

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-03-20U

А.В. Назаренко, А.Я. Андрусик

РІВНЯННЯ СТАНУ СИСТЕМИ РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ
НУКЛОНІВ З ПРЯМОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

ЛЬВІВ

УДК: 539.142; 536.71; 524.354.6.

PACS: 05.70.Ce, 21.65.+f, 97.60.Jd

Рівняння стану системи релятивістських нуклонів з прямою взаємодією

А.В. Назаренко, А.Я. Андрусик

Анотація. Побудовано квантову модель системи релятивістських нуклонів з прямою взаємодією. Така модель є альтернативою до σ -моделі квантової гадродинаміки та методу модельних потенціалів. За допомогою знайденого рівняння стану ядерної матерії за умови β -стабільності досліджено фазовий перехід “рідина–газ”, встановлено параметри критичної точки. Показано, що існування фазового переходу пов’язано із релятивістськими ефектами. Із застосуванням рівнянь Оппенгеймера–Волкова розглянуто модель ізотропної нейтронної зорі. Одержана залежність маси зорі від її радіуса відповідає малим нейтронним зорям і відрізняється від стандартної.

The equation of state of the system of relativistic nucleons with direct interaction

A.V. Nazarenko, A.Ya. Andrusyk

Abstract. The quantum model of the system of relativistic nucleons with direct interaction has been built. Such a model is an alternative to the σ -model of quantum hadrodynamics and to the method of modelling potentials. By means of equation of state of nuclear matter the “liquid–gas” phase transition is studied in the case of β -stability, and the parameters of the critical point are found. It is shown that the presence of the phase transition is connected with relativistic effects. The model of isotropic neutron star is considered with the use of Oppenheimer–Volkoff equations. The obtained dependence of the star mass on its radius corresponds to the small neutron stars and differs from the standard one.

Подається в Phys. Rev. C

Submitted to Phys. Rev. C

© Інститут фізики конденсованих систем 2003

Institute for Condensed Matter Physics 2003

1. Вступ

Дослідженню “випаровування” перегрітої краплі ядерної матерії, як способу описати розпад збуджених ядер на нуклони, окремі фрагменти, за останні роки було присвячено чимало і експериментальних праць (див. [1–5]) і теоретичних (див. [6–8]). Аргументи на користь та адекватність такого опису впливають з подібності між вандерваальсівською та міжнуклонною взаємодіями. Спроби застосувати термодинамічну теорію фазових переходів до даної проблеми привело до численних експериментів, що проводились і проводяться на прискорювачах у наукових центрах в Берклі (США), Стенфорді (США), ЦЕРНі (Європа), Дубні (Росія). Підсумок роботи кількох експериментальних груп опубліковано у статті [5], в якій підтверджено наявність ядерного фазового переходу “рідина–газ”.

Причина застосування термодинамічного підходу зумовлена труднощами мікроскопічного опису ядерних процесів за участю багатьох частинок. Однак при цьому виникла проблема відмінності констант взаємодії у вільному просторі та в середовищі. Також виявилось, що значення констант взаємодії в різних моделях не збігаються. Пояснення цих та інших фактів залишаються для майбутніх досліджень. Тим не менш вже створено моделі, що приводять до адекватного опису і рівноважних властивостей ядерних систем і фазового переходу “рідина–газ”, за допомогою якого можна пояснити і зворотній процес, тобто нуклеосинтез в еволюції Всесвіту [9].

Найбільш адекватними теоретичними моделями на даний час вважаються σ -модель квантової гадродинаміки [6, 10] та ефективні теорії, що ґрунтуються на методі псевдопотенціалів (серед яких слід відзначити Skyrme and Gogni forces) [11]. У даній роботі ми зосередимось на побудові та дослідженні нової моделі, що застосовує концепцію прямих взаємодій між частинками, доцільність якої зумовлена малим часом життя масивних квантів полів (мезонів) — носіїв взаємодії. Потенціал міжчастинкової взаємодії у нашому підході базується на розв’язках польових рівнянь, тому запропонована модель є проміжною ланкою між теоретико-польовими моделями та методом модельних потенціалів. Оскільки швидкість руху нуклонів в атомних ядрах в нормальному стані становить близько $c/4$ (c — швидкість світла) [12], то реалістична модель ядерної матерії повинна будуватись на засадах загальної теорії відносності, задовольняти вимогу Пуанкаре-інваріантності, а гамільтоніан повинен враховувати найсуттєві релятивістські ефекти (релятивістську кінематику частинок, ефект скінченності швидкості передачі взаємодії). Тому,

окрім теоретичного опису процесів у системі нуклонів ми ставимо за мету дослідити роль релятивістських ефектів, їх вплив на термодинамічні властивості. Зроблені висновки, віримо, будуть враховані у феноменологічному підході, вкажуть на шляхи побудови нових ефективних потенціалів.

У нашій роботі ми знаходимо гамільтоніан системи релятивістських нуклонів з прямою взаємодією, методами квантової статистичної механіки виводимо рівняння стану ядерної матерії, досліджуємо фазовий перехід “рідина–газ”, а також розглядаємо модель нейтронної зорі.

2. Гамільтоніан системи нуклонів

Наші дослідження ми розпочинаємо з класичної дії A релятивістських частинок, що взаємодіють за посередництвом векторних та скалярного масивних полів:

$$S = S_{\text{part}} + S_{\text{int}} + S_{\text{field}}, \quad (1)$$

де складові мають вигляд:

$$S_{\text{part}} = - \sum_{a=1}^A \int m_a c^2 \sqrt{u_a^\mu(\lambda) u_{a\mu}(\lambda)} d\lambda, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} = & \sum_{a=1}^A \int g_\sigma \sigma[x_a(\lambda)] \sqrt{u_a^\mu(\lambda) u_{a\mu}(\lambda)} d\lambda - \\ & - \sum_{a=1}^A \int g_\omega u_a^\mu(\lambda) \omega_\mu[x_a(\lambda)] d\lambda - \\ & - \sum_{a=1}^A \int g_\rho u_a^\mu(\lambda) \tau_a \rho_\mu[x_a(\lambda)] d\lambda, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{field}} = & \int \left[-\frac{1}{4} \mathbf{G}^{\mu\nu}(x) \mathbf{G}_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} \mu_\rho^2 \rho_\mu(x) \rho^\mu(x) \right] d^4x + \\ & + \int \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} \mu_\omega^2 \omega^\mu(x) \omega_\mu(x) \right] d^4x + \\ & + \frac{1}{2} \int [\partial^\mu \sigma(x) \partial_\mu \sigma(x) - \mu_\sigma^2 \sigma^2(x)] d^4x. \end{aligned} \quad (4)$$

На даному етапі a -та частинка (з масою m_a та ізоспіном τ_a) описується світовою лінією, точки якої мають чотири координати $x_a^\mu(\lambda)$ в

просторі-часі Мінковського з метрикою $\|\eta^{\mu\nu}\| = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, за допомогою якої здійснюється “піднімання” та “опускання” індексів; $u_a^\mu(\lambda) = dx_a^\mu(\lambda)/d\lambda$; g_i^2 ($i = \sigma, \omega, \rho$) — константи взаємодії частинок з квантами полів, що переносять взаємодію. Величини $\boldsymbol{\tau}_a$, $\boldsymbol{\rho}_\mu(x)$ є 3-компонентними векторами в ізоспіновому просторі, причому, $\boldsymbol{\tau}_a^2 = \text{const}$ на протязі еволюції. Напруженості векторних полів визначаються тензорами $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu\omega_\nu(x) - \partial_\nu\omega_\mu(x)$ та $\mathbf{G}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu\boldsymbol{\rho}_\nu(x) - \partial_\nu\boldsymbol{\rho}_\mu(x) - g_\rho[\boldsymbol{\rho}_\mu(x) \times \boldsymbol{\rho}_\nu(x)]$; $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$. Параметри μ_i полів пов’язані з масами квантів (мезонів), які вони описують, співвідношеннями $\mu_i = m_i c/\hbar$.

Подальший опис релятивістської системи здійснимо у миттєвій формі динаміки (коли $x^0(t) = ct$) [13], за допомогою якої усувається хронометрична свобода дії системи відносно репараметризації світових ліній частинок. Це дозволяє ввести єдиний еволюційний параметер t (час) для системи, що необхідно для гамільтонового формулювання динаміки, яке є основою для статистичних і термодинамічних досліджень. Гамільтонів опис релятивістських систем частинок з векторним та скалярним полями у миттєвій формі динаміки можна знайти у праці [14].

Зазвичай час життя масивних квантів, що переносять взаємодію, є дуже малий. Через це у наших дослідженнях ми накладаємо фізичну умову відсутності вільного випромінювання. Як наслідок, скалярне та векторні поля виступають лише як носії взаємодії між частинками і не мають власних ступенів вільності. Це дозволяє виключити зазначені поля з опису і переформулювати динаміку системи в термінах прямої взаємодії між частинками. Процедура виключення польових ступенів вільності методами гамільтонової механіки з в’язями описана в працях [15, 16]. Вона зберігає необхідну гамільтонову структуру та Пуанкаре-інваріантність теорії. За її допомогою в роботах [14, 16] одержано гамільтонів опис релятивістських систем частинок окремо зі скалярною та векторною прямими взаємодіями (в термінах тільки канонічних змінних частинок) в лінійному наближенні за константою взаємодії. У даному наближенні результуюча взаємодій може бути записана як їх суперпозиція. У такий спосіб знаходимо модельний класичний гамільтоніан:

$$H = \sum_{a=1}^A cp_a^0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^A U_{ab}, \quad p_a^0 = \sqrt{m_a^2 c^2 + \mathbf{p}_a^2}. \quad (5)$$

Він генерує еволюцію частинок в термінах координат \mathbf{q}_a та канонічно спряжених імпульсів \mathbf{p}_a . Відзначимо, що канонічні координати

\mathbf{q}_a не збігаються з коваріантними \mathbf{x}_a після редукації полів внаслідок теореми про невзаємодію [17].

Ефективну взаємодію між частинками подамо так:

$$U_{ab} = g_\omega v_a^\mu \omega_{b\mu}^{\text{part}}(\mathbf{q}_a) + g_\rho v_a^\mu \boldsymbol{\tau}_a \boldsymbol{\rho}_{b\mu}^{\text{part}}(\mathbf{q}_a) - g_\sigma \sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2} \sigma_b^{\text{part}}(\mathbf{q}_a), \quad (6)$$

де $v_a^\mu = p_a^\mu/p_a^0$ — вільночастинкова 4-швидкість; $\mathbf{v}_a = (v_a^i)$.

Функції $\omega_{a\mu}^{\text{part}}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\rho}_{b\mu}^{\text{part}}(\mathbf{x})$ та $\sigma_a^{\text{part}}(\mathbf{x})$ є розв’язками відповідних неоднорідних польових рівнянь з точковим джерелом. Їх зображення у вигляді рядів Фур’є в об’ємі V визначаються формулами:

$$\omega_{b\mu}^{\text{part}}(\mathbf{q}_a) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{g_\omega v_{b\mu}}{\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v}_b)^2 + \mu_\omega^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{q}_{ab}}, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{b\mu}^{\text{part}}(\mathbf{q}_a) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{g_\rho \boldsymbol{\tau}_b v_{b\mu}}{\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v}_b)^2 + \mu_\rho^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{q}_{ab}}, \quad (8)$$

$$\sigma_b^{\text{part}}(\mathbf{q}_a) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{g_\sigma \sqrt{1 - \mathbf{v}_b^2}}{\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v}_b)^2 + \mu_\sigma^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{q}_{ab}}, \quad (9)$$

де $\mathbf{q}_{ab} = \mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b$.

Одержаний класичний Пуанкаре-інваріантний гамільтоніан (5) є вихідним пунктом у формулюванні нашої моделі релятивістської системи нуклонів, що взаємодіють за посередництвом скалярних та векторних мезонів. Перш за все, близькі значення мас протона та нейтрона дозволяють покласти $m_a = m$, де $m = 939 \text{ MeV}/c^2$, а відмінність між протоном і нейтроном визначається проекцією ізоспіна $\tau = \pm 1/2$.

За низьких температур та високих концентрацій проявляються квантові властивості нуклонів, що потребує квантового опису. Для знаходження оператора Гамільтона квантової теорії введемо симетризований потенціал парної міжчастинкової взаємодії:

$$W_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}(\mathbf{q}_{ab}) \equiv \frac{1}{2}(U_{ab} + U_{ba}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \Gamma_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{q}_{ab}}, \quad (10)$$

заміна U_{ab} яким не змінює значення гамільтоніану (5).

Залежна від імпульсів частина потенціалу взаємодії Γ є:

$$\Gamma_{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b}(\mathbf{k}) = g_\omega^2 \frac{1 - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b}{\mathcal{M}_\omega^2(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b; \mathbf{k})} + g_\rho^2 \frac{1 - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b}{\mathcal{M}_\rho^2(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b; \mathbf{k})} \tau_a \tau_b - g_\sigma^2 \frac{\sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2} \sqrt{1 - \mathbf{v}_b^2}}{\mathcal{M}_\sigma^2(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b; \mathbf{k})}, \quad (11)$$

де ефективні маси частинок \mathcal{M}_i ($i = \sigma, \omega, \rho$), що враховують ефект скінченності швидкості передачі взаємодії, означено так:

$$\frac{2}{\mathcal{M}_i^2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{k})} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v}_1)^2 + \mu_i^2} + \frac{1}{\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v}_2)^2 + \mu_i^2}.$$

Зазвичай квантова динаміка релятивістських систем ферміонів описується рівнянням Дірака. Інша можливість полягає у застосуванні формалізму вторинного квантування. Зрозуміло, що гамільтоніан Дірака можна подати в термінах операторів народження та знищення, які враховують принцип Паулі для ферміонів. Однак, тоді необхідно відзначити роль античастинок та властивості вакууму.

Тут ми відразу переходимо до представлення вторинного квантування. Ми припускаємо, що античастинки відсутні у системі. Окрім того, оператори народження та знищення вважаються нормально впорядкованими.

При переході до представлення вторинного квантування в якості базисної системи хвильових функцій оберемо хвильові функції вільних частинок:

$$\psi_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1}(\mathbf{q}, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_1 \mathbf{q}} \delta_{\Sigma, \Sigma_1}, \quad (12)$$

де $\delta_{\Sigma, \Sigma_1}$ — символ Кронекера. Набір квантових чисел $\Sigma = (\sigma, \tau)$ включає проекцію спіна $\sigma = \pm 1/2$ на вісь z , а також проекцію ізоспіна $\tau = \pm 1/2$.

Оператор Гамільтона системи релятивістських нуклонів подамо у вигляді:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}, \quad (13)$$

де

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{p}, \Sigma} c p^0 \hat{a}_{\mathbf{p}, \Sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}, \Sigma}, \quad p^0 = \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2} \quad (14)$$

— гамільтоніан вільних релятивістських частинок, а взаємодія між частинками визначається оператором:

$$\hat{W} = \frac{1}{2} \sum W_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1; \mathbf{p}_2, \Sigma_2}^{\mathbf{p}'_1, \Sigma'_1; \mathbf{p}'_2, \Sigma'_2} \hat{a}_{\mathbf{p}'_1, \Sigma'_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}'_2, \Sigma'_2}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \Sigma_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1}. \quad (15)$$

Тут $\hat{a}_{\mathbf{p}, \Sigma}^+$, $\hat{a}_{\mathbf{p}, \Sigma}$ — оператори народження та знищення вільної Фермі-частинки, замкненої в об'ємі V , з дискретним імпульсом \mathbf{p} та набором квантових чисел Σ .

Для знаходження матричного елемента $W_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1; \mathbf{p}_2, \Sigma_2}^{\mathbf{p}'_1, \Sigma'_1; \mathbf{p}'_2, \Sigma'_2}$, обчислимо ймовірність такого переходу:

$$K_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1; \mathbf{p}_2, \Sigma_2}^{\mathbf{p}'_1, \Sigma'_1; \mathbf{p}'_2, \Sigma'_2} = \sum_{S_1, S_2} \int d^3 q_1 d^3 q_2 \psi_{\mathbf{p}'_2, \Sigma'_2}^*(\mathbf{q}_2, S_2) \psi_{\mathbf{p}'_1, \Sigma'_1}^*(\mathbf{q}_1, S_1) \times \\ \times \hat{W}_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(\mathbf{q}_{12}) \psi_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1}(\mathbf{q}_1, S_1) \psi_{\mathbf{p}_2, \Sigma_2}(\mathbf{q}_2, S_2). \quad (16)$$

У даному виразі оператор взаємодії $\hat{W}_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(\mathbf{q}_{12})$, який діє на вільно-частинкові хвильові функції, можна замінити класичним потенціалом $W_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(\mathbf{q}_{12})$, де імпульси \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 набувають дискретних значень завдяки (первинному) квантуванню.

Легко бачити, що релятивістські ефекти приводять до нерівності:

$$K_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1; \mathbf{p}_2, \Sigma_2}^{\mathbf{p}'_1, \Sigma'_1; \mathbf{p}'_2, \Sigma'_2} \neq K_{\mathbf{p}'_1, \Sigma'_1; \mathbf{p}'_2, \Sigma'_2}^{\mathbf{p}_1, \Sigma_1; \mathbf{p}_2, \Sigma_2}.$$

Тоді, беручи до уваги умову ермітовості, $\hat{W} = \hat{W}^\dagger$, матричний елемент запишеться так:

$$W_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1; \mathbf{p}_2, \Sigma_2}^{\mathbf{p}'_1, \Sigma'_1; \mathbf{p}'_2, \Sigma'_2} = \frac{1}{2} K_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1; \mathbf{p}_2, \Sigma_2}^{\mathbf{p}'_1, \Sigma'_1; \mathbf{p}'_2, \Sigma'_2} + \frac{1}{2} K_{\mathbf{p}'_1, \Sigma'_1; \mathbf{p}'_2, \Sigma'_2}^{\mathbf{p}_1, \Sigma_1; \mathbf{p}_2, \Sigma_2}, \quad (17)$$

де множники $1/2$ відповідають ймовірностям прямого та оберненого процесів.

Тепер зосередимося на обчисленні ймовірності $K(1, 2 \rightarrow 1', 2')$, означеною (16). Використовуючи формулу (12), приходимо до виразу:

$$K_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1; \mathbf{p}_2, \Sigma_2}^{\mathbf{p}'_1, \Sigma'_1; \mathbf{p}'_2, \Sigma'_2} = \delta_{\Sigma_1, \Sigma'_1} \delta_{\Sigma_2, \Sigma'_2} \int e^{i\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2} \mathbf{q}_2 \times \\ \times e^{i\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1} \mathbf{q}_{12} W_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(\mathbf{q}_{12}) \frac{d^3 q_1}{V} \frac{d^3 q_2}{V}. \quad (18)$$

Символи $\delta_{\Sigma_1, \Sigma'_1}$, $\delta_{\Sigma_2, \Sigma'_2}$ свідчать про те, що взаємодія між нуклонами відбувається із збереженням проекцій спіна та ізоспіна, тобто $\Sigma'_{1,2} = \Sigma_{1,2}$. Тільки за цієї умови будуть відмінними від нуля матричні елементи.

Використовуючи зображення для символу Кронекера:

$$\int e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')} \frac{d^3 q}{V} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (19)$$

після заміни змінних інтегрування знаходимо:

$$K_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1; \mathbf{p}_2, \Sigma_2}^{\mathbf{p}'_1, \Sigma'_1; \mathbf{p}'_2, \Sigma'_2} = \delta(\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \int e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1) \mathbf{q}} W_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(\mathbf{q}) \frac{d^3 q}{V},$$

де $\mathbf{k}_{1,2} = \mathbf{p}_{1,2}/\hbar$, $\mathbf{k}'_{1,2} = \mathbf{p}'_{1,2}/\hbar$.

Таким чином, виконується закон збереження:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2. \quad (20)$$

Після означення імпульсу передачі: $\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = -(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2)$, одержуємо:

$$K_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1; \mathbf{p}_2, \Sigma_2}^{\mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k}, \Sigma_1; \mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k}, \Sigma_2} = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} W_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(\mathbf{q}) \frac{d^3q}{V} = \Gamma_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(\mathbf{k}), \quad (21)$$

що збігається з Фур'є образом взаємодії в класичному випадку.

Здійснюючи аналогічні обчислення величини $K(1', 2' \rightarrow 1, 2)$, остаточно маємо:

$$\begin{aligned} \hat{W} &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\substack{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \\ \Sigma_1, \Sigma_2}} \frac{1}{2} [\Gamma_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(\mathbf{k}) + \Gamma_{\mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k}, \mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k}}(\mathbf{k})] \times \\ &\times \hat{a}_{\mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k}, \Sigma_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k}, \Sigma_2}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \Sigma_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1}. \end{aligned} \quad (22)$$

У наступному розділі на основі знайденого гамільтоніану квантової теорії обчислимо термодинамічні функції системи релятивістських нуклонів.

3. Термодинамічний потенціал

Знайдемо термодинамічні характеристики системи релятивістських нуклонів, ядерної матерії за умов β -рівноваги відносно реакцій типу $n \leftrightarrow p + e + \bar{\nu}$. У даній роботі ми зосереджуємося на об'ємних ефектах, нехтуючи поверхневими¹. У зв'язку з цим в рамках нашого підходу будуть встановлені загальні властивості ядерної матерії, які є екстраполяцією характеристик ядер зі скінченним числом нуклонів.

Нехай μ_p, μ_n — хімічні потенціали протонної та нейтронної компонент. Тоді термодинамічний потенціал системи знайдемо з виразу:

$$\Omega = -T \ln \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu_p \hat{Z} - \mu_n \hat{N})}, \quad (23)$$

де $\beta = 1/T$ — обернена температура, а

$$\hat{Z} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma, +\frac{1}{2}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma, +\frac{1}{2}}, \quad \hat{N} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma, -\frac{1}{2}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma, -\frac{1}{2}}$$

¹Відзначимо, що у рамках крапельної моделі ядер з числом A нуклонів енергію, яка припадає на один нуклон, можна описати формулою Бете–Вайцекера: $E/A = -a_V + a_S A^{-1/3} + \dots$, де a_V відповідає об'ємній енергії, a_S — внесок поверхні.

— оператори числа протонів Z та нейтронів N .

Введемо позначення:

$$\hat{\mathbb{H}}_0 \equiv \hat{H}_0 - \mu_p \hat{Z} - \mu_n \hat{N} = \sum_{\mathbf{p}, \Sigma} (c p^0 - \mu_\tau) \hat{a}_{\mathbf{p}, \Sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}, \Sigma}. \quad (24)$$

Тоді у представленні взаємодії можемо записати:

$$e^{-\beta(\hat{H} - \mu_p \hat{Z} - \mu_n \hat{N})} = e^{-\beta \hat{\mathbb{H}}_0} \hat{\sigma}(\beta), \quad (25)$$

$$\hat{\sigma}(\beta) = T_\lambda \exp \left[- \int_0^\beta \hat{W}(\lambda) d\lambda \right], \quad \hat{W}(\lambda) = e^{\lambda \hat{\mathbb{H}}_0} \hat{W} e^{-\lambda \hat{\mathbb{H}}_0}. \quad (26)$$

Після розплутування експоненційних операторів термодинамічний потенціал набуде вигляду:

$$\Omega = \Omega_0 - T \ln \langle \hat{\sigma}(\beta) \rangle, \quad (27)$$

де термодинамічний потенціал Ω_0 системи незвзаємодіючих нуклонів та середнє ϵ :

$$\Omega_0 = -T \ln Z, \quad \langle \hat{\sigma}(\beta) \rangle = Z^{-1} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{\mathbb{H}}_0} \hat{\sigma}(\beta) \right). \quad (28)$$

Вони виражаються через величину $Z = \text{Tr} \exp(-\beta \hat{\mathbb{H}}_0)$.

Легко знаходимо, що

$$\Omega_0 = -T \sum_{\mathbf{p}, \Sigma} \ln \left[1 + e^{-\beta(c p^0 - \mu_\tau)} \right]. \quad (29)$$

Розглянемо функціонал:

$$Q(\alpha) = \ln \left\langle T_\lambda \exp \left[-\alpha \int_0^\beta \hat{W}(\lambda) d\lambda \right] \right\rangle, \quad (30)$$

пов'язаний з введеним середнім співвідношенням $\langle \hat{\sigma}(\beta) \rangle = Q(1)$.

Розкладемо $Q(\alpha)$ в ряд за параметром α і обмежимося першим ненульовим членом. Оскільки $Q(0) = 0$, то перший (ненульовий) член розкладу ϵ :

$$\left. \frac{dQ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = - \left\langle \int_0^\beta \hat{W}(\lambda) d\lambda \right\rangle = -\beta \bar{W}. \quad (31)$$

Після обчислення сліду знаходимо, що

$$\bar{W} = \frac{1}{2V} \sum_{\substack{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \\ \Sigma_1, \Sigma_2}} \Gamma_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(\mathbf{0}) \langle \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \Sigma_2}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \Sigma_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1} \rangle. \quad (32)$$

Величину $\Gamma_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(\mathbf{0})$ запишемо так:

$$\Gamma_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(\mathbf{0}) = [C_\omega^2 + C_\rho^2 \tau_1 \tau_2] (1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) - C_\sigma^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}_1^2} \sqrt{1 - \mathbf{v}_2^2}, \quad (33)$$

де $C_i^2 \equiv g_i^2 / \mu_i^2$ ($i = \sigma, \omega, \rho$) — параметри, що характеризують носії взаємодії між нуклонами. Унаслідок ізотропії матерії відразу можна відкинути члени, лінійні за $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$.

Для середнього від операторів народження та знищення двох частинок маємо:

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \Sigma_2}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \Sigma_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1} \rangle = \langle \hat{n}_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1} \hat{n}_{\mathbf{p}_2, \Sigma_2} \rangle = n_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1} n_{\mathbf{p}_2, \Sigma_2}, \quad (34)$$

де оператори $\hat{n}_{\mathbf{p}, \Sigma}$ дають числа заповнення станів частинок, а статистичні середні від них, тобто

$$n_{\mathbf{p}, \Sigma} = \frac{1}{1 + e^{\beta(cp^0 - \mu_\tau)}} \quad (35)$$

— температурний розподіл вільних Фермі-частинок.

Для поправки на взаємодію, що збігається із середньою енергією взаємодії, маємо:

$$\bar{W} = \frac{1}{2V} \sum_{\substack{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \\ \Sigma_1, \Sigma_2}} \left[C_\omega^2 + C_\rho^2 \tau_1 \tau_2 - C_\sigma^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}_1^2} \sqrt{1 - \mathbf{v}_2^2} \right] n_{\mathbf{p}_1, \Sigma_1} n_{\mathbf{p}_2, \Sigma_2}. \quad (36)$$

Оскільки густина протонів та густина нейтронів виражаються через суми:

$$\rho_p \equiv \frac{Z}{V} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} n_{\mathbf{p}, \sigma, +\frac{1}{2}}, \quad \rho_n \equiv \frac{N}{V} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} n_{\mathbf{p}, \sigma, -\frac{1}{2}}, \quad (37)$$

а повна густина нуклонів, очевидно, є $\rho = \rho_p + \rho_n$, вираз для \bar{W} можна переписати так:

$$\bar{W} = \frac{1}{2} V C_\omega^2 \rho^2 + \frac{1}{8} V C_\rho^2 \rho^2 \delta^2 - \frac{1}{2} V C_\sigma^2 \left[\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{mc}{\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}} n_{\mathbf{p}, \Sigma} \right]^2; \quad (38)$$

$$\delta^2 \equiv \left(\frac{\rho_p - \rho_n}{\rho_p + \rho_n} \right)^2 = (1 - 2y)^2.$$

Параметр δ враховує асиметрію між числом нейтронів та протонів; $y = \rho_p / \rho$ визначає частку протонів в матерії і є сталою величиною за умов β -стабільності. Легко бачити, що нерівність $N/Z \neq 1$ приводить до виникнення ізовекторної взаємодії, яка посилює відштовхування між нуклонами.

Таким чином, використовуючи анзац про застосовність наближення середнього поля, для термодинамічного потенціалу одержуємо формулу:

$$\Omega = \Omega_0 + \bar{W}. \quad (39)$$

Слід зауважити, що більш акуратний розрахунок термодинамічних характеристик ядерної матерії можна здійснити у наближенні середнього самоузгодженого поля, як зазвичай робиться у випадку польових моделей. Самоузгоджена схема в першу чергу приведе до інших значень параметрів моделі C_ω^2 , C_ρ^2 , C_σ^2 , які визначаються таким чином, щоб, перш за все, відтворити характеристики ядер та ядерної матерії у нормальному, рівноважному стані. Однак, через складність реалізації самоузгодженої схеми на калькулятивному рівні тут ми обмежимось звичайним наближенням середнього поля, що дозволить виявити якісні властивості нашої моделі, перевірити її адекватність до застосування зазначеного ускладнення.

Певною перевагою наближення середнього поля є його застосовність в широкому діапазоні густин, що надає можливість дослідити фазовий перехід “рідина-газ”. Дослідження же надплинності ядерної матерії, яка проявляється в обмеженій області густин, коли сили притягання між ферміонами переважають над силами відштовхування, потребує дещо іншого підходу. Тому таку задачу тут ми не розглядаємо і залишаємо її в якості перспективи подальшого детального опису ядерної матерії.

У наближенні середнього поля середня енергія описується формулою:

$$E = E_0 + \bar{W}, \quad (40)$$

де

$$E_0 = \sum_{\mathbf{p}, \Sigma} cp^0 n_{\mathbf{p}, \Sigma}. \quad (41)$$

Загалом кажучи, знайдена середня енергія є також функцією хімічних потенціалів μ_p , μ_n і температури T . Тільки у випадку $T = 0$, як буде показано далі, її можна явно виразити через густину числа нуклонів.

Отримані формули (39), (40) демонструють лінійну залежність термодинамічних функцій від величин g^2/μ^2 . Це означає, що параметри C_σ^2 , C_ω^2 , C_ρ^2 можуть бути сумами співвідношень g^2/μ^2 всіх ізоскалярних–скалярних, ізоскалярних–векторних, ізовекторних–векторних частинок відповідно. Тому при описі реальних процесів оцінки для величин C_i^2 ($i = \sigma, \omega, \rho$) можуть розглядатися як інтегральні характеристики у вище зазначеному сенсі і не повинні утворюватися з характеристиками окремих частинок: скалярним σ -мезоном, векторними ω - та ρ -мезонами, як відображено у позначеннях.

У подальших дослідженнях замість величин Ω , E буде зручно використовувати термодинамічний потенціал та середню енергію віднесені на один нуклон: $\omega \equiv \Omega/A$, $e \equiv E/A$.

4. Ядерна матерія при $T = 0$

Знайдемо перш за все середню енергію при $T = 0$:

$$E = E_0 + \bar{W}. \quad (42)$$

Для цього слід покласти всі $n_{\mathbf{p},\Sigma}$ рівними одиниці всередині сфери Фермі і рівними нулеві поза неї у формулі (40). Межа сфери Фермі визначається абсолютним значенням імпульсу Фермі [18]:

$$p_{\mathbf{F}} = \hbar k_{\mathbf{F}}, \quad k_{\mathbf{F}} = \left(\frac{6\pi^2 \rho}{\gamma} \right)^{1/3}, \quad (43)$$

де γ – коефіцієнт, що характеризує спінове та ізоспінове виродження, тому $\gamma = 4$.

Після заміни підсумовування за дискретними значеннями \mathbf{p} (в об'ємі V) інтегруванням:

$$\sum_{\mathbf{p}} (\dots) = V \int (\dots) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (44)$$

для енергії вільних релятивістських частинок E_0 при $T = 0$ приходимо до відомого результату [18]:

$$\begin{aligned} E_0 &\equiv \frac{\gamma V c}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_{\mathbf{F}}} p^2 \sqrt{m^2 c^2 + p^2} dp \\ &= \frac{\gamma V c}{16\pi^2 \hbar^3} \left\{ p_{\mathbf{F}} (m^2 c^2 + 2p_{\mathbf{F}}^2) \sqrt{m^2 c^2 + p_{\mathbf{F}}^2} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - (mc)^4 \operatorname{Arccsinh} \frac{p_{\mathbf{F}}}{mc} \right\}. \quad (45)$$

Для середньої енергії взаємодії одержуємо:

$$\bar{W} = \frac{1}{2} V C_\omega^2 \rho^2 + \frac{1}{8} V C_\rho^2 \rho^2 \delta^2 - \frac{1}{2} V C_\sigma^2 \rho^2 \left[\frac{3}{p_{\mathbf{F}}^3} \int_0^{p_{\mathbf{F}}} p^2 \frac{mc}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}} dp \right]^2.$$

Після обчислення інтегралу остаточно маємо:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{1}{2} V C_\omega^2 \rho^2 + \frac{1}{8} V C_\rho^2 \rho^2 \delta^2 - \frac{1}{2} V C_\sigma^2 \rho^2 \times \\ &\times \left(\frac{3mc}{2p_{\mathbf{F}}^2} \right)^2 \left[\sqrt{m^2 c^2 + p_{\mathbf{F}}^2} - \frac{(mc)^2}{p_{\mathbf{F}}} \operatorname{Arccsinh} \frac{p_{\mathbf{F}}}{mc} \right]^2. \quad (46) \end{aligned}$$

На основі знайденого виразу для енергії визначимо тиск (при нульовій ентропії):

$$P = - \frac{\partial E}{\partial V} = P_0 + P_{\text{int}}, \quad (47)$$

де

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{\gamma c}{16\pi^2 \hbar^3} \left\{ p_{\mathbf{F}} \left(\frac{2}{3} p_{\mathbf{F}}^2 - m^2 c^2 \right) \sqrt{m^2 c^2 + p_{\mathbf{F}}^2} + \right. \\ &\left. + (mc)^4 \operatorname{Arccsinh} \frac{p_{\mathbf{F}}}{mc} \right\}, \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{int}} &= \frac{1}{2} C_\omega^2 \rho^2 + \frac{1}{8} C_\rho^2 \rho^2 \delta^2 - \frac{1}{2} C_\sigma^2 \rho^2 \left(\frac{3mc}{2p_{\mathbf{F}}^2} \right)^2 \times \\ &\times \left\{ \frac{4}{3} p_{\mathbf{F}} \left[p_{\mathbf{F}} - \frac{m^2 c^2}{\sqrt{m^2 c^2 + p_{\mathbf{F}}^2}} \operatorname{Arccsinh} \frac{p_{\mathbf{F}}}{mc} \right] - \right. \\ &\left. - \left[\sqrt{m^2 c^2 + p_{\mathbf{F}}^2} - \frac{m^2 c^2}{p_{\mathbf{F}}} \operatorname{Arccsinh} \frac{p_{\mathbf{F}}}{mc} \right]^2 \right\}. \quad (49) \end{aligned}$$

Співвідношення (47) задає рівняння стану при $T = 0$.

Стисливість при $T = 0$ – одна з найважливіших характеристик ядерної матерії, яка визначається величиною K , означеною так:

$$K^{-1} = 9 \frac{\partial P}{\partial \rho}. \quad (50)$$

Щоб оцінити K^{-1} , обчислимо похідну:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{1}{3} \frac{cp_F^2}{\sqrt{m^2c^2 + p_F^2}} + C_\omega^2 \rho + \frac{1}{4} C_\rho^2 \rho \delta^2 - C_\sigma^2 \rho \frac{m^2c^2}{m^2c^2 + p_F^2} \times \frac{1}{2} \left[1 + \frac{mc}{p_F} \frac{mc}{\sqrt{m^2c^2 + p_F^2}} \operatorname{Arcsinh} \frac{p_F}{mc} \right]. \quad (51)$$

Для дослідження властивостей ядерної матерії на основі нашої моделі ми повинні визначити три параметра: C_σ^2 , C_ω^2 , C_ρ^2 . Перш за все, їх значення повинні відтворювати властивості системи у стані рівноваги при $T = 0$, тобто певне значення енергії зв'язку $\epsilon \equiv E/A - mc^2$ та стисливості у випадку симетричної матерії (коли $N = Z$), симетричної енергії, а саме

$$a \equiv \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2(E/A)}{\partial \delta^2} \right|_{\delta=0} = \frac{1}{8} C_\rho^2 \rho,$$

при нормальній густині ядер.

На основі аналітично одержаних залежностей при

$\frac{C_\sigma^2/\hbar c [\text{фМ}^2]}{51.962}$	$\frac{C_\omega^2/\hbar c [\text{фМ}^2]}{47.269}$	$\frac{C_\rho^2/\hbar c [\text{фМ}^2]}{8.614}$
---	---	--

($\hbar c = 197.35 \text{ MeV} \cdot \text{фМ}$) було забезпечено такі значення рівноважних величин:

$\rho_0 [\text{фМ}^{-3}]$	$\epsilon [\text{MeV}]$	$a [\text{MeV}]$	$K^{-1} [\text{MeV}]$
0.16	-15.5	34	294.4

В якості рівноважної густини ρ_0 ми обрали центральну густину ядер, однакову для ядер з різним числом нуклонів (див. рис. 1). Значення стисливості на даний час не є однозначно визначеним в літературі. Адекватними вважаються величини K^{-1} , що попадають у проміжок 250 – 350 MeV [7]. Як зображено на рис. 2, рівноважне значення енергії на нуклон (у випадку симетричної ядерної матерії при $T = 0$) відповідає мінімуму енергії, залежної від густини. Також видно, що за густин $\rho < 0.01 \text{ фМ}^{-3}$ і $\rho > 0.32 \text{ фМ}^{-3}$ нуклони не можуть перебувати у зв'язаному стані.

Таким чином, при $T = 0$ в рамках нашої моделі ми одержали адекватний опис термодинамічних властивостей ядерної матерії. При цьому було встановлено значення параметрів, що потрібно для подальшого дослідження системи релятивістських нуклонів при ненульовій температурі, дослідження критичної точки фазового переходу “рідина–газ”.

5. Симетрична ядерна матерія при $T \neq 0$. Фазовий перехід “рідина–газ”

Зосередимося на випадку симетричної системи релятивістських нуклонів з однаковим числом нейтронів та протонів при ненульовій температурі². У даному випадку виконується рівність $N = Z$, $\delta = 0$, $\gamma = 4$, а також $\mu_n = \mu_p = \mu$. Зрозуміло, що симетрична ядерна матерія поводить себе як однокомпонентна система. Тоді температурний розподіл Фермі запишеться так:

$$n_{\mathbf{p},\Sigma} = \frac{1}{\exp \left[\left(c\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}^2} - \mu \right) / T \right] + 1}, \quad (52)$$

де хімічний потенціал μ визначається з умови:

$$\frac{\gamma}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp \left[\left(c\sqrt{m^2c^2 + p^2} - \mu \right) / T \right] + 1} = \rho. \quad (53)$$

Точний аналітичний вигляд хімічного потенціалу як функції температури T і густини ρ з даної формули встановити неможливо, тому надалі в якості незалежних параметрів, що визначають густину числа частинок і термодинамічні функції, ми розглядаємо T та μ .

Введемо функції, що описуються таким інтегралом:

$$I_\xi(T, \mu) = \int_0^\infty \frac{(1+z^2)^\xi z^2 dz}{\exp \left[\left(mc^2\sqrt{1+z^2} - \mu \right) / T \right] + 1}. \quad (54)$$

Тоді для густини числа частинок маємо:

$$\rho(T, \mu) = \alpha I_0(T, \mu), \quad (55)$$

де $\alpha \equiv \gamma(mc/\hbar)^3/(2\pi^2)$ – числовий коефіцієнт.

Середня енергія $w(T, \mu) \equiv \bar{W}/A$, зумовлена взаємодією, в термінах незалежних величин T та μ зображається так:

$$w(T, \mu) = \frac{\alpha}{2} C_\omega^2 I_0(T, \mu) - \frac{\alpha}{2} C_\sigma^2 \frac{I_{-1/2}^2(T, \mu)}{I_0(T, \mu)}. \quad (56)$$

²Традиційно для ядерної фізики ми використовуємо значення температури в енергетичних одиницях; 1 MeV відповідає температурі $1.2 \cdot 10^{10}$ K.

Середню енергію та термодинамічний потенціал вільних частинок, що припадають на один нуклон, можна подати як

$$e_0(T, \mu) = mc^2 \frac{I_{1/2}(T, \mu)}{I_0(T, \mu)}, \quad \omega_0(T, \mu) = -T \frac{K(T, \mu)}{I_0(T, \mu)}; \quad (57)$$

$$K(T, \mu) = \int_0^\infty z^2 \ln \left\{ 1 + \exp \left[\left(\mu - mc^2 \sqrt{1 + z^2} \right) / T \right] \right\} dz. \quad (58)$$

Залежність повної середньої енергії $e \equiv E/A = e_0 + w$ від густини ρ за різних значень температури зображена на рис. 2.

Опис фазового переходу “рідина–газ” у системі релятивістських нуклонів дамо на основі рівняння стану, яке знайдемо з вільної енергії:

$$f(T, \mu) = \omega_0(T, \mu) + \mu + w(T, \mu), \quad (59)$$

за формулою:

$$P = \rho^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right)_T. \quad (60)$$

Оскільки у нашому підході температура T та хімічний потенціал μ – незалежні змінні, очевидно, що

$$\left(\frac{\partial f(T, \mu)}{\partial \rho(T, \mu)} \right)_T = \left(\frac{\partial f(T, \mu)}{\partial \mu} \right)_T / \left(\frac{\partial \rho(T, \mu)}{\partial \mu} \right)_T. \quad (61)$$

Таким чином легко знаходимо тиск:

$$P(T, \mu) = \alpha T K(T, \mu) + \frac{\alpha^2}{2} C_\omega^2 I_0^2(T, \mu) - \frac{\alpha^2}{2} C_\sigma^2 I_{-1/2}^2(T, \mu) \times \left[2 \frac{1 - J_{-1/2}(T, \mu) / I_{-1/2}(T, \mu)}{1 - J_0(T, \mu) / I_0(T, \mu)} - 1 \right], \quad (62)$$

який виражається через нові інтеграли:

$$J_\xi(T, \mu) = \int_0^\infty \frac{(1 + z^2)^\xi z^2 dz}{\left[\exp \left[(mc^2 \sqrt{1 + z^2} - \mu) / T \right] + 1 \right]^2}. \quad (63)$$

Формули (55), (62) задають рівняння стану у параметричному вигляді. Знайдені за їх допомогою ізотерми, подібні на вандерваальсівські [18], зображено на рис. 3. Круга частина ізотерм (праворуч) відповідає рідкій фазі. Газова фаза описується лівими частинами ізотерм, де тиск повільно змінюється із зменшенням густини.

Для знаходження параметрів критичної точки фазового переходу скористаємося умовами рівноваги фаз для однокомпонентної системи частинок:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_T = 0. \quad (64)$$

У результаті числових розрахунків було знайдено такі значення критичної густини, температури та тиску:

$\rho_{\text{кр}} [\text{фм}^{-3}]$	$T_{\text{кр}} [\text{MeV}]$	$P_{\text{кр}} [\text{MeV}/\text{фм}^3]$
0.0514	11.336	0.191

Крива співіснування фаз ядерної матерії, побудована із застосуванням правила Максвелла, наведена на рис. 4.

Порівняємо отримані значення з раніше представленими у літературі. Експериментально встановлено, що для легких ядер енергія зв'язку ϵ (при $T = 0$) становить близько -8 MeV, а її екстраполяція на випадок нескінченної ядерної матерії приводить до значення -15.5 MeV, що було закладено у нашій моделі. На основі експериментальних даних, одержаних різними групами дослідників для реальних ядер, також здійснено екстраполяцію значення критичної температури фазового переходу на випадок матерії. Так групою ISiS отримано, що $T_{\text{кр}} = 13.6$ MeV, а групою EOS – $T_{\text{кр}} = 12.9$ MeV. При похібці експериментів 2 MeV знайдена нами оцінка є адекватною. Однак вона відрізняється від інших теоретичних оцінок, наприклад з праці [6], де $T_{\text{кр}} = 14.4$ MeV.

Підсумовуючи, відзначимо, що ядерний фазовий перехід “рідина–газ”, параметри критичної точки вже описано в багатьох теоретичних працях із застосуванням різноманітних моделей. Тим не менше, хочемо звернути увагу на важливість одержаного нами результату. По-перше, ми використали послідовно одержану модель в рамках теорії прямих взаємодій, яка є альтернативою до теоретико–польових підходів, а також методу (модельних) псевдопотенціалів. По-друге, зазначений фазовий перехід безпосередньо пов'язаний із релятивістськими ефектами. В цьому легко переконатись, розглядаючи нерелятивістський випадок, в якому скалярна взаємодія давала б внесок $-VC_\sigma^2 \rho^2 / 2$ в \bar{W} . Тому знак \bar{W} , який характеризує притягання чи відштовхування, визначався би сталим виразом $C_\omega^2 - C_\sigma^2$, що виключає можливість переходу між зв'язаними і не зв'язаними станами системи.

6. Модель нейтронної зорі

Знання рівняння стану та густини маси–енергії \mathcal{E} ($\mathcal{E} \equiv E/V$) ядерної матерії для довільного співвідношення N/Z при $T = 0$ дають можливість побудувати та дослідити модель холодної нейтронної зорі. Хоча температура реальних нейтронних зірок становить кілька сот тисяч градусів, однак вона є значно менша за температуру виродження (десятки мільярдів градусів), що дозволяє зосередитись на зазначеному випадку. Таким чином, покладемо вирази (42), (47) в основу нашої моделі. Вони підтверджують той факт, що при характерних для нейтронних зірок густинах числа частинок, які в кілька разів перевищують густину ядер ρ_0 , сили відштовхування між нуклонами переважають над силами притягання. Рівновага та стійкість таких макроскопічних об'єктів забезпечуються наявністю гравітаційних сил. Тому до рівнянь моделі слід додати рівняння гідростатичної рівноваги зорі, одержані Оппенгеймером та Волковим в рамках загальної теорії відносності (див. [9]):

$$c^2 \frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \mathcal{E}(r), \quad (65)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -g \frac{[\mathcal{E}(r) + P(r)][m(r)c^2 + 4\pi r^3 P(r)]}{r^2[1 - 2gm(r)c^2/r]}, \quad (66)$$

де густина маси–енергії та тиск є функціями радіуса r ; константа $g^{-1} \equiv c^4/G = 75.57 \cdot 10^{40} \text{ MeV} \cdot \text{фм}^{-1}$; G — гравітаційна стала.

Тут ми зосередимося на випадку моделі ізотропної зорі із сталою величиною густини маси–енергії $\mathcal{E}(\rho_c, y)$, де ρ_c — густина частинок в центрі зорі, y — частка протонів, яка є фіксованою величиною за умов β -рівноваги. Тоді рівняння гідростатичної рівноваги інтегруються аналітично [9]:

$$m(r)c^2 = \frac{4\pi}{3} r^3 \mathcal{E}(\rho_c, y), \quad \text{при } r < R, \quad (67)$$

$$P(r) = \mathcal{E}(\rho_c, y) \frac{\sqrt{1 - 2gMc^2 r^2/R^3} - \sqrt{1 - 2gMc^2/R}}{3\sqrt{1 - 2gMc^2/R} - \sqrt{1 - 2gMc^2 r^2/R^3}}, \quad (68)$$

де $M = 4\pi R^3 \mathcal{E}(\rho_c, y)/(3c^2)$ — повна маса нейтронної зорі, R — її радіус. Як і повинно бути, тиск обертається в нуль на поверхні зорі, тобто $P(R) = 0$.

При $r = 0$, тобто в центрі зорі, вираз для тиску можна переписати так:

$$P(\rho_c, y) = \mathcal{E}(\rho_c, y) \frac{1 - \sqrt{1 - (8\pi/3)gR^2 \mathcal{E}(\rho_c, y)}}{3\sqrt{1 - (8\pi/3)gR^2 \mathcal{E}(\rho_c, y)} - 1}, \quad (69)$$

використовуючи рівняння стану. Звідки легко знаходимо радіус зорі:

$$R(\rho_c, y) = \sqrt{\frac{3/(8\pi)}{g\mathcal{E}(\rho_c, y)}} \sqrt{1 - \left[\frac{\mathcal{E}(\rho_c, y) + P(\rho_c, y)}{\mathcal{E}(\rho_c, y) + 3P(\rho_c, y)} \right]^2}, \quad (70)$$

а разом з тим і повну масу зорі як функції центральної густини числа частинок ρ_c та параметра y .

Залежність маси зорі від її радіуса наведена на рис. 5, на якому максимальне значення маси у випадку $y = 0.1$ відповідає густині $\rho = 0.746 \text{ фм}^{-3}$, для $y = 0.2$ — $\rho = 0.795 \text{ фм}^{-3}$, а для $y = 0.3$ — $\rho = 0.831 \text{ фм}^{-3}$. Легко бачити, що вона описує малі нейтронні зорі і не узгоджується із стандартними залежностями (див. рис. 6 з [19]), що демонструють зменшення маси зірок із збільшенням їх радіуса. Тим не менше, про достовірність нашої моделі свідчить те, що вихідне рівняння стану привело до адекватного опису фазового переходу “рідина–газ”, та астрономічні спостереження, які виявили зорі з характеристиками, близькими до встановлених нами. До кандидатів в малі нейтронні зорі можна віднести ізольовану нейтронну зорю RX J1856.5–3754, пульсар 3C58 [20], 4U 1728–34 [21]. Цікаво зауважити, що така сама залежність маси від радіуса має місце у випадку моделей зірок, що складаються з кваркової матерії [22, 23]. Тому подальші як теоретичні так і експериментальні дослідження повинні дати відповідь про можливість ідентифікації малих нейтронних та кваркових зірок, теорію про їх походження.

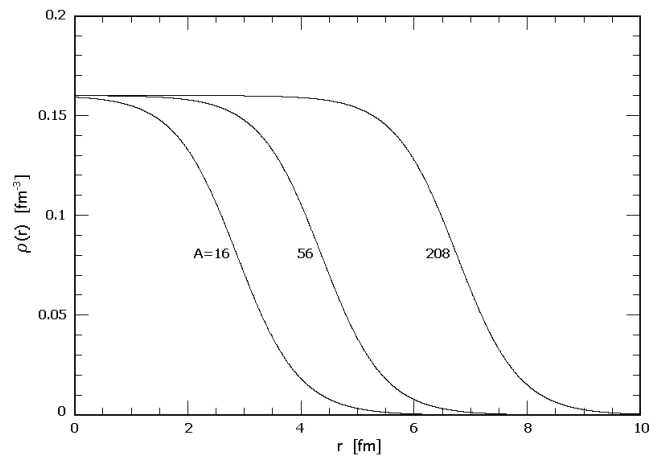


Рис. 1. Експериментально встановлений розподіл густини числа нуклонів в ядрах з різним A .

Література

1. Belkacem M. *et al.* Searching for the nuclear liquid-gas phase transition in Au-Au collisions at 35 MeV/nucleon // Phys. Rev. C. – 1996. – Vol. 54. – P.2435–2444.
2. Elliot J.B. *et al.* The liquid to vapor phase transition in excited nuclei // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 88: 042701.
3. Srivastava B.K. *et al.* Multifragmentation and phase transition: A systematic study of the MF of 1-A-GeV Au, La, and Kr // Phys. Rev. C. – 2002. – Vol. 65: 054617.
4. Karnaukhov V.A. *et al.* Critical temperature for the nuclear liquid-gas phase transition // Phys. Rev. C. – 2003. – Vol. 67: 011601.
5. Elliot J.B. *et al.* Constructing the phase diagram of finite neutral nuclear matter // Phys. Rev. C. – 2003. – Vol. 67: 024609.
6. Muller H., Serot B.D. Phase transitions in warm, asymmetric nuclear matter // Phys. Rev. C. – 1995. – Vol. 52. – P. 2072–2091.
7. Sahu P.K., Ohnishi A. SU(2) Chiral sigma model and the properties of neutron stars // nucl-th/0007068. – 2000.
8. Avancini S.S., Bracco M.E., Chiapparini M., and Menezes D.P. Relativistic mean field approximation in a density dependent

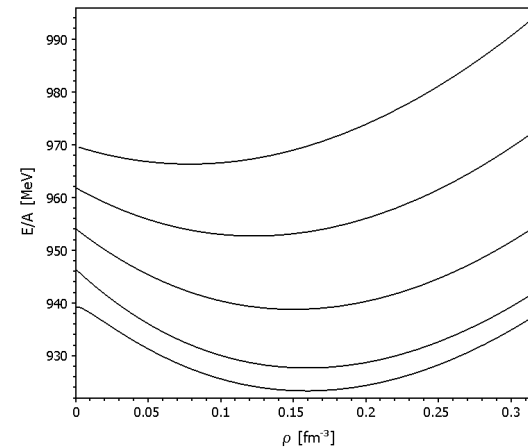


Рис. 2. Залежність маси-енергії нуклона від густини у симетричній ядерній матерії при $T = 20$ MeV, $T = 15$ MeV, $T = 10$ MeV, $T = 5$ MeV, $T = 0$ (зверху до низу).

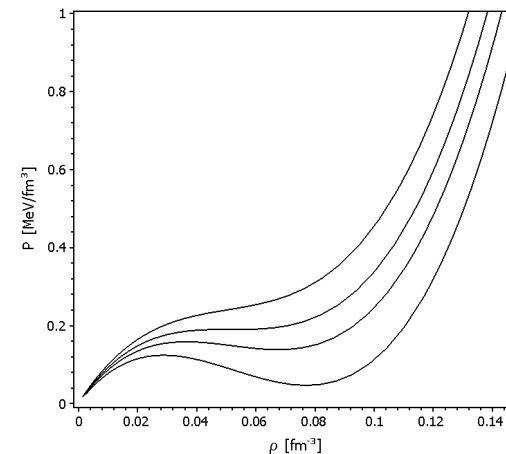


Рис. 3. Ізотерми симетричної ядерної матерії при $T = 12$ MeV, $T = 11.336$ MeV, $T = 10.8$ MeV, $T = 10$ MeV (зверху до низу).

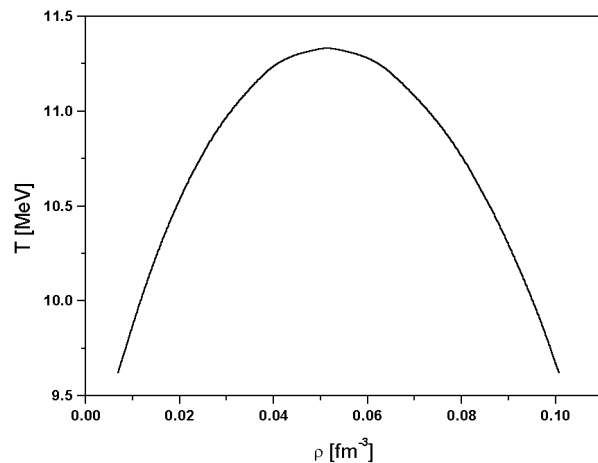


Рис. 4. Крива співіснування рідкої та газоподібної фаз симетричної ядерної матерії.

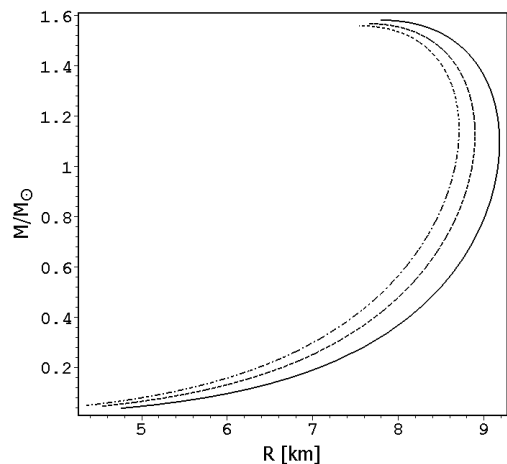


Рис. 5. Залежність маси нейтронної зорі від її радіуса при $y = 0.1$ (суцільна лінія), $y = 0.2$ (пунктирна лінія), $y = 0.3$ (штрих-пунктирна лінія).

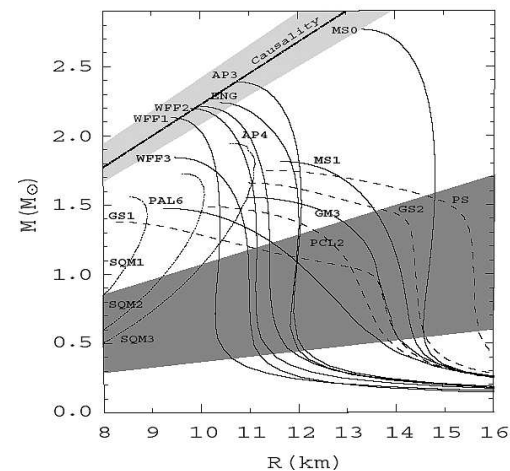


Рис. 6. Залежність маси зорі від її радіуса: SQM 1–3 — кваркові зорі, решта — “стандартні” нейтронні.

parametrization model at finite temperature // nucl-th/0212080. – 2002.

9. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation. – San Francisco: Freeman, 1973.
10. Serot B.D., Walecka J.D. The relativistic nuclear many-body problem // Adv. Nucl. Phys. – 1986. – Vol. 16. – P. 1.
11. Durand D., Suraud E., Tamain B. Nuclear dynamics in the nucleonic regime. – IOP Publishing Ltd, 2001.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. – М.: Наука, 1963. – 704 с.
13. Dirac P.A.M. Forms of relativistic dynamics // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21. – P. 392–399.
14. Nazarenko A. Canonical realization of Poincaré algebra: from field theory to direct-interaction theory // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2002. – Vol. 43, Part 2. – P. 652–658.
15. Nazarenko A. Elimination of the field degrees of freedom in relativistic system of point-like charges // Int. J. Mod. Phys. A. – 2001. – Vol. 16, № 30. – P. 4865–4889.
16. Назаренко А.В. Виключення польових ступенів вільності в релятивістичній системі точкових частинок із безмасовим скаляр-

- ним полем // Журн. Физ. Досл. – 2000. – Т. 4, № 4. – С. 380–386.
17. Currie D.G., Jordan J.F., Sudarshan E.C.G. Relativistic invariance and Hamiltonian theories of interacting particles // *Rev. Mod. Phys.* – 1963. – Vol. 35. – P. 350–375.
 18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. – М.: Наука, 1964. – 568 с.
 19. Mori K., Hailey C.J. X-Ray spectroscopy of the isolated neutron star 1E1207.4–5209: Atmospheric composition and equation of state // *astro-ph/0301161*. – 2003.
 20. Chandra photo album // chandra.harvard.edu/photo/2002/0211/ – 2002.
 21. Bombaci I., Thampan A.V., Datta B. Rapidly rotating strange stars for a new equation of state of strange quark matter // *astro-ph/0009328*. – 2000.
 22. Zdunik J.L. Strange stars – linear approximation of the EOS and maximum QPO frequency // *astro-ph/0004375*. – 2000.
 23. Godek-Rosinska D., Bulik T., Zdunik L., Gourgoulhon E., Ray S., Dey J., Dey M. Rotating compact strange stars // *astro-ph/0007004*. – 2000.
-

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Андрій Володимирович Назаренко
Андрій Ярославович Андрусик

РІВНЯННЯ СТАНУ СИСТЕМИ РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ НУКЛОНІВ З
ПРЯМОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

Роботу отримано 24 вересня 2003 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії металів і сплавів

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені