Національна академія наук України

ІНСТИТУТ ФІЗИКИ КОНДЕНСОВАНИХ СИСТЕМ

ICMP–05–22U

П.А. Глушак, М.В. Токарчук

КІНЕТИЧНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ БОЗЕ-СИСТЕМИ З ВРАХУВАННЯМ КРУПНОМАШТАБНИХ ГІДРОДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

ЛЬВІВ

УДК: 532.50; 536-12.01.

PACS: 05.20.Dd, 05.60.+w, 52.25.Fi, 71.45.G, 82.20.M

Кінетичні рівняння для бозе-системи з врахуванням крупномасштабних гідродинамічних процесів

П.А. Глушак, М.В. Токарчук

Анотація. Для квантової бозе-системи запропоновано підхід для опису кінетики з врахуванням повільних гідродинамічних процесів переносу. В такому підході обчислено нерівноважний статистичний оператор, що узгоджено описує як кінетичні так і нелінійні гідродинамічні флуктуації в квантовій рідині. З допомогою цього оператора отримано зв'язаний набір рівнянь для квантової одночастинкової функції розподілу та функціоналу гідродинамічних змінних: густини числа частинок, густин імпульсу та енергії.

Kinetic equations for Bose system taking into account the large-scale hydrodynamic processes.

P.A. Hlushak, M.V. Tokarchuk

Abstract. The approach for the description of kinetics with the account of large-scale hydrodynamical transport processes for the quantum Bose system is offered. The nonequilibrium statistical operator who consistently describes both the kinetic and nonlinear hydrodynamic fluctuations in quantum liquid is calculated. Using this operator the bound equations for quantum one-particle distribution function and for functional of hydrodynamic variables: densities of momentum, energies and number of particles, are obtained.

Подається в Фізика низьких температур
Submitted to Low Temperature Physics

1. Вступ

Дослідження динамічних властивостей квантових рідин, особливостей процесів переходу при пониженні температури із газоподібного стану в рідкий та в надплинний стани, надалі залишається актуальною проблемою сучасної фізики. Одним із завдань є побудова нерівноважної статистичної теорії, яка б послідовно враховувала одночастинкові та колективні фізичні процеси, що проходять в системі. При цьому важливою є проблема виходу за гідродинамічну область в область проміжних значень хвильового вектора та частоти, де кінетичні та гідродинамічні процеси взаємопов'язані і повинні розглядатись одночасно. Розділення вкладів у часові кореляційні функції, спектр збуджень, коефіцієнти переносу від кінетичних та гідродинамічних флуктуацій дозволяє отримати значно більше інформації про фізичні процеси з різними часовими та просторовими інтервалами, що формують динамічні властивості системи.

З іншого боку, при пониженні температури до фазового переходу важливу роль відіграють крупномаштабні флуктуації у системі, що пов'язані з повільними гідродинамічними процесами. Побудова кінетичних рівнянь з врахуванням повільних процесів є важливою проблемою в теорії переносу як в класичних так і в квантових рідинах. Зокрема, така проблема виникає при описі низькочастотних аномалій в кінетичних рівнняннях та пов'язаних з ними "довгих хвостів" кореляційних функцій [1–3], а також при узгодженому описі колективних ефектів у плазмі [4].

В роботах [5,6] отримано нерівноважний статистичний оператор багатобозонної системи в разі узгодженого опису кінетики та гідродинаміки з допомогою методу нерівноважного статистичного оператора Зубарєва [7,8]. За параметри скороченого опису нерівноважного стану вибрані квантова нерівноважна одночастинкова функція розподілу та середнє значення потенціальної енергії взаємодії, для яких отримана зв'язана система рівнянь переносу.

Для квантової бозе-системи запропоновано підхід для опису кінетики з врахуванням повільних гідродинамічних процесів переносу. В такому підході обчислено нерівноважний статистичний оператор, що узгоджено описує як кінетичні так і нелінійні гідродинамічні флуктуації в квантовій рідині. З допомогою цього оператора отримано зв'язаний набір рівнянь для квантової одночастинкової функції розподілу та функціоналу гідродинамічних змінних: густини числа частинок, густин імпульсу та енергії. При нехтуванні гідродинамічними флуктуаціями приходимо до традиційної схеми кінетичної теорії.

2. Нерівноважний статистичний оператор бозе–системи

При дослідженнях гідродинамічного нерівноважного стану нормальної бозе-рідини, що характеризується процесами переносу енергії, імпульсу та маси, параметрами скороченого опису є спостережувані величини: середні значення густин енергії $\langle\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}\rangle^t$, імпульсу$\langle\hat{P}_{\mathbf{q}}\rangle^t$, і числа частинок $\langle\hat{\varrho}_{\mathbf{q}}\rangle^t$. Оператори для цих фізичних величин представлені через оператор фазової густини числа частинок Клімонтовича $\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \hat{a}^+_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{q}}{2}}\hat{a}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}}$:

$$\hat{\varrho}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{p}}\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) \tag{1}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{p}}\mathbf{p}\,\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) \tag{2}$$

$$\hat{\varepsilon}^{kin}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{p}}\left(\frac{p^2}{2m}-\frac{q^2}{8m}\right)\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}), \tag{3}$$

$$\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{p}}\sum_{\mathbf{p}'}\sum_{\mathbf{k}}\nu(k)\hat{a}^+_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}-\mathbf{q}}{2}}\,\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\hat{a}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}-\mathbf{q}}{2}}, \tag{4}$$

де: $\hat{\varepsilon}^{kin}_{\mathbf{q}}$ та $\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}$ - Фур'є-компоненти операторів густини кінетичної та потенціальної енергій. Середнє значення оператора фазової густини числа частинок рівне нерівноважній одночастинковій функції розподілу $f_1(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t$, що задовільняє кінетичне рівняння для квантової бозе-системи.

Узгодження кінетики і гідродинаміки для розрідженого бозе-газу не викликає проблем (густина є малим параметром) і параметром скороченого опису може бути вибрана тільки квантова одночастинкова функція розподілу $f_1(\mathbf{q},\mathbf{p};t)$. При переході до квантових бозе-рідин вклад колективних кореляцій, що описуються середньою потенціальною енергією взаємодії, є більш важливий ніж одночастинкові кореляції, пов'зані із $f_1(\mathbf{q},\mathbf{p};t)$. Тому, для узгодженого опису кінетики і гідродинаміки бозе-рідини за параметри скороченого опису нерівноважного стану вибрані одночастинкова нерівноважна функція розподілу і середня потенціальня енергія взаємодії. Нерівноважний стан такої квантової системи повністю описується нерівноважним статистичним оператором $\hat{\varrho}(t)$, який задовільняє квантовому рівнянню Ліувілля. Для відбору розв'язків, які відповідають ідеям скороченого опису (залежать від часу тільки через середні значення набору спостережуваних величин та не залежить від початкового моменту часу) в праву частину рівняння включено нескінченно мале джерело:

$$\varrho(t) + i\hat{L}_N\hat{\varrho}(t) = -\varepsilon\left(\hat{\varrho}(t) - \hat{\varrho}_q(t)\right), \tag{5}$$

де $\varepsilon \to +0$ після граничного термодинамічного переходу. Джерело порушує симетрію рівняння Ліувілля відносно $t \to -t$ і відбирає запізнюючі розв'язки. Квазірівноважний статистичний оператор $\hat{\varrho}_q(t)$ визначається із умови екстремуму інформаційної ентропії системи при збереженні умови нормування $\mathrm{Sp}\,\hat{\varrho}_q(t) = 1$ і при фіксованих значеннях набору параметрів скороченого опису [7–9].

Із умови екстремуму інформаційної ентропії системи при фіксованих значеннях $\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t$ та $\langle\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}\rangle^t$ побудований квазірівноважний оператор $\hat{\varrho}_q(t)$:

$$\hat{\varrho}_q(t) = \exp\left\{-\Phi(t) - \sum_{\mathbf{q}}\beta_{-\mathbf{q}}(t)\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}} - \sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}}\gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\right\}. \tag{6}$$

Лагранжеві множники $\beta_{-\mathbf{q}}(t)$, $\gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)$ визначаються із відповідних умов самоузгоджень, а функціонал Мас'є-Планка

$$\Phi(t) = \ln\mathrm{Sp}\,\exp\left\{-\sum_{\mathbf{q}}\beta_{-\mathbf{q}}(t)\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}} - \sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}}\gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\right\} \tag{7}$$

знаходиться із умови нормування. При заданому квазірівноважному операторі $\hat{\varrho}_q(t)$, розв'зуючи рівняння Ліувілля з джерелом, отримано нерівноважний статистичний оператор [7–9]:

$$\hat{\varrho}(t) = \hat{\varrho}_q(t) + \sum_{\mathbf{q}}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}T_q(t,t')$$
$$\times\int\limits_0^1 d\tau\left(\hat{\varrho}_q(t)\right)^{\tau} I^{int}_{\varepsilon}(\mathbf{q},t')\left(\hat{\varrho}_q(t)\right)^{1-\tau}\beta_{-\mathbf{q}}(t')$$
$$+\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \mathrm{e}\left\{\varepsilon(t'-t)\right\}T_q(t,t')$$

$$\times\int\limits_0^1 d\tau\left(\hat{\varrho}_q(t)\right)^{\tau} I_n(\mathbf{p},\mathbf{q},t')\left(\hat{\varrho}_q(t)\right)^{1-\tau}\gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p},t'), \tag{8}$$

де узагальнені потоки

$$I^{int}_{\varepsilon}(\mathbf{q},t) = \Big(1 - P(t)\Big)i\hat{L}_N\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}, \tag{9}$$

$$I_n(\mathbf{p},\mathbf{q},t) = \Big(1 - P(t)\Big)i\hat{L}_N\hat{n}^{int}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}), \tag{10}$$

що містять узагальнений проєкційний оператор Морі, а $T_q(t,t')$ – узагальнений оператор еволюції. Нерівноважний статистичний оператор (8) побудований при узгодженому описі кінетики та гідродинаміки багатобозонної системи. За допомогою нього отримано незамкнуту систему рівнянь переносу для параметрів скороченого опису $\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t$ та $\langle\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}\rangle^t$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t = \langle\dot{\hat{n}}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t_q\sum_{\mathbf{q}'}\int\limits_{-\infty}^{t} dt'\,\mathrm{e}^{\epsilon(t'-t)}\varphi^{int}_{n\varepsilon}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{q}',t,t')\beta_{-\mathbf{q}}(t')$$
$$+\sum_{\mathbf{q}'}\sum_{\mathbf{p}'}\int\limits_{-\infty}^{t} dt'\,\mathrm{e}^{\epsilon(t'-t)}\,\varphi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{q}',\mathbf{q}',t,t')\gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p}',\mathbf{t}'),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}\rangle^t = \langle\dot{\hat{\varepsilon}}^{int}_{\mathbf{q}}\rangle^t_q + \sum_{\mathbf{q}'}\int\limits_{-\infty}^{t} dt'\,\mathrm{e}\epsilon(t'-t)\varphi^{int}_{\varepsilon\varepsilon}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t,t')\beta_{-\mathbf{q}}(t')$$
$$+\sum_{\mathbf{q}'}\sum_{\mathbf{p}'}\int\limits_{-\infty}^{t} dt'\,\mathrm{e}^{\epsilon(t'-t)}\,\varphi^{int}_{\varepsilon n}(\mathbf{q},\mathbf{q}',\mathbf{p}',t,t')\gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p}',t'). \tag{11}$$

У рівняннях (11) введені узагальнені ядра переносу, які описують дисипативні процеси в системі:

$$\varphi^{int}_{n\varepsilon}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{q}',t,t') = \mathrm{Sp}\Big[I_n(\mathbf{q},p,t)T_q(t,t')$$
$$\times\int\limits_0^1 d\tau\varrho^{\tau}_q(t')I^{int}_{\varepsilon}(\mathbf{q}',t')\varrho^{1-\tau}_q(t')\Big], \tag{12}$$

$$\varphi_{\varepsilon n}^{int}(\mathbf{q},\mathbf{q}',\mathbf{p},t,t') = \mathrm{Sp}\Big[I_{\varepsilon}^{int}(\mathbf{q},t')T_q(t,t') \times \int_0^1 d\tau \varrho_q^{\tau}(t')I_n(\mathbf{p},\mathbf{q}',t)\varrho_q^{1-\tau}(t')\Big], \qquad (13)$$

$$\varphi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{q}',\mathbf{p}',t,t') = \mathrm{Sp}\Big[I_n(\mathbf{q},\mathbf{p},t)T_q(t,t') \times \int_0^1 d\tau \varrho_q^{\tau}(t')I_n(\mathbf{p}',\mathbf{q}',t)\varrho_q^{1-\tau}(t')\Big], \qquad (14)$$

$$\varphi_{\varepsilon\varepsilon}^{int}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t,t') = \mathrm{Sp}\Big[I_{\varepsilon}^{int}(\mathbf{q},t')T_q(t,t') \times \int_0^1 d\tau \varrho_q^{\tau}(t')I_{\varepsilon}^{int}(\mathbf{q}',t')\varrho_q^{1-\tau}(t')\Big]. \qquad (15)$$

Система рівнянь (11) для одночастинкової функції розподілу і середньої густини потенціальної енергії є сильно нелінійною системою і може бути використана для опису як сильно так і слабо нерівноважних станів бозе-системи при узгодженому описі кінетики і гідродинаміки. Ці рівняння переносу для багатобозонної системи є новими. Проєктуючи їх на значення компонент вектора $\mathbf{\Psi}(\mathbf{p}) = \left(1,\ \mathbf{p},\ \frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{8m}\right)$, отримаємо рівняння нелінійної гідродинаміки, у яких процеси переносу кінетичної і потенціальної частин енергії описуються двома взаємозв'язаними рівняннями.

Очевидно, що такі рівняння гідродинаміки нелінійних процесів дають можливість більш детально описувати процеси взаємного перетворення кінетичної та потенціальної енергії частинок при розгляді нерівноважних процесів, що проходять у системі.

Запропонована вище схема отримання рівнянь переносу є незручною при розгляді кінетики та гідродинаміки в околі точки фазового переходу, де важливу роль відіграють крупномасштабні флуктуації. В цьому випадку для опису кінетичних процесів та нелінійних гідродинамічних флуктуацій доцільно переформулювати теорію таким чином, щоб отримати зв'язаний набір рівнянь для квантової одночастинкової функції розподілу і функціоналу гідродинамічних змінних, яким задається мікроскопічні розподіли густини числа частинок, густин імпульсу та енергії.

3. Кінетичне рівняння для нерівноважної функції Вігнера та рівняння Фокера–Планка для функції розподілу гідродинамічних змінних

Для опису одночастинкових кореляцій як і раніше вибрано квантову одночастинкову функцію розподілу $f_1(\mathbf{q},\mathbf{p};t) = \langle \hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t$, а для опису колективних процесів – функцію розподілу гідродинамічних змінних:

$$\hat{f}(a) = \delta(\hat{a} - a) = \prod_{m=1}^{3}\prod_{\mathbf{k}} \delta(\hat{a}_{m\mathbf{k}} - a_{m\mathbf{k}}), \qquad (16)$$

де $\hat{a}_{1\mathbf{k}} = \hat{n}_{\mathbf{k}}$, $\hat{a}_{2\mathbf{k}} = \hat{P}_{\mathbf{k}}$, $\hat{a}_{3\mathbf{k}} = \hat{\varepsilon}_{\mathbf{k}}$ є фур'є-образами операторів густини числа частинок, імпульсу та енергії:

$$\hat{n}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{p}} \hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) \qquad (17)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p}\, \hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) \qquad (18)$$

$$\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{8m}\right)\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{p}}\sum_{\mathbf{p}'}\sum_{\mathbf{k}} \nu(k)\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}-\mathbf{q}}{2}}\,\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\hat{a}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}-\mathbf{q}}{2}}. \qquad (19)$$

При цьому скалярні величини $a_{m\mathbf{k}} = \{n_{\mathbf{k}},\ \mathbf{P}_{\mathbf{k}},\ \varepsilon_{\mathbf{k}}\}$ є відповідними колективними змінними. Середні значення $\langle \tilde{n}_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})\rangle^t$, $\langle \delta(\hat{a} - a)\rangle^t$ отримуються з нерівноважним статистичним оператором $\hat{\varrho}(t)$, що задовільняє рівняння Ліувіля й у відповідності до ідеї скороченого опису нерівноважного стану повинен функціонально залежати від квантової одночастинкової функції розподілу та функції розподілу гідродинамічних змінних:

$$\hat{\varrho}(t) = \hat{\varrho}\left(\ldots f_1(\mathbf{q},\mathbf{p};t),\ f(a;t)\ \ldots\right). \qquad (20)$$

Таким чином, задача полягає в тому, щоб знайти частинний розв'язок рівняння Ліувіля для $\hat{\varrho}(t)$, що має форму (19). З цією метою будемо слідувати методу нерівноважного статистичного оператора Д.М.Зубарєва [7–9] і розглянемо рівняння Ліувіля (5) з нескінченно малим джерелом. Джерело правильно відбирає загайні розв'язки у відповідності до скороченого опису нерівноважного стану системи. Квазірівноважний статистичний оператор $\hat{\varrho}_q(t)$ визначається стандартним чином з умови максимуму функціоналу інформаційної ентропії при одночасному збереженні умови нормування

$$\mathrm{Sp}\,\hat{\varrho}_q(t) \;=\; 1.$$

Тоді квазірівноважний статистичний оператор може бути записаний як

$$\hat{\varrho}_q(t) = \exp\left\{-\Phi(t) - \sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}} \gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) - \int da\, F(a;t)\,\hat{f}(a)\right\}. \tag{21}$$

де

$$da \;\to\; \{dn_{\mathbf{k}},\;\; d\mathbf{P}_{\mathbf{k}},\;\; d\varepsilon_{\mathbf{k}}\}.$$

Функціонал Масьє-Планка $\Phi(t)$ визначається з умови нормування квазірівноважного статистичного оператора:

$$\Phi(t) = \ln\,\mathrm{Sp}\,\left[\exp\left\{-\sum_{\mathbf{q}\mathbf{p}} \gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) - \int da\, F(a;t)\,\hat{f}(a)\right\}\right].$$

Функції $\gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)$ та $F(a,t)$ відіграють роль множників Лагранжа і можуть бути визначені з умов самоузгодження:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{q},\mathbf{p};t) &= \langle \hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t = \langle \hat{n}_{\mathbf{q}}\mathbf{p})\rangle_q^t, \\ f(a;t) &= \langle \delta(\hat{a}-a)\rangle^t = \langle \delta(\hat{a}-a)\rangle_q^t. \end{aligned} \tag{22}$$

Зручно переписати квазірівноважну функцію розподілу (4.21) у вигляді:

$$\hat{\varrho}_q(t) = \exp\left\{-\Phi(t) - \sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}} \gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\right\} \int da \mathrm{e}^{-F(a;t)\hat{f}(a)}. \tag{23}$$

Використовуючи далі умови самоузгодження (22) знайдемо функцію $F(a;t)$

$$\mathrm{e}^{-F(a:t)} = \frac{f(a;t)}{W(a;t)},$$

де

$$W(a;t) = \mathrm{Sp}\,\left[\exp\left\{-\Phi(t) - \sum_{\mathbf{q}\,\mathbf{p}} \gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\right\}\hat{f}(a)\right],$$

є структурною функцією гідродинамічних флуктуацій, що може розглядатись як якобіан переходу в простір колективних змінних $n_{\mathbf{k}}, \mathbf{P}_{\mathbf{k}}, \varepsilon_{\mathbf{k}}$, усереднених з "кінетичним" квазірівноважним оператором

$$\varrho_q^{kin}(t) = \exp\left\{-\Phi(t) - \sum_{\mathbf{q}\,\mathbf{p}} \gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\right\}. \tag{24}$$

Враховуючи далі (24), початковий квазірівноважний оператор (23) можна представити у вигляді:

$$\varrho_q(t) = \varrho_q^{kin}(t)\;\left.\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right|_{a=\hat{a}}. \tag{25}$$

Наведеному вище квазірівноважному оператору відповідає ентропія

$$S(t) = -\langle \ln\hat{\varrho}_q\rangle_q^t = \Phi(t) + \sum_{\mathbf{q}\mathbf{p}} \gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)\langle \hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t + \int da f(a;t)\ln\frac{f(a;t)}{W(a;t)}. \tag{26}$$

У поєднанні з умовами самоузгодження (22) вона може розглядатись як ентропія нерівноважного стану. Маючи квазірівноважний розподіл (25), перепишемо рівняння Ліувіля (5) для функції $\Delta\hat{\varrho}(t) = \hat{\varrho}(t) - \hat{\varrho}_q(t)$, яка обертається в нуль при $t \to -\infty$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL_N + \varepsilon\right)\Delta\hat{\varrho}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + iL_N\right)\hat{\varrho}_q(t). \tag{27}$$

Часова похідна у правій частині цього рівняння може бути виражена через проекційний оператор Кавасакі-Гантона $P_q(t)$ [7, 9]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varrho}_q(t) = -P_q(t)iL_N\hat{\varrho}(t). \tag{28}$$

У нашому випадку проекційний оператор $P_q(t)$ діє на будь-який статистичний оператор $\hat{\varrho}'$ за правилом

$$P_q(t)\hat{\varrho}' = \hat{\varrho}_q(t)\mathrm{Sp}\hat{\varrho}' + \sum_{\mathbf{q}\,\mathbf{p}} \frac{\partial\hat{\varrho}_q(t)}{\partial\langle \hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t}\left[\mathrm{Sp}\,(\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\hat{\varrho}') - \langle \hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t\mathrm{Sp}\hat{\varrho}'\right]$$

$$+\int da \frac{\partial\hat{\varrho}_q(t)}{\partial(f/W)}\frac{1}{W(a;t)}\left[\mathrm{Sp}\left(\hat{f}(a)\hat{\varrho}'\right) - f(a;t)\mathrm{Sp}\hat{\varrho}'\right] \tag{29}$$
$$+\int da \sum_{\mathbf{q}\,\mathbf{p}} \frac{\partial\hat{\varrho}_q(t)}{\partial(f/W)}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\frac{\partial \ln W(a;t)}{\partial\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t}\left[\mathrm{Sp}\left(\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\hat{\varrho}'\right) - \langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t \mathrm{Sp}\hat{\varrho}'\right].$$

Враховуючи співвідношення (29), перепишемо рівняння (27) у формі

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (1-P_q(q))\, iL_N + \varepsilon\right)\Delta\hat{\varrho}(t) = -\,(1-P_q(q))\, iL_N\hat{\varrho}_q(t). \tag{30}$$

Його формальний розв'язок можна записати у вигляді

$$\Delta\hat{\varrho(t)} = \int\limits_{-\infty}^{t} dt'\, \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)} T_q(t;t')\,(1-P_q(t))\, iL_N\hat{\varrho}_q(t), \tag{31}$$

де

$$T_q(t;t') = \exp_+\left\{-\int\limits_{t'}^{t} dt'\,(1-P_q(t'))\, iL_N\right\}$$

є узагальненим оператором часової еволюції з врахуванням проектування. З (31) знайдемо нерівноважний статистичний оператор

$$\hat{\varrho}(t) = \hat{\varrho}_q(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} dt'\, \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)} T_q(t;t')\,(1-P_q(t))\, iL_N\hat{\varrho}_q(t). \tag{32}$$

Розглянемо дію оператора Ліувіля iL_N на квазірівноважний оператор системи (25). Матимемо

$$iL_N\hat{\varrho}_q(t) = -\sum_{\mathbf{q}\,\mathbf{p}} \gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)\dot{\hat{n}}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\hat{\varrho}_q(t) + \left[iL_N\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\bigg|_{a=\hat{a}}\right]\hat{\varrho}_q^{kin}(t), \tag{33}$$

де $\dot{\hat{n}}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = iL_N\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$ (також $\dot{\hat{\mathbf{P}}}_{\mathbf{k}} = iL_N\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}}$, $\dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{k}} = iL_N\hat{\varepsilon}_{\mathbf{k}}$). Використовуючи після цього співвідношення

$$iL_N\hat{f}(a) = iL_N\hat{f}(n_{\mathbf{k}}\mathbf{P}_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{k}}) =$$
$$-\sum_{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}}\hat{f}(a)\dot{\hat{n}}_{\mathbf{k}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}}}\hat{f}(a)\dot{\hat{\mathbf{P}}}_{\mathbf{k}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}\hat{f}(a)\dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{k}}\right), \tag{34}$$

останній вираз в (33) може бути представлений у такому вигляді:

$$\left[iL_N\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\bigg|_{a=\hat{a}}\right]\hat{\varrho}_q^{kin}(t) = \int da \sum_{\mathbf{k}}\left\{\dot{\hat{n}}_{\mathbf{k}}W(a;t)\left[\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right]\right.$$
$$\left.+\dot{\hat{\mathbf{P}}}_{\mathbf{k}}W(a;t)\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right] + \dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{k}}W(a;t)\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right]\right\}\hat{\varrho}_L(a;t). \tag{35}$$

Тут введено новий квазірівноважний статистичний оператор $\hat{\varrho}_L(a;t)$ з мікроскопічним розподілом крупномасштабних колективних змінних:

$$\varrho_L(a;t) = \varrho_q^{kin}(t)\frac{\hat{f}(a)}{W(a;t)}. \tag{36}$$

Цей квазірівноважний оператор пов'язаний з попереднім оператором $\hat{\varrho}_q(t)$ (23) співвідношенням

$$\hat{\varrho}_q(t) = \int da f(a;t)\hat{\varrho}_L(a,t). \tag{37}$$

і є, очевидно, нормованим:

$$\mathrm{Sp}\,\hat{\varrho}_q(a,t) = 1.$$

Використовуючи співвідношення (37), зручно представити середні значення фізичних величин з квазірівноважним оператором у формі

$$\langle\ldots\rangle_q^t = \int da\langle\ldots\rangle_L^t f(a;t) \qquad \langle\ldots\rangle_L^t = \mathrm{Sp}\{\ldots\hat{\varrho}_L(a,t)\}.$$

Тепер у відповідності до (35) та (37) дію оператора Ліувіля на $\hat{\varrho}_q(t)$ можна представити як

$$iL_N\hat{\varrho}_q(t) = -\int da \sum_{\mathbf{q}\,\mathbf{p}} \gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p})\dot{\hat{n}}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})f(a;t)$$

$$+\int da\sum_{\mathbf{k}}\left\{\dot{\hat{n}}_{\mathbf{k}}W(a;t)\left[\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right]+\dot{\hat{\mathbf{P}}}_{\mathbf{k}}W(a;t)\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right]\right.$$
$$\left.+\dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{k}}W(a;t)\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right]\right\}\hat{\varrho}_L(a;t). \quad (38)$$

Підставляючи цей вираз в (32) для нерівноважного статистичного оператора остаточно отримано такий результат:

$$\hat{\varrho}(t)=\int da f(a;t)\hat{\varrho}_L(a,t)+\int da\sum_{\mathbf{q}\,\mathbf{p}}\int_{-\infty}^{t} da e^{\varepsilon(t'-t)}T_q(t,t')$$
$$\times\left(1-P_q(t')\right)\dot{\hat{n}}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\hat{\varrho}_L(a;t')f(a;t)\gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p})$$
$$+\int da\sum_{\mathbf{k}}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{\varepsilon(t'-t)}T_q(t,t')\left(1-P_q(t')\right)$$
$$\times\left\{\dot{\hat{n}}_{\mathbf{k}}W(a;t')\left[\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}\right]+\dot{\hat{\mathbf{P}}}_{\mathbf{k}}W(a;t')\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}\right]\right.$$
$$\left.+\dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{k}}W(a;t')\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}\right]\right\}\hat{\varrho}_L(a;t'). \quad (39)$$

Ця формула дає нерівноважний статистичний оператор, що описує узгоджено як кінетичні, так і нелінійні гідродинамічні флуктуації квантових рідин. При нехтуванні гідродинамічними флуктуаціями можна повернутись до традиційної схеми прийнятої в кінетичній теорії. Відповідний квазірівноважний розподіл $\hat{\varrho}_q^(t)$ отримується з (37) якщо здійснити підстановку $f(a;t)\sim\delta(a-\bar{a})$, де $\bar{a}=\{a_{\mathbf{k}}\}$ є набором середніх значень гідродинамічних величин.

Результат (39) може бути застосований для отримання набору рівнянь для квантової одночастинкової функції розподілу $f_1(\mathbf{q},\mathbf{p};t)$ та функції розподілу гідродинамічних змінних $f(a;t)$. Розпочнемо це з очевидних рівностей

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(\mathbf{q},\mathbf{p};t)=\langle\dot{\hat{n}}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t=\langle\dot{\hat{n}}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t_q+\langle I_n(\mathbf{q},\mathbf{p})\rangle^t,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}f(a;t)=\mathrm{Sp}\left\{\hat{\varrho}_L(a,t)iL_N\hat{f}(a)\right\}, \quad (40)$$

де $I_n(\mathbf{q},\mathbf{p};t)$ є узагальненим потоком густини. Тоді підстановка явного виразу (39) в ці співвідношення після простих, проте дещо три-

валих перетворень, приведе до кінцевого результу для кінетичних рівнянь:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\frac{\mathbf{q}\mathbf{p}}{m}\right)f_1(\mathbf{q},\mathbf{p};t)-\sum_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'}iL_2(\mathbf{q},\mathbf{q}',\mathbf{p},\mathbf{p}')f_2(\mathbf{q},\mathbf{q}',\mathbf{p},\mathbf{p}';t)$$
$$=\sum_{\mathbf{q}'\,\mathbf{p}'}\int da\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\varepsilon(t'-t)}\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{q}',\mathbf{p},\mathbf{p}';t,t')f(a;t')\gamma_{\mathbf{q}'}(\mathbf{p}';t)$$
$$-\sum_{\mathbf{q}'\,\mathbf{p}'}\sum_{\mathbf{k}}\int da\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\varepsilon(t'-t)}\left\{\Phi_{n\mathbf{P}}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{k};t,t')W(a;t')\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}_{\mathbf{k}}}\right.$$
$$\left.+\Phi_{n\varepsilon}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{k};t,t')W(a;t')\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}\right\}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f(a;t)+\sum_{\mathbf{k}}\left\{\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}}v_n(a;t)f(a;t)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}_{\mathbf{k}}}v_{\mathbf{P}}(a;t)f(a;t)+\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}v_{\varepsilon}(a;t)f(a;t)\right\}$$
$$=\sum_{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}_{\mathbf{k}}}\sum_{\mathbf{q}'\,\mathbf{p}'}\int da'\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\varepsilon(t'-t)}$$
$$\times\Phi_{\mathbf{P}n}(\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{p}';t,t')f(a';t')\gamma_{\mathbf{q}'}(\mathbf{p}';t')$$
$$-\sum_{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}\sum_{\mathbf{q}'\,\mathbf{p}'}\int da'\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\varepsilon(t'-t)}\Phi_{\varepsilon n}(\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{p}';t,t')f(a';t')\gamma_{\mathbf{q}'}(\mathbf{p}';t')$$
$$+\sum_{\mathbf{k}\,\mathbf{q}}\int da'\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\varepsilon(t'-t)}\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}_{\mathbf{k}}}\Phi_{\mathbf{P}\mathbf{P}}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}_{\mathbf{q}}}\left[\frac{f(a';t')}{W(a';t')}\right]$$
$$+\sum_{\mathbf{k}\,\mathbf{q}}\int da'\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\varepsilon(t'-t)}\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}_{\mathbf{k}}}\Phi_{\varepsilon\varepsilon}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{q}}}\left[\frac{f(a';t')}{W(a';t')}\right]$$
$$+\sum_{\mathbf{k}\,\mathbf{q}}\int da'\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\varepsilon(t'-t)}\left\{\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}_{\mathbf{k}}}\Phi_{\mathbf{P}\varepsilon}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{q}}}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}\Phi_{\varepsilon\mathbf{P}}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}_{\mathbf{q}}}\right\}\left[\frac{f(a';t')}{W(a';t')}\right]. \quad (42)$$

В приведених вище виразах введено двочастинкову функцію розподілу $f_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{p}, \mathbf{p}'; t)$ в квазірівноважному стані.

Підведемо підсумки. Набір рівнянь (41) та (42) дає узгоджений опис кінетичних та гідродинамічних процесів як квантових так і класичних рідин при наявності довготривалих флуктуацій. Ядра переносу Φ_{nn} описують дисипацію кінетичних флуктуацій, тоді як ядра $\Phi_{n\mathbf{P}}$, Φ_{Pn}, $\Phi_{n\varepsilon}$ та $\Phi_{\varepsilon n}$ описують дисипацію кореляцій між кінетичною та гідродинамічною ступенями вільності. Ядра переносу $\Phi_{\mathbf{PP}}$, $\Phi_{\mathbf{P}\varepsilon}$, $\Phi_{\varepsilon\mathbf{P}}$, та $\Phi_{\varepsilon\varepsilon}$ відповідають за дисипативні процеси, що пов'язані з кореляціями між в'язкими та тепловими гідродинамічними модами. Зв'язаний набір рівнянь кінетики та гідродинаміки забезпечує основу для обчислення вкладу крупномасштабних флуктуацій в кінетичних процесах в околі точки фазового переходу, а також низькочастотних аномалій в нейтральних класичних рідинах та деяких інших системах.

Література

1. Résibois P, M.de Leener, Classical kinetic theory of fluids. New York, John Willey and Sons, 1977.
2. Kawasaki K. In: Phase transition and critical phenomena, 1976, vol. 5A, p.165-411.
3. Zubarev D.N., Morozov V.G. Statistical mechanizm of nonlinear hydrodynamic fluctuations. Physica A, 1983, vol. 120, No 3, p. 411-467.
4. Klimontovich Yu.L. The unified description of kinetic and hydrodynamic processes in gases and plasmas. // Phys. Lett. A, 1992, vol. 170, p. 434.
5. Вакарчук І.О., Глушак П.А., Токарчук М.В. Узгоджений опис кінетики та гідродинаміки квантових бозе-систем. І. Рівняння переносу. УФЖ.- 1997.- 42, №9.-С.1150-1158.
6. P.A. Hlushak, M.V. Tokarchuk. A consistent description of kinetics and hidrodynamics of quantum Bose-systems. Cond. Matt. Phys., 2004, vol.7,No.3(39), p.639-660.
7. Зубарев Д.Н. Современные методы статистической теории неравновесных процессов. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М., ВИНИТИ, 1980, том 15, с. 131-220.
8. Зубарев Д.Н., Морозов В.Г. Неравновесные статистические ансамбли в кинетической теории и гидродинамике. В кн. Научные

труды Математического института им. В.А.Стеклова. М., Наука, 1989, том 191, с. 140-151.
9. Zubarev D.N., Morozov V.G., Ropke G. Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes, vol.1. – Berlin, Akademie Verlag, 1997.

Петро Андрійович Глушак
Михайло Васильович Токарчук

Кінетичні рівняння для бозе-системи з врахуванням крупномасштабних гідродинамічних процесів

Роботу отримано 29 грудня 2005 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії нерівноважних процесів

Виготовлено при ІФКС НАН України