 \sin \phi} - \frac{1}{2}. \quad (3.16)$$

Тоді отримуємо

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_\phi[f(x)] &= \sqrt{\frac{k}{2\pi d_0}} \frac{\exp\left(i\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right]\right)}{\sqrt{\sin \phi}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(i\frac{k[x^2 + y^2]}{2d_0 \operatorname{tg} \phi}\right) \exp\left(-i\frac{kxy}{d_0 \sin \phi}\right) dy. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Отриманий вираз по своїй структурі співпадає з точністю до константи з означенням ДФП (1.10), а також ядром ДФП роботи [9]. Подібним шляхом може бути отримана формула для оператора  $\hat{\mathcal{F}}_{-\phi}$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_{-\phi}[f(x)] &= \sqrt{\frac{k}{2\pi d_0}} \frac{\exp\left(-i\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right]\right)}{\sqrt{\sin -\phi}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-i\frac{k[x^2 + y^2]}{2d_0 \operatorname{tg} \phi}\right) \exp\left(i\frac{kxy}{d_0 \sin \phi}\right) dy. \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.2. Обернене ДФП

Поставимо задачу знаходження перетворення оберненого до ДФП

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} u_p(x) H(x, y) dx. \quad (3.19)$$

Ядро оберненого ДФП відноситься до класу ядра Фур'є [1]

$$H(x, y) = K_\phi^*(x, y) = K_{-\phi}(x, y), \quad (3.20)$$

тобто ДФП є унітарним. Для нього виконується умова [28]

$$M(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\phi(x, x') K_{-\phi}(x', y) dx' = \delta(x - y). \quad (3.21)$$

Твердження (3.20) стає очевидним, якщо скористатися із формули (3.12) і записати ядро ДФП можна в формі розкладу за поліномами Ерміта

$$\begin{aligned} K_\phi(x, y) &= \sqrt{\frac{k}{\pi d_0}} \exp\left(-\frac{k}{2d_0}[x^2 + y^2]\right) \\ &\times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(in\phi)}{2^n n!} H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}x\right) H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}y\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Підставляючи (3.22) в (3.21), отримуємо

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \frac{k}{\pi d_0} \exp\left[-\frac{k}{2d_0}(x^2 + y^2)\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k}{d_0}x'^2\right) \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(in\phi)}{2^n n!} H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}x\right) H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}x'\right) \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp(-im\phi)}{2^m m!} H_m\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}x'\right) H_m\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}y\right) dx'. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Виконаємо інтегрування по  $dx'$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k}{d_0}x'^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}x'\right) H_m\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}x'\right) dx' = \sqrt{\frac{d_0}{k}} 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m}. \quad (3.24)$$

Тоді (3.23) переписеться у вигляді

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \sqrt{\frac{k}{\pi d_0}} \exp\left[-\frac{k}{2d_0}(x^2 + y^2)\right] \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}x\right) H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d_0}}y\right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Суму по  $n$  в формулі (3.25) знайдемо відповідно до формули Мелера (3.13) для випадку  $z \rightarrow 1$ . В результаті знаходимо вираз

$$M(x, y) = \sqrt{\frac{k}{\pi d_0}} \exp\left[-\frac{k}{2d_0}(x^2 + y^2)\right] \varphi(x, y), \quad (3.26)$$

де

$$\varphi(x, y) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp \left( \frac{k}{d_0} \left[ \frac{2xyz}{1+z} - \frac{z^2}{1-z^2} (x-y)^2 \right] \right). \quad (3.27)$$

Скористаємося з наступного представлення  $\delta$ -функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_{\sigma}(x-a) dx = F_{\sigma}(a), \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} F_{\sigma}(a) = f(a), \quad (3.28)$$

де,

$$p_{\sigma}(x-a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (x-a)^2 \right]. \quad (3.29)$$

Якщо, виходячи із (3.27), ввести позначення

$$\frac{kz^2}{d_0(1-z^2)} = \frac{1}{2\sigma^2}; \quad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\kappa z \sigma \sqrt{2}}. \quad (3.30)$$

Тоді для функції  $\varphi(x, y)$  знаходимо

$$\varphi(x, y) = \sqrt{\frac{\pi d_0}{k}} \exp \left( \frac{k}{d_0} y^2 \right) \delta(x-y). \quad (3.31)$$

Підставляючи дану формулу в (3.26), отримуємо умову (3.21).

Наявність оберненого ДФП, яке відновлює вихідний оптичний сигнал  $f(x)$  свідчить, що оператори  $\hat{\mathcal{F}}_{\phi}$  і  $\hat{\mathcal{F}}_{-\phi}$  є взаємообернені

$$\hat{\mathcal{F}}_{\phi} \hat{\mathcal{F}}_{-\phi} = \hat{\mathcal{F}}_{-\phi} \hat{\mathcal{F}}_{\phi} = \hat{\mathcal{E}}, \quad (3.32)$$

де  $\hat{\mathcal{E}}[f(x)] = f(x)$  - одиничний оператор. На основі формул (1.6) і (3.17) можна записати

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_{\phi} \hat{\mathcal{F}}_{-\phi}[f(x)] &= \frac{k}{2\pi d_0} \frac{1}{\sin \phi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \exp \left( i \frac{k[y^2 + z^2]}{2d_0 \operatorname{tg} \phi} \right) \\ &\times \exp \left( -i \frac{kyz}{d_0 \sin \phi} \right) \exp \left( -i \frac{k[x^2 + y^2]}{2d_0 \operatorname{tg} \phi} \right) \exp \left( i \frac{kxy}{d_0 \sin \phi} \right) dz dy. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Звідси інтеграл по  $dy$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -i \frac{k}{d_0 \sin \phi} [z-x]y \right) dy = 2\pi \delta \left[ \frac{k}{d_0 \sin \phi} (z-x) \right], \quad (3.34)$$

і в результаті отримуємо

$$\hat{\mathcal{F}}_{\phi} \hat{\mathcal{F}}_{-\phi}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \delta(z-x) dz = f(x), \quad (3.35)$$

що доводить формулу (3.32).

### 3.3. Оператор $\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}$ .

На основі формул (1.6) і (3.17) отримуємо

$$\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}[f(x)] = \sqrt{\frac{k}{2\pi d_0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp \left( -i \frac{k}{d_0} xy \right) dy = \sqrt{\frac{k}{2\pi d_0}} F \left( \frac{k}{d_0} x \right), \quad (3.36)$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}[f(x)] = \sqrt{\frac{k}{2\pi d_0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp \left( i \frac{k}{d_0} xy \right) dy = \sqrt{\frac{k}{2\pi d_0}} F \left( -\frac{k}{d_0} x \right). \quad (3.37)$$

З врахуванням означення (2.1) оператор  $\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}$  здійснює фур'є-перетворення функції  $f(x)$ . Відповідно, дія оператора  $\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}$  теж приводить до фур'є-перетворення з інверсною зміною координати фур'є-образу.

Оператори  $\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}$  і  $\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}$  є взаємообернені (див. ф-лу (3.32))

$$\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2} \hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2} = \hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2} \hat{\mathcal{F}}_{\pi/2} = \hat{\mathcal{E}}. \quad (3.38)$$

Ця властивість виводиться як частинний випадок загальної формули (3.32). Подіємо оператором  $\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}$  на праву частину формули (3.37). Із врахуванням (3.38) в результаті отримуємо:

$$\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2} \hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}[f(x)] = f(x) = \frac{k}{2\pi d_0} \int_{-\infty}^{\infty} F \left( \frac{k}{d_0} y \right) \exp \left( i \frac{k}{d_0} xy \right) dy \quad (3.39)$$

Пара рівнянь (3.37) і (3.39) описує пряме і зворотнє фур'є-перетворення<sup>3</sup> з врахуванням оптичних констант.

<sup>3</sup>В нашому випадку, виходячи із означень (2.1)-(2.2), оператор прямого фур'є-перетворення  $\hat{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}$  і, відповідно, оператор зворотнього фур'є-перетворення  $\hat{\mathcal{F}}^{-1} = \hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}$ .

Якщо ввести оператор парності  $\hat{\mathcal{P}}[f(x)] = f(-x)$ , то кратне застосування операторів  $\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}$  і  $\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}$  характеризується наступними фундаментальними властивостями [28]

$$\hat{\mathcal{F}}_0 = \hat{\mathcal{E}}; \quad (3.40)$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2} = \hat{\mathcal{F}}; \quad \hat{\mathcal{F}}_{\pi/2} = \hat{\mathcal{F}}\hat{\mathcal{P}}; \quad (3.41)$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{-\pi} = \hat{\mathcal{P}}; \quad \hat{\mathcal{F}}_{\pi} = \hat{\mathcal{P}}; \quad (3.42)$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{-3\pi/2} = \hat{\mathcal{F}}\hat{\mathcal{P}}; \quad \hat{\mathcal{F}}_{3\pi/2} = \hat{\mathcal{F}}; \quad (3.43)$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{2\pi n} = \hat{\mathcal{F}}_0 = \hat{\mathcal{E}}; \quad \hat{\mathcal{F}}_{-2\pi n} = \hat{\mathcal{F}}_0 = \hat{\mathcal{E}}. \quad (3.44)$$

Властивість (3.41) випливає із формул (3.36) і (3.37). Далі, повторна дія операторів  $\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}$  і  $\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}$  характеризується властивістю (3.42). Властивість (3.43) характеризує результат послідовної дії операторів  $\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_{-\pi}$  і, відповідно, операторів  $\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_{\pi}$ . Властивість (3.44) характеризує повний цикл, рівний  $2\pi$ , при дії операторів  $\hat{\mathcal{F}}_{\pm\pi/2}$ .

#### 3.4. Властивості спряжених дробових фур'є-образів.

Дослідимо властивості операторів  $\hat{\mathcal{F}}_{\pm\pi/2}$  в загальному випадку ДФП. Знайдемо явний вигляд інтегрального перетворення, яке відповідає дії оператора  $\hat{\mathcal{F}}_{\phi}\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}$ . Для цього достатньо в формулі (3.18) зробити заміну  $\phi \rightarrow \phi + \pi/2$ . Тоді отримуємо інтегральне перетворення вигляду

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_{\phi}\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}[f(x)] &= U_p(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi d_0}} \frac{\exp\left(i\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{\cos\phi}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-i\frac{k \operatorname{tg}\phi}{2d_0}[x^2 + y^2]\right) \exp\left(-i\frac{kxy}{d_0 \cos\phi}\right) dy, \end{aligned} \quad (3.45)$$

де  $U_p(x)$  - будемо називати *спряженим дробовим фур'є-образом*.

Покажемо, що за аналогією (3.39) для спряженого дробового фур'є-образу виконується формула

$$u_p(x) = \hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}[U_p(x)] = \hat{\mathcal{F}}^{-1}[U_p(x)], \quad (3.46)$$

Для доведення цієї формули застосуємо оператор  $\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}$  згідно означення до лівої і правої частин рівняння (3.18). В результаті, враховуючи формулу (3.38), для лівої частини отримуємо:

$$\hat{\mathcal{F}}_{-\phi}\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}[f(x)] = u_p(x). \quad (3.47)$$

Тепер покажемо, що

$$\begin{aligned} &\frac{k}{2\pi d_0} \frac{\exp\left(i\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{\cos\phi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-i\frac{k \operatorname{tg}\phi}{2d_0}[z^2 + y^2]\right) \\ &\times \exp\left(i\frac{k}{d_0}\left[x - \frac{y}{\cos\phi}\right]z\right) dydz = u_p(x). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Для обчислення інтегралу по  $z$  використаємо формулу для фур'є-образу функції Френеля [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\frac{x^2}{2\beta_0^2}\right) \exp(-i\omega x) dx = \beta_0 \sqrt{2\pi i} \exp\left(-i\frac{\beta_0^2 \omega^2}{2}\right). \quad (3.49)$$

Для нашого випадку отримуємо

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\frac{k \operatorname{tg}\phi}{2d_0}z^2\right) \exp\left(-i\frac{k}{d_0}\left[x - \frac{y}{\cos\phi}\right]z\right) dz \right\}^* \\ &= \sqrt{\frac{-2\pi i d_0}{k \operatorname{tg}\phi}} \exp\left(i\frac{k}{2d_0 \operatorname{tg}\phi}\left[x - \frac{y}{\cos\phi}\right]^2\right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Підстановка (3.50) в (3.48), враховуючи, що  $\sqrt{-i} = \exp(-i\pi/4)$  і  $1/\cos^2\phi - \operatorname{tg}^2\phi = 1$ , дає формулу (3.17). Таким чином, ми довели формулу (3.46).

Покажемо, що для спряжених дробових фур'є-образів виконуються наступні теореми.

**Пряма теорема згортки:** *Якщо для двох оптичних сигналів  $f_1(x)$  і  $f_2(x)$  задані дробові фур'є-перетворення*

$$u_{p_1}(x) = \hat{\mathcal{F}}_{-\phi_1}[f_1(x)], \quad v_{p_2}(x) = \hat{\mathcal{F}}_{-\phi_2}[f_2(x)] \quad (3.51)$$

*порядків  $p_1$  і  $p_2$ , то спряжений дробовий фур'є-образ згортки дробових фур'є-перетворень  $u_{p_1}(x)$  і  $v_{p_2}(x)$  рівна добутку спряжених дробових фур'є-образів  $U_{p_1}(x)$  і  $V_{p_2}(x)$ :*

$$\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}[u_{p_1}(x) \otimes v_{p_2}(x)] = U_{p_1}(x) \cdot V_{p_2}(x). \quad (3.52)$$



Для доведення запишемо ліву частину формули (3.52) в розгорнутому виді:

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}[u_{p_1}(x) \otimes v_{p_2}(x)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_{p_1}(x_1) v_{p_2}(y-x_1) \exp\left(-i \frac{k}{d_0} xy\right) dx_1 dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_{p_1}(x_1) v_{p_2}(z) \exp\left(-i \frac{k}{d_0} x[x_1+z]\right) dx_1 dz \\
&= U_{p_1}(x) \cdot V_{p_2}(x),
\end{aligned} \tag{3.53}$$

що доводить теорему.

**Обернена теорема згортки:** *Спряжений дробовий фур'є-образ добутку дробових фур'є-перетворень  $u_{p_1}(x)$  і  $v_{p_2}(x)$  рівна згортці спряжених дробових фур'є-образів  $U_{p_1}(x)$  і  $V_{p_2}(x)$ :*

$$\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}[u_{p_1}(x) \cdot v_{p_2}(x)] = U_{p_1}(x) \otimes V_{p_2}(x). \tag{3.54}$$

Доведення теореми аналогічне.

Таким чином, приходимо до висновку, що для дробового перетворення і спряженого дробового фур'є-образу оператор  $\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}$  володіє тими самими властивостями, як і при точному фур'є-перетворенні [1].

Легко показати, що ДФП  $u_p(x)$  в результаті кратної дії оператора  $\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}$  (еквівалентно, як і кратної дії оператора  $\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}$ ) характеризується наступними фундаментальними властивостями:

$$\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}[u_p(x)] = U_p(x), \tag{3.55}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{-\pi}[u_p(x)] = \hat{\mathcal{F}}_{\pi}[u_p(x)] = u_p(-x), \tag{3.56}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{-3\pi/2}[u_p(x)] = \hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}[u_p(x)] = U_p(-x), \tag{3.57}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{-2\pi}[u_p(x)] = \hat{\mathcal{F}}_{2\pi}[u_p(x)] = u_p(x). \tag{3.58}$$

відповідно дія оператора  $\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}$  (еквівалентно, як і кратної дії оператора  $\hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}$ ) на спряжене ДФП  $U_p(x)$  характеризується такими фундаментальними властивостями:

$$\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2}[U_p(x)] = u_p(-x), \tag{3.59}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{-\pi}[U_p(x)] = \hat{\mathcal{F}}_{\pi}[U_p(x)] = U_p(-x), \tag{3.60}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{-3\pi/2}[U_p(x)] = \hat{\mathcal{F}}_{\pi/2}[U_p(x)] = u_p(x), \tag{3.61}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{-2\pi}[U_p(x)] = \hat{\mathcal{F}}_{2\pi}[U_p(x)] = U_p(x). \tag{3.62}$$

Ці властивості можна проілюструвати з допомогою рис.1.

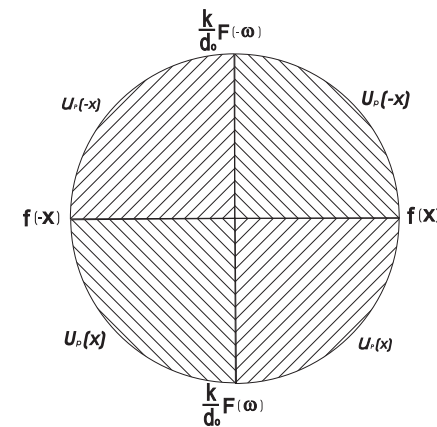


Рис. 1. Діаграма формування фур'є-образу та областей спряженого дробового фур'є-образу.

Доведемо, зокрема, властивість (3.56). Якщо виходити із означень (3.46) і (3.18), то при дії оператора  $\hat{\mathcal{F}}_{\pm\pi}$  необхідно зробити заміну  $\phi \rightarrow \phi + \pi$ . В результаті  $\text{tg } \phi \rightarrow \text{tg } \phi$ ,  $\sin \phi \rightarrow -\sin \phi$ ,  $\cos \phi \rightarrow -\cos \phi$ . Тепер в інтегралах зробимо заміну  $y = -y$ , яка не змінює означень (3.46) і (3.18), до доводить властивість (3.56).

Таким чином, на основі формул (3.58)-(3.62) приходимо до важливого висновку, що пара спряжених перетворень  $u_p(x)$  і  $U_p(x)$  теж характеризується повним циклом  $2\pi$  (еквівалентно по параметру  $p$  повним циклом 4), що є узагальненням властивостей (3.40)-(3.44) точного фур'є-перетворення. Незалежно від значення параметра  $p$  при циклі відбуваються взаємопереходи ДФП  $u_p(x)$  в спряжене перетворення  $U_p(x)$  і, навпаки. У від'ємному напрямі (за годинниковою стрілкою), який вибраний за означення (3.17) дробового фур'є-перетворення, спряжене перетворення  $U_p(x)$  випереджує на чверть періоду базове перетворення  $u_p(x)$ . В протилежному напрямі, навпаки, випереджує на чверть періоду базове перетворення  $u_p(x)$ .

### 3.5. Частотне представлення спряжених ДФП

Базові (координатні) представлення спряжених дробових фур'є-образів  $u_p(x)$  і  $U_p(x)$  в граничних точках мають свої особливості:  $u_p(x)$  в точках  $\phi = (2n + 1)\pi/2$  ( $p = 2n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$ ) і, відповідно,  $U_p(x)$  в точках  $\phi = 2n\pi/2$  ( $p = 2n$ ). Ці особливості пов'язані з тим, що в даних точках ядро інтегральних перетворень (3.17) і (3.18) теоретично вироджується в  $\delta$ -функцію [4, 28]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi i \varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{i\varepsilon}\right) = \delta(x). \quad (3.63)$$

Покажемо, що при частотному представленні ДФП особливості в даних граничних точках вдається усунути.

Будемо виходити із формули (3.39). В результаті підстановки в формулу (3.17) отримуємо

$$\begin{aligned} u_p(x) &= \frac{k}{2\pi d_0} \sqrt{\frac{k}{2\pi d_0}} \frac{\exp\left(-i\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right]\right)}{\sqrt{\sin \phi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{k}{d_0}y\right) \\ &\times \exp\left(i\frac{k}{2d_0 \operatorname{tg} \phi}[z^2 + x^2]\right) \exp\left(-i\frac{k}{d_0}\left[\frac{x}{\sin \phi} - y\right]z\right) dy dz. \end{aligned} \quad (3.64)$$

В даному випадку інтеграл по  $z$  зводиться до формули (3.49). Після простих спрощень отримуємо

$$\begin{aligned} u_p(x) &= \frac{k}{2\pi d_0} \frac{\exp\left(i\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{\cos \phi}} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{k}{d_0}y\right) \\ &\times \exp\left(-i\frac{k \operatorname{tg} \phi}{2d_0}[x^2 + y^2]\right) \exp\left(i\frac{k}{d_0 \cos \phi}xy\right) dy. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Таким чином, ми вивели формулу ДФП в частотному представленні. В граничному випадку  $\phi = 0$  інтегральне перетворення (3.65) переходить у формулу (3.39). Але формула (3.65) має особливість  $\phi = \pm\pi/2$ , яких немає в координатному представленні (3.17).

За аналогічною схемою виведення в результаті підстановки (3.39) в формулу (3.18) для спряженого ДФП в частотному представленні

отримуємо наступну формулу:

$$\begin{aligned} U_p(x) &= \frac{k}{2\pi d_0} \frac{\exp\left(-i\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right]\right)}{\sqrt{\sin \phi}} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{k}{d_0}y\right) \\ &\times \exp\left(i\frac{k}{2d_0 \operatorname{tg} \phi}[x^2 + y^2]\right) \exp\left(-i\frac{k}{d_0 \sin \phi}xy\right) dy. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Звідси видно, що при  $\phi = -\pi/2$ , тобто під дією оператора  $\hat{\mathcal{F}}_{-\pi/2} = \hat{\mathcal{F}}^{-1}$ , спряжене ДФП відновлює вихідний сигнал:  $U_p(x) \rightarrow f(x)$ . Навпаки, при  $\phi = \pi/2$  відбувається перехід:  $U_p(x) \rightarrow f(-x)$ .

Слід відмітити, що частотне представлення (3.66) для спряженого ДФП з точністю до постійного множника  $\sqrt{\frac{k}{2\pi d_0}}$  співпадає з базовим (координатним) представленням (3.17).

Таким чином, приходимо до важливого висновку, що на основі частотного представлення ДФП вдається легко усунути в граничних точках особливості, характерні для координатного представлення. Проте, при частотному представленні виникають нові особливості, які, навпаки, усуваються на основі координатного представлення. Тобто дві форми представлення ДФП взаємодоповнюють одна одну.

### 3.6. Властивості ДФП

*Л і н і й н і с т ь.* ДФП лінійної комбінації двох вхідних оптичних сигналів  $f_1(r)$  і  $f_2(r)$  записується лінійною комбінацією дробових фур'є-перетворень даних сигналів:

$$\hat{\mathcal{F}}^p[a_1 f_1(r) + a_2 f_2(r)] = a_1 \hat{\mathcal{F}}^p[f_1(r)] + a_2 \hat{\mathcal{F}}^p[f_2(r)], \quad (3.1)$$

де  $a_1$  і  $a_2$  - довільні комплексні числа.

*Н е п е р е р в н о с т ь.* Це одна із фундаментальних властивостей ДФП. Два дробові фур'є-перетворення різних порядків  $p_1$  і  $p_2$  описуються наступною теоремою [21, 27, 28]

$$\hat{\mathcal{F}}^{p_1+p_2}[f(r)] = \hat{\mathcal{F}}^{p_1}[\hat{\mathcal{F}}^{p_2}[f(r)]] = \hat{\mathcal{F}}^{p_2}[\hat{\mathcal{F}}^{p_1}[f(r)]]. \quad (3.2)$$

Звідси випливає, що різні порядки ДФП сумуються.

*П о н е р е ч н е з м і щ е н н я.* Якщо оптичний сигнал зміщений на постійну величину в напрямі вектора  $r_a$ , то ДФП записується формулою [29, 27, 28]

$$\begin{aligned} u_p(r; r_a) &= \hat{\mathcal{F}}^p[f(r - r_a)] = \exp(i\pi \sin \phi \cos \phi r_a^2) \\ &\times \exp(-i2\pi \sin \phi r_a r) u_p(r - r_a \cos \phi). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Таким чином, поперечне зміщення оптичного сигналу приводить до поперечного зміщення ДФП пропорційно  $\cos \phi$  і модуляції (з точністю до постійного квадратичного фазового множника) гармонічним сигналом з частотою пропорційно  $\sin \phi$ . Пізніше дана властивість досліджувалася в роботі Алієвої і Барбе [30].

*З м і н а м а с и т а б у.* Якщо оптичний сигнал масштабується постійним множником  $\alpha$ , то ДФП порядку  $p_1$  записується у вигляді [29, 27, 28, 30, 31]

$$u_{p_1}(r; \alpha) = \hat{\mathcal{F}}^{p_1}[f(\alpha r)] = \frac{1}{\alpha} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha^4 - 1}{\alpha^4 \operatorname{tg} \phi_1 + \cot \phi_1} \right) r^2 \right] u_{p_2} \left( \frac{\alpha r}{\sqrt{\alpha^4 \sin^2 \phi_1 + \cos^2 \phi_1}} \right). \quad (3.4)$$

Отже при зміні масштабу оптичного сигналу змінюється масштаб ДФП і одночасно змінюється порядок  $p_2$ , який визначаються як

$$\operatorname{tg} \phi_2 = \alpha^2 \operatorname{tg} \phi_1. \quad (3.5)$$

#### 4. ДФП ЯК ПРОЦЕС ЗГОРТКИ/ФІЛЬТРАЦІЇ

Відомо багато робіт, [7, 9, 10, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 27, 28] в яких дається різна оптична інтерпретація ДФП. Ми будемо виходити з того, що в переважній більшості різноманітних схем оптичної обробки інформації реалізуються, в принципі, два типи інтегральних перетворень оптичних сигналів - перетворення типу згортки і перетворення Фур'є. В роботі [42] показано, що в загальному випадку ДФП можна віднести до класу інтегральних перетворень типу згортки.

Будемо розглядати оптичні сигнали як двомірні функції просторових координат  $f(x, y) = f(\mathbf{r})$ . В силу того, що ядро ДФП є з розділеними змінними, то в загальному випадку можна записати

$$u_p(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}_1) K_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (4.1)$$

Покажемо, що ядро  $K_p(r, r_1)$  можна представити через елементарні операції. Для цього в формулі (3.18) доповнимо показник експоненти

до повного квадрату. Тоді,

$$u_p(r) = \frac{k}{2\pi d_0} \frac{\exp(-i[\pi/2 - \phi])}{\sin \phi} \exp \left( -i \frac{k \operatorname{tg} \phi}{2d_0} \mathbf{r}^2 \right) \times \int f(\mathbf{r}_1) \exp \left( i \frac{k}{2d_0 \operatorname{tg} \phi} \left[ \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}}{\cos \phi} \right]^2 \right) d\mathbf{r}_1. \quad (4.2)$$

Якщо використати позначення для функції Френеля [1]

$$z(\mathbf{r}, \beta) = \exp \left( \frac{i\beta^2 \mathbf{r}^2}{2} \right). \quad (4.3)$$

то формула (4.2) записується в операторній формі

$$u_p(r) = \frac{k}{2\pi d_0} \frac{\exp(-i[\pi/2 - \phi])}{\sin \phi \cos^2 \phi} \times \left\{ \left[ f \left( \frac{\mathbf{r}}{\cos \phi} \right) \otimes z_1 \left( \mathbf{r}; \frac{k}{d_0 \operatorname{tg} \phi \cos^2 \phi} \right) \right] \times z_2^* \left( \mathbf{r}; \frac{k \operatorname{tg} \phi}{d_0} \right) \right\}, \quad (4.4)$$

Якщо виходити з формули (3.66), то для спряженого ДФП отримуємо аналогічне операторне рівняння

$$U_p(r) = \left( \frac{k}{2\pi d_0} \right)^2 \frac{\exp(-i[\pi/2 - \phi])}{\sin \phi \cos^2 \phi} \times \left\{ \left[ F \left( \frac{k\mathbf{r}}{d_0 \cos \phi} \right) \otimes z_1 \left( \frac{k\mathbf{r}}{d_0}; \frac{d_0}{k \operatorname{tg} \phi \cos^2 \phi} \right) \right] \times z_2^* \left( \frac{k\mathbf{r}}{d_0}; \frac{d_0 \operatorname{tg} \phi}{k} \right) \right\}. \quad (4.5)$$

Звідси видно, що ДФП можна інтерпретувати як процес згортки вхідного оптичного сигналу, чи його фур'є-спектру з функцією Френеля і одночасної фільтрації з другою комплексно-спряженою функцією Френеля. Слід відмітити, що згортка тут особлива тим, що вхідний оптичний сигнал масштабується параметром  $p$  ДФП.

#### 5. МЕТОД РОЗПОДІЛУ СИГНАЛІВ

Метод координатно-частотного розподілу сигналів запропонований в роботі [38].

### 5.1. Базові функціонали розподілу сигналів

За означенням координатного-частотного розподілу стаціонарних оптичних сигналів  $f_1(\mathbf{r})$  і  $f_2(\mathbf{r})$  виберемо базові функціонали в формі функції невизначеності (ambiguity function) [38], яка вперше була запропонована Вудвордом [24] для радіосигналів, а пізніше Папулісом [33] для оптичних сигналів:

координатне представлення:

$$\mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0) = \int f_1\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}_0}{2}\right) f_2^*\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_0}{2}\right) \exp(-i\boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (5.1)$$

просторово-частотне представлення:

$$\mathcal{W}_{F_1 F_2^*}(\boldsymbol{\omega}_0; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int F_1\left(\boldsymbol{\omega} + \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2}\right) F_2^*\left(\boldsymbol{\omega} - \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2}\right) \exp(i\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_0) d\boldsymbol{\omega}. \quad (5.2)$$

Тут  $f_2^*(\mathbf{r})$  і  $F_2^*(\boldsymbol{\omega})$  - комплексно-спряжені другий сигнал і його фур'є-образ.

Для функціоналів (5.1) і (5.2) прийняті наступні позначення: перша координата, як власна, відповідає формі представлення розподілу, а друга - спряжена координата.

В частинному випадку  $f_1(\mathbf{r}) = f_2(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$  функціонали (5.1) і (5.2) будемо називати квадратичним, або просто координатно-частотним розподілом сигналу. Далі дані функціонали будемо називати розподілом оптичного сигналу.

**Теорема тотожності.** *Якщо для двох сигналів виконується рівність Парсеваля [1]*

$$\langle f_1(\mathbf{r}), f_2^*(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \langle \hat{\mathcal{F}}\{f_1(\mathbf{r})\}, \hat{\mathcal{F}}\{f_2^*(\mathbf{r})\} \rangle, \quad (5.3)$$

то координатне (5.1) і частотне (5.2) представлення розподілу даних сигналів є тотожним [38]

$$\mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0) \equiv \mathcal{W}_{F_1 F_2^*}(\boldsymbol{\omega}_0; \mathbf{r}_0). \quad (5.4)$$

Виконання даної теореми має принципово важливе значення. По-перше, вона встановлює знак рівності між двома формами представлення розподілу двох оптичних сигналів як в координатній, так і просторово-частотній площинах. По-друге, така рівність характеризує фундаментальну властивість розподілу оптичних сигналів, як нової спільної функції спряжених координат  $\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0$ .

**Теорема згортки.** Якщо оптичний сигнал  $f_3(\mathbf{r})$  можна записати у вигляді згортки двох сигналів

$$f_3(\mathbf{r}) = f_1(\mathbf{r}) \otimes f_2(\mathbf{r}), \quad F_3(\boldsymbol{\omega}) = F_1(\boldsymbol{\omega}) F_2(\boldsymbol{\omega}), \quad (5.5)$$

то розподіл  $\mathcal{W}_{f_3 f_3^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0)$  записується операторним рівнянням згортки розподілів:

$$\mathcal{W}_{f_3 f_3^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0) = \mathcal{W}_{f_1 f_1^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0) \otimes_{\mathbf{r}_0} \mathcal{W}_{f_2 f_2^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0). \quad (5.6)$$

Справедлива і обернена теорема згортки. Згортка фур'є-образів двох сигналів

$$F_3(\boldsymbol{\omega}) = F_1(\boldsymbol{\omega}) \otimes F_2(\boldsymbol{\omega}), \quad f_3(\mathbf{r}) = f_1(\mathbf{r}) f_2(\mathbf{r}), \quad (5.7)$$

записується операторним рівнянням згортки розподілів:

$$\mathcal{W}_{f_3 f_3^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0) = \mathcal{W}_{f_1 f_1^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0) \otimes_{\boldsymbol{\omega}_0} \mathcal{W}_{f_2 f_2^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0). \quad (5.8)$$

Таким чином, вибір координати згортки розподілів визначається простором згортки оптичних сигналів. В загальному випадку операторне рівняння (5.8) є формулюванням в просторі розподілів принципу просторової фільтрації оптичних зображень, який вперше опублікований в роботі Марешаля и Кроса [25].

### 5.2. Зміст спряжених координат базових функціоналів

Запишемо згортку (5.5) в просторово-частотній площині

$$F_1(\boldsymbol{\omega}_1) F_2^*(\boldsymbol{\omega}_2) = \int \int f_1(\mathbf{r}_1) f_2^*(\mathbf{r}_2) \exp(-i[\boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{r}_2]) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (5.9)$$

Тут розглядається загальний випадок, що два оптичні сигнали задані в різних площинах і тому фур'є-перетворення є незалежними. Фур'є-перетворенням.

Си і Колфілд [26] висунули ідею чотирьохвимірною опису, для якого в координатній та частотній площинах вводяться нові системи зв'язаних координат:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}_0}{2}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_0}{2}, \quad (5.10)$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega} + \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega} - \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2}, \quad (5.11)$$

Ця заміна змінних з якобіаном рівним 1 набуває особливого фізичного змісту. Із означень (5.10) і (5.11) слідує, що нові змінні, а

саме  $\mathbf{r}$  характеризує середнє значення координати і, відповідно,  $\omega$  - середнє значення просторової частоти двох порівнюючих сигналів. Тоді друга пара нових змінних  $\mathbf{r}_0$  і  $\omega_0$  характеризує різницеве значення координати і, відповідно, просторової частоти даних сигналів. Самі автори [26] відмічають, що між цими двома парами спряжених координат є принципова відмінність: координати  $\mathbf{r}$  і  $\omega$  вони називають "повільними середніми", а координати  $\mathbf{r}_0$  і  $\omega_0$  - "швидкою різницею". Пожемо, що базові функціонали (5.1) і (5.2) задаються саме різницями спряженими координатами ( $\mathbf{r}_0$ ,  $\omega_0$ )

Відомо [26], що при переході до нової системи просторових (5.10) і частотних (5.11) координат зберігаються інваріантні властивості скалярного добутку

$$\omega_1 \mathbf{r}_1 - \omega_2 \mathbf{r}_2 = \omega \mathbf{r}_0 + \omega_0 \mathbf{r}. \quad (5.12)$$

Звідси видно, що при оберненому фур'є-перетворенні розподілу (5.1) повністю відновлюється локальна крос-кореляційна функція

$$\hat{\mathcal{F}}_{\omega_0 \rightarrow \mathbf{r}}^{-1} [\mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0)] = f_1 \left( \mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}_0}{2} \right) f_2^* \left( \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_0}{2} \right), \quad (5.13)$$

яка характеризує поведінку сигналів в координатній площині. При цьому слід відмітити, що оператор  $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$  переводить різницеву просторову частоту  $\omega_0$  розподілу сигналів в середню координату  $\mathbf{r}$  їх локальної крос-кореляційної функції.

Навпаки, при прямому фур'є-перетворенні розподілу (5.2) повністю відновлюється локальний крос-кореляційний спектр сигналів,

$$\hat{\mathcal{F}}_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \omega} [\mathcal{W}_{F_1 F_2^*}(\omega_0; \mathbf{r}_0)] = F_1 \left( \omega + \frac{\omega_0}{2} \right) F_2^* \left( \omega - \frac{\omega_0}{2} \right), \quad (5.14)$$

який характеризує поведінку сигналів вже в частотній області. В цій схемі оператор  $\hat{\mathcal{F}}$  переводить різницеву координату  $\mathbf{r}_0$  розподілу сигналів в середню просторову частоту  $\omega$  їх локального крос-кореляційного спектру.

Таким чином, ми показали, що базові функціонали (5.1) і (5.2) розподілу сигналів задані в різницевих спряжених координатах ( $\mathbf{r}_0$ ;  $\omega_0$ ).

### 5.3. Зв'язок з функцією розподілу Вігнера

Застосуємо до лівої частини виразів (5.13), чи (5.14) оператор фур'є-перетворення до другої спряженої різницевої координати розподілу сигналів. В результаті отримуємо функцію взаємного розподілу Вігнера

$$\hat{\mathcal{F}}_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \omega} \hat{\mathcal{F}}_{\omega_0 \rightarrow \mathbf{r}}^{-1} [\mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0)] = \mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(\mathbf{r}; \omega). \quad (5.15)$$

Звідси приходимо до висновку, що від базових функціоналів (5.1) і (5.2) легко перейти до функції розподілу Вігнера, яка задана в спряжених середніх координатах ( $\mathbf{r}; \omega$ ). Цей взаємозв'язок через оператори фур'є-перетворення є принципово важливий з огляду на те, що відомо ряд робіт [8, 9], в яких досліджуються властивості ДФП на основі функції розподілу Вігнера.

На рис. 7.28 приведена принципова схема взаємозв'язку між базовими функціоналами і функцією розподілу Вігнера.

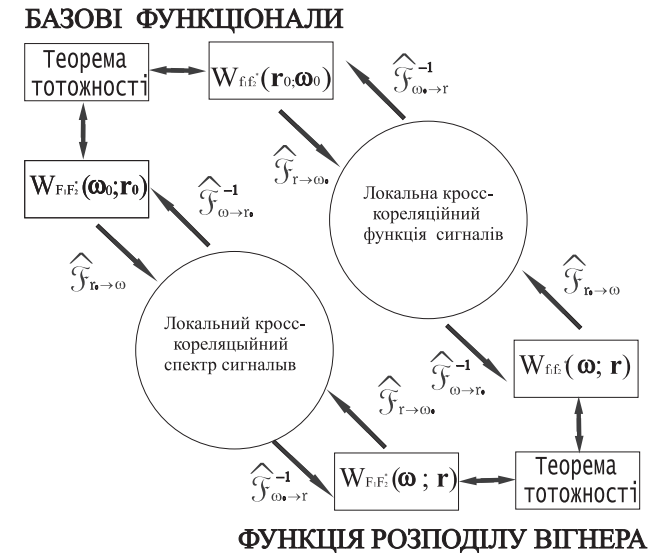


Рис. 2. Зв'язок базових функціоналів з функцією розподілу Вігнера.

Слід відмітити, що оператори  $\hat{\mathcal{F}}$  і  $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$  комутативні. За формулою (5.15) здійснюється перехід до функції розподілу Вігнера через локальну крос-кореляційну функцію (5.13) і, таким чином отримуємо координатне представлення функції взаємного розподілу Вігнера двох оптичних сигналів:

$$\mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(\mathbf{r}; \omega) = \int f_1 \left( \mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}_0}{2} \right) f_2^* \left( \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_0}{2} \right) \exp(-i\omega \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0. \quad (5.16)$$

Навпаки, при дії подвійного оператора  $\hat{\mathcal{F}}^{-1} \hat{\mathcal{F}}$  здійснюється перехід до функції розподілу Вігнера через локальний крос-кореляційний спектр сигналів (5.14) і в результаті отримуємо просторово-частотне

представлення функції взаємного розподілу Вігнера:

$$\mathcal{W}_{F_1 F_2^*}(\boldsymbol{\omega}; \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int F_1\left(\boldsymbol{\omega} + \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2}\right) F_2^*\left(\boldsymbol{\omega} - \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2}\right) \exp(i\boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{r}) d\boldsymbol{\omega}. \quad (5.17)$$

Як видно, виконання теореми тотожності характеризує фундаментальну властивість розподілу оптичних сигналів як в різницевих  $(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0)$  так і середніх  $(\mathbf{r}; \boldsymbol{\omega})$  спряжених координатах.

## 6. РОЗПОДІЛ ДФП

Для дослідження властивостей ДФП використаємо метод розподілу сигналів, описаний в попередньому розділі 5. Будемо виходити із операторного рівняння (4.4). Нами показано [38, 39], що рівняння такого типу можна записати еквівалентним операторним рівнянням згортки розподілів:

$$\mathcal{W}_{u_p u_p^*}(r_0; \boldsymbol{\omega}_0) = \left(\frac{k}{2\pi d_0}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin \phi \cos^2 \phi}\right)^2 \times \left\{ \mathcal{W}_{gg^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0) \otimes_{\mathbf{r}_0} \mathcal{W}_{z_1 z_1^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0) \cdot \otimes_{\boldsymbol{\omega}_0} \mathcal{W}_{z_2 z_2^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0) \right\} \quad (6.18)$$

Розподіли сферичних хвиль рівні:

$$\mathcal{W}_{z_1 z_1^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0) = \left(\frac{2\pi d_0 \operatorname{tg} \phi \cos^2 \phi}{k}\right)^2 \delta^2\left(\mathbf{r}_0 - \frac{d_0 \operatorname{tg} \phi \cos^2 \phi}{k} \boldsymbol{\omega}_0\right); \quad (6.19)$$

$$\mathcal{W}_{z_2 z_2^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0) = (2\pi)^2 \delta^2\left(\boldsymbol{\omega}_0 - \frac{k \operatorname{tg} \phi}{d_0} \mathbf{r}_0\right). \quad (6.20)$$

Із врахуванням масштабування, розподіл вхідного сигналу можна записати

$$\mathcal{W}_{gg^*}(r_0; \boldsymbol{\omega}_0) = \cos^2 \phi \mathcal{W}_{ff^*}\left(\frac{r_0}{\cos \phi}; \cos \phi \boldsymbol{\omega}_0\right). \quad (6.21)$$

Тоді в рівнянні (6.18) перша згортка по координаті  $\mathbf{r}_0$  записується розподілом

$$\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0) = \mathcal{W}_{ff^*}\left(\frac{\mathbf{r}_0}{\cos \phi} - \frac{d_0 \sin \phi}{k} \boldsymbol{\omega}_0; \cos \phi \boldsymbol{\omega}_0\right). \quad (6.22)$$

Якщо виконати другу згортку по просторовій частоті  $\boldsymbol{\omega}_0$ , то остаточно отримуємо розподіл ДФП [40]

$$\mathcal{W}_{u_p u_p^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0) = \mathcal{W}_{ff^*}\left(\cos \phi \mathbf{r}_0 - \frac{d_0}{k} \sin \phi \boldsymbol{\omega}_0; \frac{k}{d_0} \sin \phi \mathbf{r}_0 + \cos \phi \boldsymbol{\omega}_0\right). \quad (6.23)$$

На основі формули (6.23) приходимо до важливого висновку, що дробовому фур'є-перетворенні відповідає лінійне перетворення координат  $(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0)$  розподілу вхідного сигналу  $f(r)$ , яке описується матрицею

$$\mathbf{T}_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\frac{d_0}{k} \sin \phi \\ \frac{k}{d_0} \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Дана матриця описує поворот у від'ємному напрямі (за годинниковою стрілкою) розподілу вхідного сигналу на кут  $\phi = p\pi/2$ , пропорційний параметру  $p$  ДФП.

Важливо відмітити, що матриця (6.24) завжди унімодулярна  $\det \mathbf{T}_\phi = 1$ . Частотне представлення розподілу описується матрицею  $\mathbf{T}_\phi^{-1}$ .

На рис. 3 показані розподіл прямокутного імпульсу (зліва) і відповідно розрахований розподіл ДФП прямокутного імпульсу (справа). Як видно, на інформаційній діаграмі розподіл вихідного сигналу повертається і одночасно деформується.

Покажемо, що з позицій згортки і фільтрації оптичного сигналу розкривається механізм поворот розподілу ДФП на інформаційній діаграмі. Матрицю (6.24) можна представити добутком трьох матриць

$$\mathbf{T}_\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos \phi} & 0 \\ 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{d_0 \sin \phi \cos \phi}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k \operatorname{tg} \phi}{d_0} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Перша матриця описує масштабування оптичного сигналу. На інформаційній діаграмі розподіл  $\mathcal{W}_{ff^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0)$  розтягується вздовж координатної осі  $\mathbf{r}_0$  пропорційно  $1/\cos \phi$  і одночасно зтискається вздовж частотної осі  $\boldsymbol{\omega}_0$  пропорційно  $\cos \phi$ . Така деформація типова при фур'є-перетворенні.

Друга матриця описує згортку з функцією Френеля. В результаті розподіл  $\mathcal{W}_{ff^*}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\omega}_0)$  зазнає деформації поперечного зсуву по

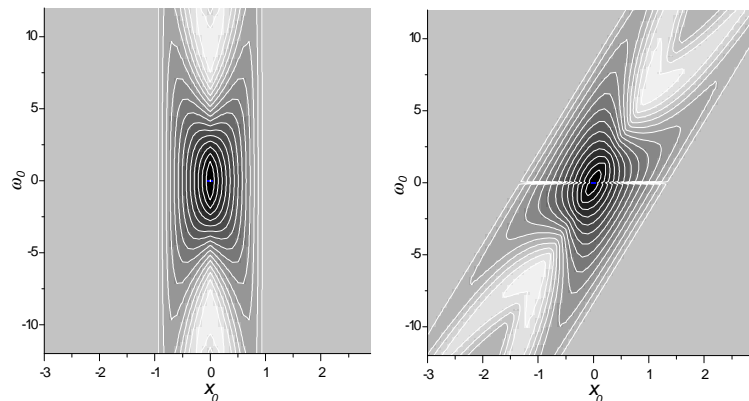


Рис. 3. Поворот розподілу прямокутного імпульсу при ДФП

координатній осі  $\mathbf{r}_0$  пропорційно величині  $d_0 \sin \phi \cos \phi / k$ . Аналогічно третя матриця описує фільтрацію оптичного сигналу з функцією Френеля, що еквівалентно згортці в частотній площині. Це відображається деформацією поперечного зсуву розподілу по частотній осі  $\omega_0$  пропорційно величині  $k \operatorname{tg} \phi / d_0$ .

На рис. 4 показана послідовність трьох деформацій для простого випадку розподілу оптичного сигналу у вигляді квадрата  $KLMN$ . Як видно, без попередньої деформації розтягу/зтиску здійснити поворот неможливо.

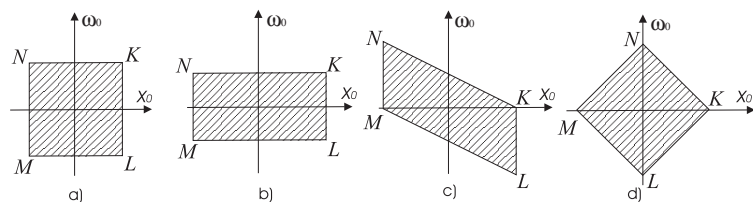


Рис. 4. Схема формування повороту розподілу (а) на кут  $\phi = \pi/4$  в результаті деформацій розтягу/зтиску (b), поперечного зсуву по осі  $x_0$  (c) і поперечного зсуву по осях  $\omega_0$  (d).

## 7. ВЛАСТИВОСТІ СПРЯЖЕНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ДФП

### 7.1. Відновлення спряжених зображень

Для формування зображення оптичного сигналу необхідно, щоб  $f_1(\mathbf{r}) = f_2(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$ . В цьому випадку використання базових функціоналів має свої переваги.

При умові  $\mathbf{r}_0 = 0$  в координатній площині два комплексно-спряжені оптичні сигнали суміщуються глобально по всім координатам. Це значить, що при заміні (5.10) середня координата  $\mathbf{r}$  вироджується в координату оптичного сигналу  $f(\mathbf{r})$ . Тоді за розподілом оператором зворотнього фурє-перетворення повністю відновлюється інтенсивність оптичного сигналу:

$$\hat{\mathcal{F}}_{\omega_0 \rightarrow \mathbf{r}}^{-1} [\mathcal{W}_{ff^*}(0; \omega_0)] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathcal{W}_{ff^*}(0; \omega_0) \exp(i\omega_0 \mathbf{r}) d\omega_0 = |f(\mathbf{r})|^2. \quad (7.26)$$

Таку схему будемо називати *прямою схемою відновлення*.

Навпаки, при умові  $\omega_0 = 0$  оператором прямого фур'є-перетворення відновлюється вігнерівський (енергетичний) спектр просторових частот оптичного сигналу:

$$\hat{\mathcal{F}}_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \omega} [\mathcal{W}_{FF^*}(0; \mathbf{r}_0)] = \int \mathcal{W}_{FF^*}(0; \mathbf{r}_0) \exp(-i\mathbf{r}_0 \omega) d\mathbf{r}_0 = |F(\omega)|^2. \quad (7.27)$$

Дану схему будемо називати *зворотною схемою відновлення*.

Два зображення, які відновлюються за координатно-частотним розподілом операторами фур'є-перетворення будемо називати *спряженими зображеннями*:  $|f(\mathbf{r})|^2$  - зображення в координатній площині і, відповідно,  $|F(\omega)|^2$  - зображення в частотній площині.

У випадку використання функції розподілу Вігнера схеми відновлення спряжених зображень принципово відмінні. Оскільки такий розподіл заданий в спряжених середніх координатах  $(\mathbf{r}; \omega)$ , то глобальне суміщення комплексно спряжених оптичних сигналів не реалізується при нульовому значенні однієї із координат. Схеми відновлення мають вигляд маргінальних розподілів

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathcal{W}_{ff^*}(\mathbf{r}; \omega) d\omega = |f(\mathbf{r})|^2; \quad \int \mathcal{W}_{FF^*}(\omega; \mathbf{r}) d\mathbf{r} = |F(\omega)|^2. \quad (7.28)$$

Враховуючи результати аналізу в пп. 5.2 і 5.3, за аналогією з формулами (7.26), (7.27) можна говорити, що маргінальні розпо-

ділі (7.28) функції розподілу Вігнера набувають інтерпретації застосування операторів  $\hat{\mathcal{F}}_{\omega \rightarrow 0}^{-1}$  і  $\hat{\mathcal{F}}_{\mathbf{r} \rightarrow 0}$  відповідно, тобто зворотнього фур'є-перетворення на нульовій різницевій координаті  $\mathbf{r}_0 = 0$  і прямого фур'є-перетворення на нульовій різницевій просторовій частоті  $\omega_0 = 0$ .

В основу методу розподілу сигналів закладена ідея побудови спряжених зображень, яку можна успішно узагальнити на випадок ДФП.

Важливим моментом є поворот розподілу ДФП, який розкриває суть побудови спряженого зображення.

Застосуємо до базового функціоналу (5.1) поворот на кут  $\pi/2$ , який описується матрицею точного фур'є-перетворення [38]

$$\mathbf{T}_{\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d_0}{k} \\ \frac{k}{d_0} & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

В результаті

$$\mathcal{W}_{ff^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0) \implies \mathcal{W}_{ff^*}\left(-\frac{d_0}{k} \omega_0; \frac{k}{d_0} \mathbf{r}_0\right) \equiv \mathcal{W}_{FF^*}\left(\frac{k}{d_0} \mathbf{r}_0; -\frac{d_0}{k} \omega_0\right). \quad (7.30)$$

Якщо до останнього розподілу застосувати пряму схему відновлення (7.26), то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathcal{W}_{FF^*}\left(0; -\frac{d_0}{k} \omega_0\right) \exp(i\omega_0 \mathbf{r}) d\omega_0 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int |F(\omega)|^2 \exp\left[i\left(\mathbf{r} - \frac{d_0}{k} \omega\right) \omega_0\right] d\omega d\omega_0 \\ &= \left(\frac{k}{2\pi d_0}\right)^2 \left|F\left(\frac{k}{d_0} \mathbf{r}\right)\right|^2. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Таким чином, з точністю до постійного множника ми реалізували зворотню схему відновлення (7.27) і в результаті отримали спряжене зображення. Звідси приходимо до висновку, що при повороті розподілу вхідного сигналу на кут  $\pi/2$  зворотня схема відновлення (7.27) реалізується через пряму схему (7.26) і навпаки. Як буде показано далі, множник  $d_0/k$ , який появляється при переході до другої схеми відновлення, є суттєвий. Застосуємо цей підхід до розподілу ДФП.

## 7.2. Відновлення зображення ДФП

Використовуючи схему (7.26) на основі розподілу (6.23) отримуємо формулу відновлення розподіл інтенсивності світла

$$\begin{aligned} |u_p(\mathbf{r})|^2 &= \hat{\mathcal{F}}^{-1}[\mathcal{W}_{u_p u_p^*}(0; \omega_0)] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathcal{W}_{ff^*}\left(-\frac{d_0}{k} \sin \phi \omega_0; \cos \phi \omega_0\right) \exp(i\omega_0 \mathbf{r}) d\omega_0. \end{aligned} \quad (7.32)$$

який формується в площині дробовому фур'є-перетворенні і реєструється експериментально.

Якщо за означенням (5.1) розписати підінтегральний розподіл вхідного сигналу, то отримуємо формулу

$$|u_p(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{(2\pi \sin \phi)^2} \left| \int f(\mathbf{r}_1) \exp\left(i \frac{k}{2d_0 \tan \phi} \mathbf{r}_1^2\right) \exp\left(-\frac{k \mathbf{r} \mathbf{r}_1}{d_0 \sin \phi}\right) d\mathbf{r}_1 \right|^2. \quad (7.33)$$

яка безпосередньо впливає із означення дробового фур'є-перетворення з точністю до фазового множника - сферичної хвилі  $\exp(ik\mathbf{r}^2/2d_0 \tan \phi)$ , який не впливає на розподіл інтенсивності світла.

Дослідимо тепер більш детально другий шлях відновлення інтенсивності світла. На основі теореми тотожності (5.4) можна записати

$$\mathcal{W}_{ff^*}\left(-\frac{d_0}{k} \sin \phi \omega_0; \cos \phi \omega_0\right) \equiv \mathcal{W}_{FF^*}\left(\cos \phi \omega_0; -\frac{d_0}{k} \sin \phi \omega_0\right). \quad (7.34)$$

Використовуючи частотне представлення базового функціоналу (5.2) схему відновлення (7.26) можна записати

$$\begin{aligned} |u_p(\mathbf{r})|^2 &= \int \int F\left(\omega + \frac{\cos \phi}{2} \omega_0\right) F^*\left(\omega - \frac{\cos \phi}{2} \omega_0\right) \\ &\times \exp\left(-i \frac{d_0}{k} \sin \phi \omega_0 \omega\right) \exp(i\omega_0 \mathbf{r}) d\omega d\omega_0. \end{aligned} \quad (7.35)$$

За аналогією (5.11) зробимо заміну змінних

$$\omega_1 = \omega + \frac{\cos \phi}{2} \omega_0; \quad \omega_2 = \omega - \frac{\cos \phi}{2} \omega_0, \quad (7.36)$$

для якої якобіан переходу рівний  $|1/\cos \phi|$ . Тоді на основі виразу (7.35) отримуємо наступну формулу для відновлення інтенсивності світла

$$|u_p(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{\cos^2 \phi}$$



$$\times \left| \frac{1}{2\pi} \int F(\omega_1) \exp\left(-i \frac{d_0}{2k} \operatorname{tg}\phi \omega_1^2\right) \exp\left(i \frac{r\omega_1}{\cos\phi}\right) d\omega_1 \right|^2 \quad (7.37)$$

Таким чином, з використанням методу розподілу сигналів ми вивели нову формулу відновлення зображення ДФП на основі частотного представлення базового функціоналу. Ця формула з точністю до фазового множника - збіжної сферичної хвилі  $\exp(-i k \operatorname{tg}\phi r^2/2d_0)$  співпадає з означенням.

### 7.3. Відновлення спряженого зображення ДФП

Повернемо розподіл ДФП (6.23) на кут  $\pi/2$ . Такий поворот описується добутком матриць

$$\mathbf{T}_{\phi+\pi/2} = \mathbf{T}_{\phi} \mathbf{T}_{\pi/2} = \begin{bmatrix} -\sin\phi & -\frac{d_0}{k} \cos\phi \\ \frac{k}{d_0} \cos\phi & -\sin\phi \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

На основі (7.38) розподіл ДФП набуває вигляду

$$\mathcal{W}_{U_p U_p^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0) = \left(\frac{d_0}{k}\right)^2 \times \mathcal{W}_{ff^*} \left( -\sin\phi \mathbf{r}_0 - \frac{d_0}{k} \cos\phi \omega_0; \frac{k}{d_0} \cos\phi \mathbf{r}_0 - \sin\phi \omega_0 \right) \quad (7.39)$$

Тоді за аналогією (7.32), відновлення спряженого зображення ДФП можна записати

$$|U_p(\mathbf{r})|^2 = \left(\frac{d_0}{k}\right)^2 \hat{\mathcal{F}}_{\omega_0 \rightarrow \mathbf{r}}^{-1} \left[ \mathcal{W}_{ff^*} \left( -\frac{d_0}{k} \cos\phi \omega_0; -\sin\phi \omega_0 \right) \right]. \quad (7.40)$$

Звідси отримуємо формулу

$$|U_p(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{\cos^2\phi} \left| \int f(\mathbf{r}_2) \exp\left(-i \frac{k \operatorname{tg}\phi}{2d_0} \mathbf{r}_2^2\right) \exp\left(-\frac{k \mathbf{r} \mathbf{r}_2}{d_0 \cos\phi}\right) d\mathbf{r}_2 \right|^2, \quad (7.41)$$

за якою розраховується спряжене зображення ДФП. Ми знову прийшли до аналогічної ситуації, що використання матриці повороту  $\mathbf{T}_{\pi/2}$  еквівалентно тому, що теоретична зворотня схема відновлення (7.27) реалізується оптичним шляхом через пряму схему (7.26), де просторова частота задається співвідношенням  $\omega = (k/d_0)\mathbf{r}$ . В цьому випадку пара спряжених зображень (7.37) і (7.41), заданих в

єдиній системі координат, дозволяє досліджувати властивості ДФП в області  $p \rightarrow 0$ .

Якщо використати частотне представлення (7.34), то отримуємо для спряженого зображення формулу

$$|U_p(\mathbf{r})|^2 = \left(\frac{d_0}{k}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\phi} \times \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_2) \exp\left(i \frac{d_0}{2k \operatorname{tg}\phi} \omega_2^2\right) \exp\left(-i \frac{r\omega_2}{\sin\phi}\right) d\omega_2 \right|^2 \quad (7.42)$$

через частотне представлення ДФП. Дане зображення є спряженим до (7.37), пара яких описує властивості ДФП в області  $p \rightarrow 1$ .

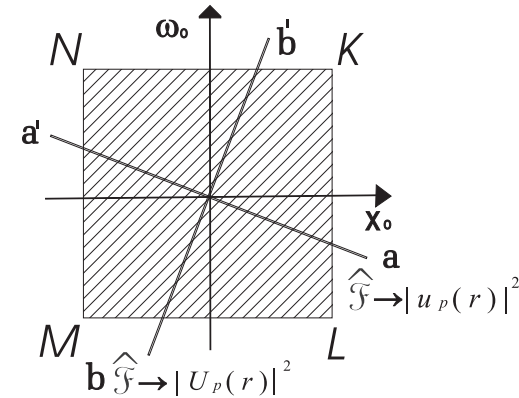


Рис. 5. Відновлення спряжених зображень ДФП на інформаційній діаграмі  $(x_0, \omega_0)$ .

На рис. 5 показано взаємне розміщення спряжених зображень ДФП на інформаційній діаграмі. Оператором прямого фур'є-перетворення по розрізі розподілу  $aa'$  легко відновлюється зображення ДФП. Аналогічно оператором прямого фур'є-перетворення по розрізі розподілу  $bb'$  відновлюється спряжене зображення ДФП.

### 7.4. Спряжені зображення прямокутного імпульсу

Для розрахунку спряжених зображень прямокутного імпульсу використаємо методологію описану в роботі [39]. Розподіл прямокутного

імпульсу можна записати наступним чином

$$\mathcal{W}_{ff^*}(x_0; \omega_0) = 2a \left\{ \frac{\sin \left[ \omega_0 \left( a + \frac{x_0}{2} \right) \right]}{\omega_0 a} \operatorname{rect} \left( \frac{a + x_0}{2a} \right) + \frac{\sin \left[ \omega_0 \left( a - \frac{x_0}{2} \right) \right]}{\omega_0 a} \operatorname{rect} \left( \frac{a - x_0}{2a} \right) \right\}. \quad (7.43)$$

Згідно прямої схеми відновлення (7.32) у випадку ДФП отримуємо

$$|u_p(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_{ff^*} \left( -\frac{d_0}{k} \sin \phi \omega_0; \cos \phi \omega_0 \right) \exp(i\omega_0 x) d\omega_0. \quad (7.44)$$

Підставляючи формулу розподілу прямокутного імпульсу в розподіл дробового фур'є перетворення (6.23) отримуємо

$$|u_p(x)|^2 = \frac{2a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \left[ \cos \phi \omega_0 \left( a - \frac{d_0}{2k} \sin \phi \omega_0 \right) \right]}{\cos \phi \omega_0 a} \times \operatorname{rect} \left( \frac{a + \frac{d_0}{k} \sin \phi \omega_0}{2a} \right) \cos(\omega_0 x) d\omega_0, \quad (7.45)$$

Згідно функції  $\operatorname{rect}$  в (7.45) межі інтегрування визначаємо з умов

$$\left| a + \frac{d_0}{k} \sin \phi \omega_0 \right| < a, \quad (7.46)$$

чи

$$0 < \frac{d_0}{2ak} \omega_0 < \frac{1}{\sin \phi} \quad (7.47)$$

Якщо зробити заміни

$$\omega_0 = \frac{2ak}{d_0} \omega, \quad (7.48)$$

$$F_0 = \frac{a^2}{\lambda d}, \quad (7.49)$$

де  $F_0$  - число Френеля, то отримуємо наступний вираз

$$|u_p(x)|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/\sin \phi} \frac{\sin[4\pi F_0 \cos \phi \omega (1 - \omega \sin \phi)]}{\cos \phi \omega} \cos(4\pi F_0 x \omega) d\omega. \quad (7.50)$$

Ця формула є узагальненням формули Асакури [43].

Для спряженого зображення ДФП формула (7.44) має наступний вигляд

$$|U_p(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_{ff^*} \left( -\frac{d_0}{k} \cos \phi \omega_0; \sin \phi \omega_0 \right) \exp(-i\omega_0 x) d\omega_0. \quad (7.51)$$

Підставивши в дану формулу розподілу прямокутного імпульсу отримуємо

$$|U_p(x)|^2 = \frac{2a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \left[ \sin \phi \omega_0 \left( a - \frac{d_0}{2k} \cos \phi \omega_0 \right) \right]}{\sin \phi \omega_0 a} \times \operatorname{rect} \left( \frac{a + \frac{d_0}{k} \cos \phi \omega_0}{2a} \right) \cos(\omega_0 x) d\omega_0, \quad (7.52)$$

межі інтегрування в даному випадку

$$\left| a + \frac{d_0}{k} \cos \phi \omega_0 \right| < a, \quad (7.53)$$

чи

$$0 < \frac{d_0}{2ak} \omega_0 < \frac{1}{\cos \phi} \quad (7.54)$$

зробивши відповідну заміну змінних

$$\omega_0 = \frac{2ak}{d_0} \omega, \quad (7.55)$$

для спряженого зображення ДФП прямокутного імпульсу отримуємо наступний вираз

$$|U_p(x)|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/\cos \phi} \frac{\sin[4\pi F_0 \sin \phi \omega (1 - \omega \cos \phi)]}{\sin \phi \omega} \cos(4\pi F_0 x \omega) d\omega. \quad (7.56)$$

Формули (7.50) і (7.56) повністю описують розподіл прямокутного імпульсу при дробовому фур'є перетворенні. Результати чисельного розрахунку, приведені на рис. 6 і рис. 7, показують, що для розподілу прямокутного імпульсу при дробовому фур'є перетворенні виконується умова самоподібності, тобто при значенні параметра  $p=1/2$  формуються самоподібні спряжені зображення.

### 7.5. Граничні випадки формування спряжених зображень.

Використовуючи частотне представлення розподілу дробового фур'є-перетворення отримуємо аналітичний вигляд пари спряжених зображень  $|u_p(r)|^2$  і  $|U_p(r)|^2$ , які адекватно описують граничні випадки.

1.  $p = 0$  ( $\phi = 0$ ). В цьому граничному випадку на основі формул (7.37) і (7.41) отримуємо:

$$|u_0(\mathbf{r})|^2 = |f(\mathbf{r})|^2; \quad |U_0(\mathbf{r})|^2 = \left(\frac{k}{d_0}\right)^2 \left|F\left(\frac{k}{d_0}\mathbf{r}\right)\right|^2. \quad (7.57)$$

Тобто в координатній площині зображення  $|u_0(r)|^2$  вироджується в зображення вхідного сигналу і, відповідно, в частотній площині спряжене зображення  $|U_0(r)|^2$  - у вінерівський спектр вхідного сигналу.

2.  $p = 1$  ( $\phi = \pi/2$ ). Використовуючи другу пару спряжених зображень (7.33) і (7.37), при повороті на кут  $\pi/2$  отримуємо

$$|u_1(\mathbf{r})|^2 = \left(\frac{k}{d_0}\right)^2 \left|F\left(\frac{k}{d_0}\mathbf{r}\right)\right|^2; \quad |U_1(\mathbf{r})|^2 = |f(-\mathbf{r})|^2, \quad (7.58)$$

тобто відбувається зміна координатної і частотної площин.

$$|u_1(\mathbf{r})|^2 \longrightarrow |U_0(\mathbf{r})|^2; \quad |U_1(\mathbf{r})|^2 \longrightarrow |u_1(-\mathbf{r})|^2. \quad (7.59)$$

При останній заміні послідовне виконання двох фур'є-перетворень, що описується добутку матриць  $\mathbf{T}_{\pi/2}\mathbf{T}_{\pi/2} = \mathbf{T}_\pi$ , приводить до тотожного перетворення з інверсною заміною координати вхідного сигналу.

3.  $p = 2$  ( $\phi = \pi$ ). За аналогією випадку 1 маємо:

$$|u_2(\mathbf{r})|^2 = |f(-\mathbf{r})|^2; \quad |U_2(\mathbf{r})|^2 = \left(\frac{k}{d_0}\right)^2 \left|F\left(-\frac{k}{d_0}\mathbf{r}\right)\right|^2, \quad (7.60)$$

тобто в цьому граничному випадку вже відбувається інверсна зміна просторової частоти в частотній площині.

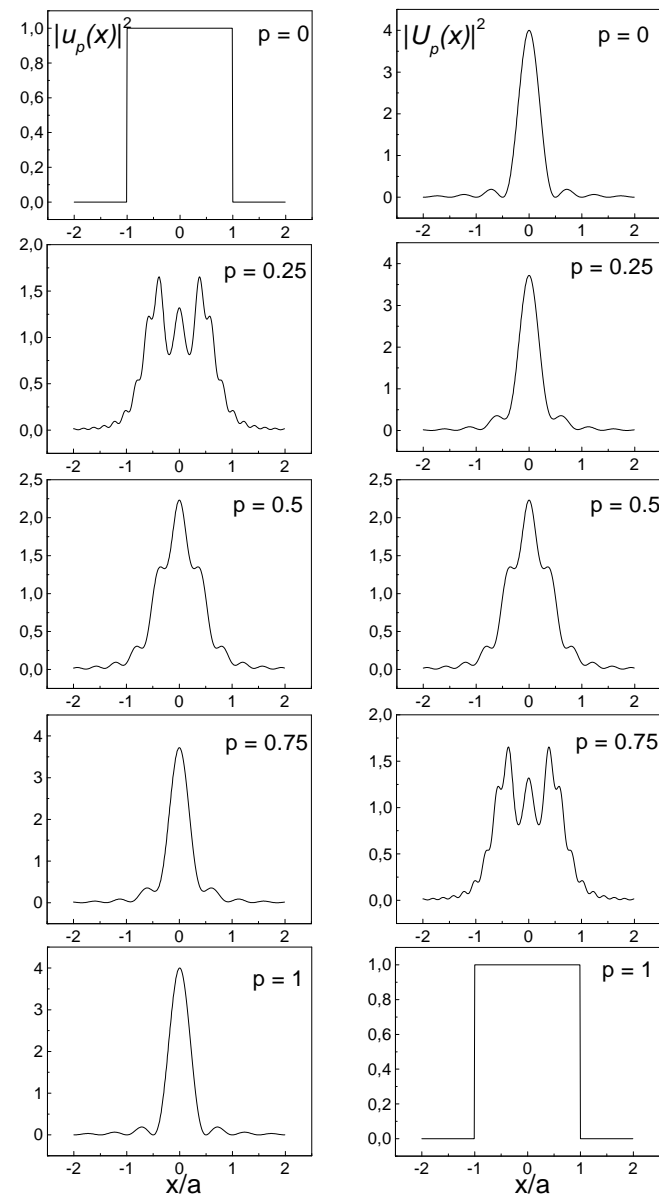


Рис. 6. Перерозподіл спряжених зображень ДФП прямокутного імпульсу при числі Френеля  $F_0 = 1$ .

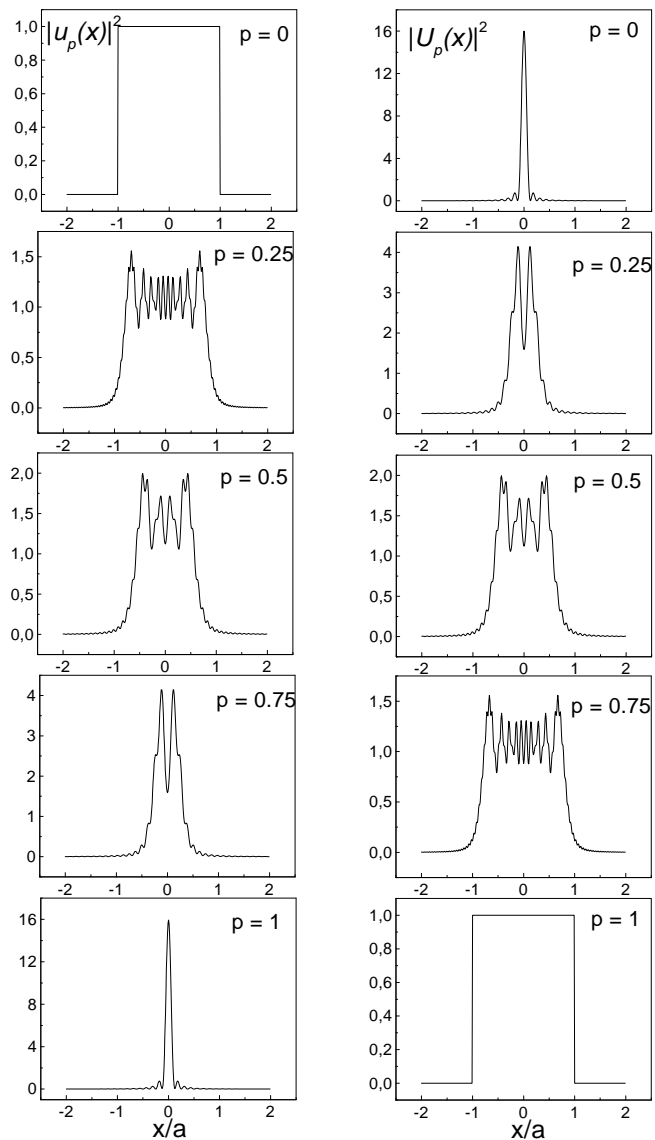


Рис. 7. Перерозподіл спряжених зображень ДФП прямокутного імпульсу при числі Френеля  $F_0 = 4$ .

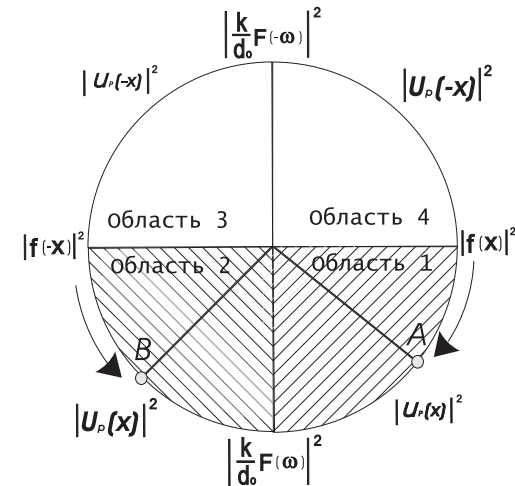


Рис. 8. Діаграма спряжених зображень ДФП

4.  $p = 3$  ( $\phi = 3\pi/2$ ). За аналогією випадку 2 маємо:

$$|u_3(\mathbf{r})|^2 = \left(\frac{k}{d_0}\right)^2 \left|F\left(-\frac{k}{d_0}\mathbf{r}\right)\right|^2; \quad |U_3(\mathbf{r})|^2 = |f(\mathbf{r})|^2, \quad (7.61)$$

Ці чотири граничні випадки, які показані на рис. 8, характеризують повний цикл перерозподілу спряжених зображень в процесі ДФП оптичного сигналу.

В результаті кожного наступного повороту розподілу вхідного сигналу на кут  $\pi/2$  координатна площина переходить в частотну і, навпаки. В діаметральных точках  $p = 0$  і  $p = 2$  в координатній площині відбувається інверсна зміна координати, а в діаметральных точках  $p = 1$  і  $p = 3$ , навпаки, в частотній площині відбувається інверсна зміна просторової частоти. Далі при  $p = 4$  починається новий цикл повороту, який еквівалентний  $p = 0$ .

Зокрема для прямокутного імпульсу в граничних випадках отримуємо наступні співвідношення

У випадку  $p = 0$  ( $\phi = 0$ ) на основі формули (7.50) отримуємо:

$$|u_0(x)|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin[4\pi F_0 \omega]}{\omega} \cos(4\pi F_0 x \omega) d\omega. \quad (7.62)$$

Після нескладних математичних перетворень отримуємо

$$|u_0(x)|^2 = \mathcal{F}^{-1} \left\{ 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} \right\} = \text{rect} \left( \frac{x}{2} \right). \quad (7.63)$$

На основі (2.2) легко бачити, що дана формула є фур'є-перетворення функції відліку, отже в граничному випадку при  $p = 0$  функція  $|u_0(x)|^2$  є функцією прямокутного імпульсу. Аналогічну формулу отримуємо для спряженого зображення ДФП при  $p = 1$ .

У випадку  $p = 1$  ( $\phi = \pi/2$ ), використовуючи спряжене зображення прямокутного імпульсу (7.56), при повороті на кут  $\pi/2$  отримуємо

$$|u_1(x)|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin[4\pi F_0 \omega \varepsilon (1 - \omega)]}{\varepsilon \omega} \right] \cos(4\pi F_0 x \omega) d\omega. \quad (7.64)$$

Виконавши математичні перетворення отримуємо

$$|u_1(x)|^2 = 4F_0 \left( \frac{\sin 2\pi F_0 x}{4\pi F_0 x} \right)^2. \quad (7.65)$$

Аналогічну формулу отримуємо для спряженого зображення ДФП при  $p = 0$ .

## Література

1. *Сороко Л.М.*, Основы голографии и когерентной оптики, "Наука", 1971.
2. *Condon E.U.*, Immersion of the Fourier transform in a continuous group of functional transformations. // Proc. Nat. Acad. Sci., 1937, vol.23, p.158-164.
3. *Bargmann V.*, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. Part I // Commun. Pure Appl. Math., 1961, vol.XIV, p.187-214.
4. *Namias V.*, The Fractional Order Fourier transform and its Application to Quantum Mechanics. // J. Instr. Maths Applics., 1980, vol.25, p.241-265.
5. *McBride A.C. and Kerr F.H.* On Namias's fractional Fourier transform. // IMA J. Appl. Math., 1987, vol.39, p.159-175.
6. *Karasik Y.B.* Expression of the kernel of a fractional Fourier transform in elementary functions. // Opt. Lett., 1994, vol.19, No 11, p.769-770.

7. *Ozaktas H.M. and Mendlovic D.* Fourier transforms of fractional order and their optical interpretation. // Opt. Commun., 1993, vol.101, p.163-169.
8. *Lohmann A.W.* Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform. // J. Opt. Soc. Am. A., 1993, vol.10, No 10, p.2181-2186.
9. *Lohmann A.W. and Soffer B.H.* Relationships between the Radon-Wigner and fractional Fourier transforms. // J. Opt. Soc. Am. A., 1994, vol.11, No 6, p.109-112.
10. *Bernardo L.M. and Soares O.D.D.* Fractional Fourier transforms and optical system. // Opt. Commun., 1994, vol. 110, p.517-522.
11. *Bernardo L.M. and Soares O.D.D.* Fractional Fourier transforms and imaging. // J. Opt. Soc. Am. A., 1994, vol.11, No 10, p.2622-2626.
12. *Ozaktas H.M. and Mendlovic D.* Fractional Fourier transform as a tool for analyzing beam propagation and spherical mirror resonators. // Opt. Lett., 1994, vol.19, No 21, p.1678-1680.
13. *Lee S.Y. and Szu H.H.* Fractional Fourier transform, wavelet transform, and adaptive neural network. // Opt. Eng., 1994, vol.33, No 7, p.2326-2330.
14. *Ozaktas H.M., Mendlovic D. and Lohmann A.W.* Graded-index fibers, Wigner-distribution function, and the fractional Fourier transform. // Appl. Opt., 1994, vol.33, No 26, p.407-408.
15. *Lohmann A.W. and Mendlovic D.* fractional Fourier transform: photonic implementation. // Appl. Opt., 1994, vol.33, No 32, p.7661-7664.
16. *Singer P.* An Integrated Fractional Fourier Transform. // Appl. Math., 1994, vol.54, p.221-237.
17. *Liu S., Hu J.* General optical implementation of fractional Fourier transform. // Opt. Lett., 1995, vol.20, No 9, p.1053-1055.
18. *Dorsch R.G.* Fractional Fourier transformer of variable order based on a modular lens system. // Appl. Opt., 1995, vol.34, No 26, p.6016-6020.
19. *Dorsch R.G. and Lohmann A.W.* Fractional Fourier transform used for a Lens-design problem. // Appl. Opt., 1995, vol.34, No 20, p.4111-4112.
20. *Granieri S., Trabocchi O. and Sicre E.E.* Fractional Fourier transform applied to spatial filtering in the Fresnel domain. // Opt. Comm., 1995, vol.119, p.275-278.
21. *Ozaktas H.M. and Mendlovic D.* Fractional Fourier optics. // J. Opt. Soc. Am. A., 1995, vol.12, No 12, p.743-761.
22. *Liu S. and Ren H.* Image-scaling problem in the optical fractional

- Fourier transform. // Appl. Opt., 1997, vol.36, No 23, p.5671-5674.
23. *Hua J. and Liu L.* Observing the fractional Fourier transform by free-space Fresnel diffraction. // Appl. Opt., 1997, vol.36, No 2, p.512-513.
  24. *Вудворд Ф.М.* Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации, "Сов. радио", 1955.
  25. *Marechal A., Croce P.* Un filtre de frequences spatiales pour l'amelioration du contraste des images optiques. // C. R. Acad. Sci., 1953, - t.237, p.607.
  26. *Сы Х. Х., Колфилд Дж. Х.* Взаимное время-частотное содержание двух сигналов. // ТИИЭР, 1984, т.72, No 7 с.173-180.
  27. *Lohmann A.W., Mendlovic D., Zalevsky Z.* Fractional Transformations in Optics. // Progress in Optics, Edited by E.Wolf, 1998 - vol. XXXVIII, p.263-342.
  28. *Ozaktas H.M., Kutay M., Mendlovic D.* Introduction to the Fractional Fourier Transform and Its Application. // Advances in Imaging and Electron Physics, 1999, vol.106, Academic Press, San Diego, California, p.239-291.
  29. *Lohmann A.W., Mendlovic D., Zalevsky Z.* Status Report on the Fractional Fourier Transform. // Tel Aviv University, Faculty of Engineering, 1995, Tel Aviv, Israil.
  30. *Alieva T., Barbe A.* Self-imaging in fractional Fourier transform systems. // Opt. Commun., 1998, vol.152, p.11-15.
  31. *Sheppard C.J.R., Larkin K.G.* Similarity theotems for fractional Fourier transform and fractional Hankel transform. // Opt. Commun., 1998, vol.154, p.173-178.
  32. *Mendlovic D., Ozaktas H.M., Lohmann A.W.* Gradient-index fibers, Wigner-distribution functions, and the fractional Fourier transform. // Appl. Opt., 1994, vol.33, No 26, p.6188-6193.
  33. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трасцендентные функции, "Наука", 1974, 295 с.
  34. *Collins S.A.* Lens-System Diffraction Integral Written in Terms of Matrix Optics. // J.Opt.Soc.Amer., 1970, vol.60, No 9 p.1168-1177.
  35. *Abe S. and Sheridan J.T.* Almost-Fourier and almost-Fresnel transformations. // Opt. Commun., 1995, vol.113, p.385-388.
  36. *Abe S. and Sheridan J.T.* Comment on "The fractional Fourier transform in optical propagation problems". // J. Mod. Opt., 1995, vol.42, p.2373-2378.
  37. *Bernardo L. M.* ABCD matrix formalism of fractional Fourier optics. // Opt. Eng., 1996, vol.35, No 3, p.732-740.
  38. *Шовгенюк М. В.* Координатно-частотний розподіл сигналів: но-

- вий підхід в теорії оптичної дифракції. // *Інститут фізики конденсованих систем НАН України*, Препринт ІТФ-92-25U, Львів, 1992, 40 с.
39. *Шовгенюк М. В.* Координатно-частотний розподіл сигналів: виведення формули дифракції Френеля на ізольованій щілині. // *Інститут фізики конденсованих систем НАН України*, Препринт ІТФ-92-21U, Львів, 1992, 28 с.
  40. *Шовгенюк М. В., Козловський Ю. М.* Самоподібність спряжених зображень при дробовому фур'є-перетворенні // *Доповіді НАН України*, 2000, No.6, с.92-97.
  41. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике, М: Наука, 1970, 720 с.
  42. *М.В.Шовгенюк, Ю.М.Козловський,* Оптична інтерпретація дробового фур'є-перетворення. // *Фізичний збірник НТШ ( в друці).*
  43. *T.Asakura, H.Mishina,* Partially coherent Fresnel diffraction by a slit aperture. 1. Theoretical analysis // *Opt.Comm.*, 1973, vol.7, No 4, p.327-330.

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Михайло Васильович Шовгенюк  
Юрій Михайлович Козловський

ДРОБОВЕ ФУР'Є-ПЕРЕТВОРЕННЯ ОПТИЧНИХ СИГНАЛІВ

Роботу отримано 3 квітня 2001 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу статистичної теорії  
конденсованих систем

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені