

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-03-22U

Олег Держко

ВЕЛИКІ ПИТАННЯ ФІЗИКИ
ОЧИМА ДОСЛІДНИКІВ КОНДЕНСОВАНОЇ МАТЕРІЇ

УДК: 532:530.145; 538.94-404; 531; 531.12/.13:530.12; 537.8

PACS: 67.40.-w; 03.50.De

Великі питання фізики очима дослідників конденсованої матерії

Олег Держко

Анотація. Це є запрошена лекція, прочитана на IIIй робочій нараді-семінарі молодих вчених з статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 5-6 червня 2003 року).

Big issues of physics from the point of view of physicists studying condensed matter

Oleg Derzhko

Abstract. This is the invited lecture given at the IIIrd workshop-seminar of young researchers in statistical physics and condensed matter theory (L'viv, June 5-6, 2003).

Звичайно у фізиці розрізняють дві великі області дослідження. Перша стосується елементарних частинок і взаємодій між ними. Це фундаментальна фізика. Друга стосується властивостей речовини. Це фізика твердого тіла, рідини і т.д. чи фізика конденсованої матерії. Дослідники, що працюють у галузі фундаментальної фізики, будують прискорювачі (аж до найбільшого – такого, що охоплюватиме Землю вздовж екватора) або використовують існуючі умови в космосі для перевірки своїх теорій. Дослідники фізики конденсованої матерії вимірюють температурну залежність теплоємності, перевіряючи відхилення від закону Дюлонга-Пті, чи залежність напруга – струм, перевіряючи справедливості закону Ома. Але ці різючі відмінності у характері поставлених питань і (енергетичних) затратах для експериментів насправді не свідчать про прірву між фундаментальною фізикою і фізикою конденсованих систем. Великі фізичні теорії, такі як електродинаміка Максвелла, теорія відносності чи теорія електрона Дірака, несподівано виникають у дослідженнях з фізики конденсованих систем. Таких прикладів є досить багато, вони добре (і давно) відомі, хоча рідко обговорюються у навчальній літературі. Один з прикладів, що ілюструє зв'язок між феноменологічною теорією (гідродинамікою) плівок надплинного гелію і електродинамікою Максвелла у 2+1 просторі (теорія Максвелла для двовимірної електродинаміки), і буде предметом обговорення. Детальніше це питання розглянуто у працях [1–3]¹.

1. Про надплинний гелій

Нагадаймо коротко деякі відомі речі про надплинний гелій [4–7].

Плин ізотопу гелію He^4 складається з атомів He^4 , що мають цілий спін (тобто є бозонами, на відміну від атомів гелію He^3 , які є ферміонами) і які, якщо мова йде про енергії $\sim \text{eV} \sim 10^4 \text{ K}$, добре описуються оператором Гамільтона

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_n \frac{\hat{\mathbf{p}}_n^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} \hat{U}(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|) \\ &= \sum \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \sum \langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | U | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle \hat{a}_{\mathbf{p}'_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}'_2}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де потенціал міжатомної взаємодії $U(r)$ має як твердосферне відштовхування так і дуже мілку яму. Деталі цього гамільтоніану (потенці-

¹Приведений тут розгляд є дещо розширений виклад матеріалу розділу II.A праці *Shou-Cheng Zhang*'a [3].

алу) виявляться неістотними, коли мова піде про поведінку системи при температурах $\sim \text{K} \sim 10^{-4} \text{ eV}$.

При пониженні температури плин He^4 переходить у надплинний стан (рідкий гелій II) (див. рис. 1). Перехід у надплинний стан по-

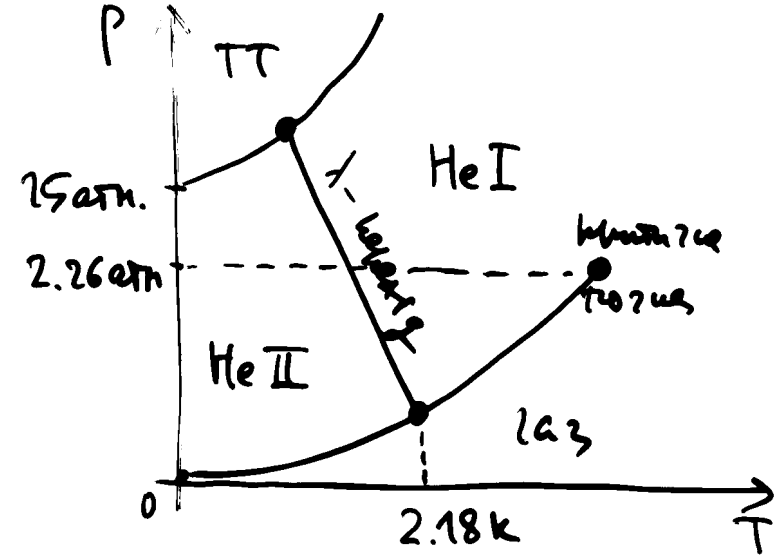


Рис. 1. Фазова діаграма He^4 (згідно з [4]).

в'язаний з перерозподілом атомів He^4 за імпульсами. У надплинній рідині макроскопічно велике число атомів має імпульс строго рівний нулю. Такі атоми утворюють конденсат (конденсат Бозе-Айнштайна). У ідеальному бозе-газі (немає доданка з міжатомною взаємодією у (1.1)) при $T = 0$ всі частинки переходять у конденсат (а починають переходити при температурі конденсації Бозе-Айнштайна T_c , так що $\frac{N_{p=0}}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}}$); у майже ідеальному бозе-газі (слабонеідеальний бозе-газ Боголюбова) при $T = 0$ майже всі частинки переходять у конденсат ($\frac{\langle a_{\mathbf{p}=0}^+ a_{\mathbf{p}=0} \rangle}{N} = 1 - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{a^3 N}{\pi V}}$, a – довжина розсіювання чи діаметр твердої сфери, що моделює короткосяжне відштовхування частинок); у бозе-рідині із сильною взаємодією при $T = 0$ лише кілька відсотків від загального числа частинок переходять у конденсат.

Явище коденсації Бозе-Айнштайна істотно залежить від розмір-

ності простору. Звичайно ми говоримо про тривимірний простір. Якщо ж маємо справу з плівкою бозе-рідини (двовимірна бозе-рідина), то конденсат може існувати лише при $T = 0$ і не існує при будь-якій відмінній від нуля температурі. Існування конденсату доведено для ґраткової версії двовимірної бозе-рідини у праці [8]; при цьому (за наявності взаємодії) значна частина частинок (хоча не всі) має нульовий імпульс.

Як виглядає хвильова функція конденсату? Якщо система однорідна і нерухома, то це мала б бути константа, незалежна від координат,

$$\psi_0(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_0}, \quad (1.2)$$

де n_0 є число конденсатних частинок в одиниці об'єму. Але оскільки конденсат може бути в просторово-неоднорідних умовах (з великою довжиною розміру неоднорідності) і нестационарних зовнішніх умовах (з великим часовим періодом), то хвильова функція конденсату має вигляд

$$\psi_0(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_0(\mathbf{r}, t)} \exp(i\phi(\mathbf{r}, t)). \quad (1.3)$$

Хвильова функція (1.3) дає густину потоку (конденсатних частинок)

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \frac{i\hbar}{2m} (\psi_0 \nabla \psi_0^* - \psi_0^* \nabla \psi_0) \\ &= \frac{\hbar}{m} n_0(\mathbf{r}, t) \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \\ &= n_0(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (1.4)$$

де

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.5)$$

є швидкість руху (конденсатних частинок) (the first Josephson equation of superfluidity). Це бездисипативний рух, який може відбуватися у рівноважному стані. Рівняння Шредингера передбачає наступне рівняння неперервності

$$\frac{\partial n_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (1.6)$$

Якщо ми маємо справу з незначними відхиленнями від однорідності, то при обчисленні дивергенції у другому доданку в (1.6) можна взяти

середню густину конденсату \bar{n}_0 , адже $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ є мала величина, а її добуток на малу величину $n_0(\mathbf{r}, t) - \bar{n}_0$ є дуже мала величина. Тому рівняння неперервності (1.6) у такому разі має вигляд

$$\frac{\partial n_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{n}_0 \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (1.7)$$

Далі, рівняння Шредингера

$$\begin{aligned} & i\hbar \frac{\partial \psi(\dots, \mathbf{r}_n, \dots, t)}{\partial t} \\ &= \sum_n \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_n^2 \right) \psi(\dots, \mathbf{r}_n, \dots, t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} U(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|) \psi(\dots, \mathbf{r}_n, \dots, t), \end{aligned} \quad (1.8)$$

коли мова йде про основний стан багатобозонної системи і випадок незначних відхилень від однорідності, може бути записане спочатку як

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_0(\mathbf{r}, t) + \overline{u(\mathbf{r})} \psi_0(\mathbf{r}, t), \quad (1.9)$$

де $\overline{u(\mathbf{r})}$ є середня потенціальна енергія системи на одну частинку, яка є хімічним потенціалом системи $\mu(\mathbf{r})$, а після підстановки (1.3) у (1.9) – у вигляді

$$\begin{aligned} & -\hbar \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \psi_0(\mathbf{r}, t) + \frac{i\hbar}{2n_0(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial n_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \psi_0(\mathbf{r}, t) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_0(\mathbf{r}, t) + \mu(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Зрозуміло, що оскільки мова йде про незначні відхилення від однорідності і стаціонарності, доданки

$$\begin{aligned} & \frac{i\hbar}{2n_0(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial n_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \\ & -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \left(\sqrt{n_0(\mathbf{r}, t)} \exp(i\phi(\mathbf{r}, t)) \right) \end{aligned}$$

можна опустити. Тому приходимо до висновку, що рівняння Шредингера твердить, що

$$\hbar \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\mu(\mathbf{r}) \quad (1.11)$$

(the second Josephson equation of superfluidity).

З рівняння (1.11) (з врахуванням рівняння (1.5)) можна знайти зміну швидкості конденсату, зумовлену його неоднорідністю,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{m} \nabla \mu(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{1}{m} \frac{\kappa}{n_0} \nabla n_0(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (1.12)$$

де запроваджена стисливість системи

$$\kappa = n_0 \frac{\partial \mu}{\partial n_0}. \quad (1.13)$$

Підкреслимо знову, що нас цікавить випадок незначних відхилень від однорідності і стаціонарності; саме за таких умов справедливе рівняння (1.12).

Рух конденсату має цікаві особливості. Цей рух є потенціальним, тобто

$$\text{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \text{rot} \left(\frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \right) = 0. \quad (1.14)$$

Це означає, що якщо помістити конденсат у циліндр, що обертається навколо своєї осі, то конденсат мав би залишатися нерухомим. Якщо б конденсат обертався з циліндром як ціле (див. рис. 2), то стаціонарне поле швидкості було б

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j} \quad (1.15)$$

і

$$\text{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega} \neq 0, \quad (1.16)$$

що суперечить умові потенціальності поля швидкості (1.14). Поле швидкості конденсату таким бути не може. З другого боку, у конденсаті можуть бути вихрові нитки, які реалізують потенціальне обертання (див. рис. 3). Розгляньмо стаціонарне поле швидкості

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \quad (1.17)$$

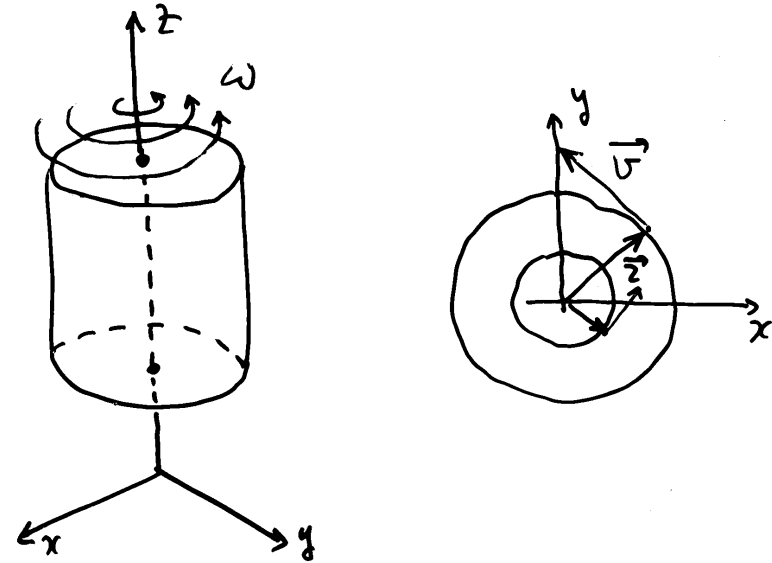


Рис. 2. Конденсат у циліндрі, що обертається.

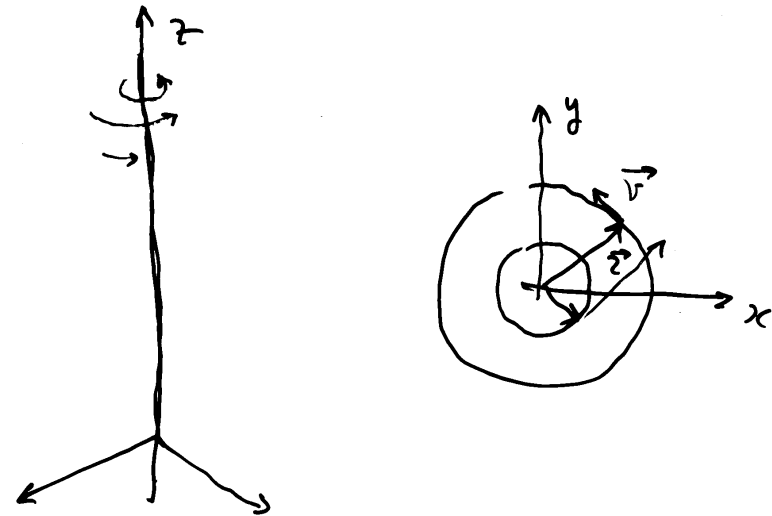


Рис. 3. Потенціальне обертання конденсату; нитка є безмежно тонка (\sim атомних розмірів).

у всьому просторі окрім безмежно тонкої (\sim атомних розмірів) (прямолинійної) нитки $x = y = 0$. Прямим обчисленням перекоонуємося, що умова потенціальності не порушується, тобто

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2+y^2} \right) \mathbf{k} = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Зауважуємо, що при потенціальному обертанні величина швидкості (1.17) обернено пропорційна відстані до нитки, а не пропорційна відстані до осі циліндра, як є при обертанні конденсату в циліндрі як цілого (1.15).

Поле швидкості (1.17) характеризує параметр \varkappa

$$\oint \mathbf{dl} \cdot \mathbf{v} = 2\pi\varkappa \quad (1.19)$$

(зрозуміло, що через потенціальність форма контура тут неістотна)². Параметр \varkappa у п.с. (1.19) не може бути довільним. З математичного аналізу [9] ми знаємо, що

$$\int_{\widetilde{AB}} \mathbf{dl} \cdot \mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \int_{\widetilde{AB}} \mathbf{dl} \cdot \nabla \phi = \frac{\hbar}{m} (\phi(B) - \phi(A)). \quad (1.20)$$

Якщо дуга \widetilde{AB} перетворюється у коло, то різниця фаз хвильової функції $\phi(B) - \phi(A)$ (див. (1.3)) мусить бути кратна 2π , так що

$$\varkappa = \frac{\hbar}{m} q, \quad (1.21)$$

де q є ціле число. Далі, термодинамічно стійкими виявляються лише вихрові нитки з найменшим можливим значенням $\oint \mathbf{dl} \cdot \mathbf{v}$, тобто, з завихреністю (vorticity) $q = \pm 1$ (як у електродинаміці, де є два роди заряду, а не як у хромодинаміці). Таким чином, якщо є багато вихрових ниток, то

$$\oint \mathbf{dl} \cdot \mathbf{v} = \sum_n 2\pi \frac{\hbar}{m} q_n, \quad (1.22)$$

²На перший погляд $\oint \mathbf{dl} \cdot \mathbf{v} = 0$ через те, що $\text{rot} \mathbf{v} = 0$. Але $\text{rot} \mathbf{v} = 0$ всюди, крім нитки! Насправді $\text{rot} \mathbf{v} \sim \delta(x)\delta(y)\mathbf{k}$ (див. (1.23)).

або у диференціальній формі

$$\text{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2\pi\rho_v(\mathbf{r})\mathbf{k}, \quad (1.23)$$

де

$$\rho_v(\mathbf{r}) = \sum_n \frac{\hbar}{m} q_n \delta(x - x_n) \delta(y - y_n) \quad (1.24)$$

є густина прямолинійних вихрових ниток.

Звичайно, вихрові нитки можуть рухатися. Тоді є струм вихрових ниток $\mathbf{j}_v = \rho_v \mathbf{v}_v$, і має місце рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho_v(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j}_v(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.25)$$

що виражає збереження (кількості) вихрових ниток. Врахування наявності вихрових ниток (1.23), (1.25) приводить до потреби модифікувати рівняння (1.12): у зміні швидкості $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ буде внесок і від вихрових ниток. Це буде зроблено нижче у двовимірному випадку.

2. Гідродинаміка плівки надплинного гелію і (2+1)-вимірна електродинаміка Максвелла

Розглянемо плівку надплинного гелію³. Якщо ми досліджуємо малі відхилення від однорідного і стаціонарного стану (маючи у розпорядженні малі енергетичні ресурси), то вимірюватимемо векторне поле швидкості $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t) = (v_x(x, y, t), v_y(x, y, t))$ і скалярне поле густини $n_0 = n_0(x, y, t)$ за наявності вихрових ниток з густиною $\rho_v = \rho_v(x, y, t)$ і з струмом $\mathbf{j}_v = \mathbf{j}_v(x, y, t) = (j_{vx}(x, y, t), j_{vy}(x, y, t))$ (див. рис. 4). Згідно з розвинутою теорією ці величини задовольняють систему рівнянь

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 2\pi\rho_v \mathbf{k} \quad (2.1)$$

(рівняння (1.23)),

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_v = 0 \quad (2.2)$$

³Зазначимо, що у двовимірному випадку при $T = 0$ бозе-рідина не завжди є у надплинній фазі. Вона (наприклад, бозе-рідина куперівських пар) може бути і у фазі бозе-металу, якщо є так звана кільцева обмінна взаємодія (ring exchange) [10].

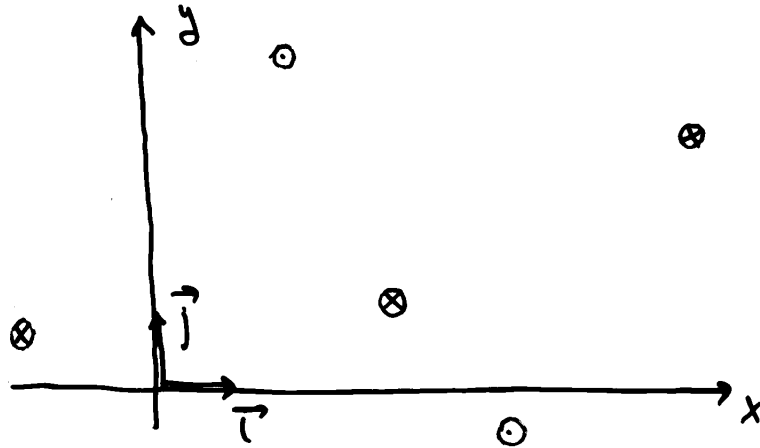


Рис. 4. Плівка надплинного гелію з вихровими нитками.

(рівняння (1.25)),

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \bar{n}_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.3)$$

(рівняння (1.7)),

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\kappa}{m\bar{n}_0} \left(\frac{\partial n_0}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial n_0}{\partial y} \mathbf{j} \right) \quad (2.4)$$

(рівняння (1.12)). Виведення рівнянь ефективної теорії поля для низькоенергетичної поведінки системи (1.1) можна провести і акуратніше; тоді ми зв'яжемо значення параметрів у ефективній теорії з мікроскопічними деталями (залежністю $U(r)$ у (1.1)), а також отримаємо поправки до ефективної теорії, які треба враховувати, коли енергії зростають. Важливо, однак, що у низькоенергетичній границі отримані рівняння є точними!

Рівняння (2.1) – (2.4) є теорією Максвелла для двовимірної електродинаміки. Покажемо це. Почнемо з рівняння (2.1). Якщо покласти

$$E_x = v_y, \quad E_y = -v_x, \quad (2.5)$$

то рівняння (2.1) можна записати у вигляді

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 2\pi \rho_v. \quad (2.6)$$

Це закон Гауса (Кулона) чи перше рівняння Максвелла у двовимірній електродинаміці. Рівняння неперервності (2.2) виражає закон збереження заряду.

Друге рівняння Максвелла про соленоїдальність магнітного поля

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

у двовимірному випадку задовольняє магнітне поле

$$\mathbf{H} = (0, 0, H_z(x, y, t)). \quad (2.8)$$

Якщо покласти у згоді з (2.8)

$$H_z = -c \frac{n_0}{\bar{n}_0} \quad (2.9)$$

(тут c є “швидкість світла”), то рівняння (2.3) твердить

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.10)$$

тобто

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Це закон Фарадея чи третє рівняння Максвелла.

Перейдемо нарешті до рівняння (2.4). У позначеннях (2.5), (2.9) воно має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\kappa}{mc^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{\kappa}{mc^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

тобто

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\kappa}{mc^2} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{j} \right) = \frac{\kappa}{mc^2} \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (2.13)$$

Це четверте рівняння Максвелла у відсутності струмів, а лиш із струмом зміщення Максвелла; при цьому швидкість світла є

$$c = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}. \quad (2.14)$$

Але рівняння (2.4) чи рівняння (2.13) не враховують внеску у зміну швидкості \mathbf{v} чи напруженості електричного поля \mathbf{E} через наявність вихрових ниток чи зарядів. Обчислюючи rot від л.с. рівняння (2.4), отримуємо

$$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{v} = 2\pi \frac{\partial}{\partial t} \rho_v \mathbf{k} = -2\pi (\nabla \cdot \mathbf{j}_v) \mathbf{k} \quad (2.15)$$

(використано рівняння (2.1) і (2.2)), що не дорівнює нулю при $\mathbf{j}_v \neq 0$, тоді ж як rot від п.с. рівняння (2.4) дорівнює нулю тотожно. Додамо у л.с. рівняння (2.4) доданок

$$2\pi (-j_{vy}, j_{vx}).$$

Тоді при обчисленні rot від л.с. рівняння (2.4) вже матимемо тотожно нуль

$$-2\pi (\nabla \cdot \mathbf{j}_v) \mathbf{k} + 2\pi \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -j_{vy} & j_{vx} & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.16)$$

З другого боку, рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} - 2\pi j_{vy} &= -\frac{\kappa}{m\bar{n}_0} \frac{\partial n_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + 2\pi j_{vx} &= -\frac{\kappa}{m\bar{n}_0} \frac{\partial n_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.17)$$

у позначеннях (2.5), (2.9), (2.14) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{2\pi}{c} j_{vy} &= \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{2\pi}{c} j_{vx} &= -\frac{\partial H_z}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

тобто

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{2\pi}{c} \mathbf{j}_v + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Це четверте рівняння Максвелла: закон Біо-Савара (Ампера) з врахуванням струму зміщення Максвелла.

Рівняння гідродинаміки для плівки He^4 (чи (2+1)-вимірної електродинаміки Максвелла) можна записати і у релятивістичних позначеннях [3]. Справді, використовуючи антисиметричний тензор у двовимірному випадку ϵ_{ij} , матимемо

$$\epsilon_{ij} v_j \Leftrightarrow E_i, \quad i = 1, 2; \quad (2.20)$$

$$-\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \frac{n_0}{\bar{n}_0} \Leftrightarrow H. \quad (2.21)$$

Далі

$$\epsilon_{ij} \partial_i v_j = 2\pi \rho_v \Leftrightarrow \partial_i E_i = 2\pi \rho \quad (2.22)$$

(закон Гауса);

$$\partial_t n_0 + \partial_i (\bar{n}_0 v_i) = 0 \Leftrightarrow \epsilon_{ij} \partial_i E_j = -\frac{1}{c} \partial_t H \quad (2.23)$$

(закон Фарадея);

$$\partial_t v_i = -\frac{\kappa}{m\bar{n}_0} \partial_i n_0 \Leftrightarrow \frac{1}{c} \partial_t E_i = \epsilon_{ij} \partial_j H \quad (2.24)$$

(четверте рівняння Максвелла у відсутності струмів);

$$\partial_t \rho_v + \partial_i j_{vi} = 0 \Leftrightarrow \partial_t \rho + \partial_i j_i = 0 \quad (2.25)$$

(закон збереження заряду);

$$\partial_t v_i - 2\pi \epsilon_{ik} j_{vk} = -\frac{\kappa}{m\bar{n}_0} \partial_i n_0 \Leftrightarrow \epsilon_{ij} \partial_j H = \frac{2\pi}{c} j_i + \frac{1}{c} \partial_t E_i \quad (2.26)$$

(четверте рівняння Максвелла).

Таким чином, ми бачимо повну еквівалентність між рівняннями для надплинної плівки і рівняннями Максвелла у просторі розмірності 2+1 (див. табл. 1).

3. Замість висновків

Здобуті результати дозволяють нам говорити наступне.

- Шкала енергій. “Цивілізація”, яка живе у плівці гелію, відкрила б спочатку рівняння Максвелла (2.6), (2.11), (2.19) для полів \mathbf{v} і n_0 . Якщо б цій цивілізації із її розвитком стали доступними більші енергії (\sim eV), то вона б встановила гамільтоніан багатобозонної системи (1.1) (а потім знову електродинаміку Максвелла, вчення про лептони, кварки і глюони і т.д.). Важливо, які енергії є доступними. У низькоенергетичній границі “справжньої” теорії виникає нова ефективна теорія. Звичайно легше вивчати фізику при низьких енергіях, яка описується ефективною теорією. Як на основі цього відгадати поведінку системи при великих енергіях (“справжню” теорію)? Такого типу питання притаманні сучасній фізиці елементарних частинок (і фізиці конденсованої матерії).

Табл. 1. Про еквівалентність між рівняннями для надплинної плівки і рівняннями Максвелла у просторі розмірності 2+1.

Феноменологія плівки He^4 при $T = 0$	Фундаментальна фізика у просторі 2+1
густина вихрових ниток ρ_v	густина заряду ρ
струм вихрових ниток $\mathbf{j}_v = \rho_v \mathbf{v}_v$	струм заряду $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$
швидкість $\mathbf{v}(x, y, t) = (v_x(x, y, t), v_y(x, y, t))$	електричне поле $\mathbf{E}(x, y, t) = (E_x(x, y, t), E_y(x, y, t))$
густина $n_0(x, y, t)$	магнітне поле $H_z(x, y, t)$

При цьому $\rho_v = \rho$, $\mathbf{j}_v = \mathbf{j}$, $v_x = -E_y$, $v_y = E_x$, $-\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \frac{n_0}{n_0} = H_z$, $\sqrt{\frac{\kappa}{m}} = c$.

- Фундаментальні рівняння і феноменологія. Дещо несподіваним є те, що фізика надплинної плівки гелію є закумульована у формі рівнянь Максвелла. Звичайно вважається, що рівняння Максвелла виражають дуже глибокі властивості природи. Але перелік прикладів, коли факти з фізики конденсованої матерії можуть мати вигляд фундаментальних рівнянь, можна продовжити. Якщо розглянути двовимірну модель Габбарда, то її низькоенергетичні збудження описує середньопольовий гамільтоніан Бардіна-Купера-Шриффера, який можна переписати як рівняння Дірака у вимірності простору 2+1 [3]. Моделі квантового ефекту Холла мають багату фізику у низькоенергетичній границі. Про це написано дуже багато за останні десять-п'ятнадцять років (див., наприклад, [11]).

Література

1. V. Ambegaokar, B. I. Halperin, D. R. Nelson, and E. D. Siggia, *Dynamics of superfluid films*, Phys. Rev. B **21**, 1806 (1980).
2. M. P. A. Fisher and D. H. Lee, *Correspondence between two-dimensional bosons and a bulk superconductor in a magnetic field*, Phys. Rev. B **39**, 2756 (1989).
3. S.-C. Zhang, *To see a world in a grain of sand*, arXiv:hep-th/0210162.

4. К. Хуанг, *Статистическая механика* (Мир: Москва, 1966).
5. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести* (Наука: Москва, 1971).
6. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика, часть 2. Теория конденсированного состояния* (Наука: Москва, 1978).
7. А. С. Кондратьев, А. Е. Кучма, *Лекции по теории квантовых жидкостей* (Издательство Ленинградского университета: Ленинград, 1989).
8. T. Kennedy, E. H. Lieb, and B. S. Shastry, *The XY model has long-range order for all spins and all dimensions greater than one*, Phys. Rev. Lett. **61**, 2582 (1988).
9. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, *Основы математического анализа, часть II* (Наука: Москва, 1980), с. 200.
10. A. Paramekanti, L. Balents, and M. P. A. Fisher, *Ring exchange, the Bose metal, and bosonization in two dimensions*, arXiv:cond-mat/0203171.
11. E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems* (Addison-Wesley Publishing Company: Redwood City, California Menlo Park, California Reading, Massachusetts New York Don Mills, Ontario Workingham, United Kingdom Amsterdam Bonn Sydney Singapore Tokyo Madrid San Juan, 1991).

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Олег Володимирович Держко

ВЕЛИКІ ПИТАННЯ ФІЗИКИ ОЧИМА ДОСЛІДНИКІВ КОНДЕНСОВАНОЇ
МАТЕРІЇ

Роботу отримано 1 липня 2003 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії модельних
спінових систем

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені