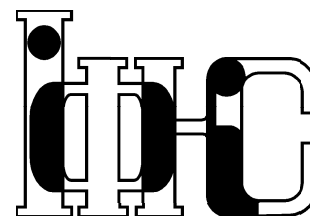


Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Національна академія наук України



ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

Олександр Євгенович Кап'юкранян

ТОПОЛОГІЧНІ ТА СТРУКТУРНІ ДЕФЕКТИ У ДВОВИМІРНІЙ ХУ
МОДЕЛІ

Роботу отримано 25 червня 2008 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу СТeКС

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

ICMP-08-11U

О.Є.Кап'юкранян

ТОПОЛОГІЧНІ ТА СТРУКТУРНІ ДЕФЕКТИ У
ДВОВИМІРНІЙ ХУ МОДЕЛІ

ЛЬВІВ

УДК: 537.9

PACS: 05.50.+q, 64.60.Fr, 75.10.Nk

Топологічні та структурні дефекти у двовимірній XY моделі

О.Є.Капікранян

Анотація. Подано огляд основних підходів до вивчення властивостей $2D$ XY моделі, пов'язаних із присутністю топологічних дефектів. Добре відомі результати для нерозведеної моделі представлено у поєднанні з оригінальними результатами для моделі із замороженими структурними дефектами (вакансіями), отриманими автором у співпраці з колегами. А саме, огляд покриває такі ділянки як: спін-хвильове наближення для $2D$ XY моделі, основи феноменологічної теорії топологічних дефектів, модель Вілена. Як підсумок, отримано приблизну оцінку критичної температури як функції концентрації немагнітних домішок і наведено фазову діаграму.

Topological and structural defects in the two-dimensional XY model

О.Капикранян

Abstract. An overview of the main approaches to study the $2D$ XY model properties, especially the vortex influence, is presented. The well known results for the pure model are combined with the original results for a model with frozen site-dilution obtained by the author with collaborators. Namely, the overview covers in a brief form the following topics: the spin-wave approximation for the $2D$ XY model, the basic principles of the phenomenological theory of topological defects, the Villain model. In the conclusion a simple estimation of the critical temperature is done to obtain the diluted model phase diagram.

Подається в Фізичний збірник НТШ
Submitted to Physical collection of NTSH

© Інститут фізики конденсованих систем 2008
Institute for Condensed Matter Physics 2008

1. Вступ

1.1. Топологічні дефекти

Фізичні системи із неперервною симетрією, такі як кристали, рідкі кристали, надплинний гелій, магнетики і ін., дозволяють існування своєрідних збурень основного стану, які не описуються неперервним повільно змінним у просторі полем. Ці об'єкти характеризуються певною сингулярною областю поля (у різних системах це може бути точка, лінія, поверхня). Їх вплив виявляється надзвичайно важливим у реальних фізичних матеріалах, так, наприклад, вони у великій мірі відповідають за механічні властивості сталей.

Якщо вести мову про певні двовимірні системи, то взаємодія топологічних дефектів є основним механізмом фазового переходу (перехід Березінського-Костерліца-Таулеса) у таких системах. Ми зосередимось саме на цьому явищі і пов'язаними із ним деталями поведінки таких матеріалів, включаючи у дослідження ще один важливий фактор – структурні дефекти (заморожені немагнітні вузли), неминуче присутні у реально доступних для експериментальних досліджень зразках.

Для теоретичного дослідження описаних вище проблем ми обрали $2D$ XY модель, яка є достатньо простою, і у той самий час, добре описує характерні риси ряду важливих фізичних систем, наприклад, надплинного гелію чи квазідвовимірних магнітних матеріалів, таких як шаруваті магнетики [1] чи надтонкі магнітні плівки [2–4].

Топологічні дефекти у $2D$ XY моделі називають вихорами.

1.2. $2D$ XY модель

Двовимірна ($2D$) XY модель означається як система класичних спінів \mathbf{S}_r одиничної довжини ($|\mathbf{S}_r| = 1$) розміщених на вузлах двовимірної ґратки (найчастіше розглядається квадратна ґратка, хоч результати, як правило, легко узагальнити для довільної простої ґратки) із гамільтоніаном

$$H_{XY} = -J \sum_{\langle r, r' \rangle} (S_r^x S_{r'}^x + S_r^y S_{r'}^y), \quad (1.1)$$

де сума перебирає всі пари найближчих сусідніх вузлів у випадку взаємодії найближчих сусідів, яка є стандартним наближенням для опису взаємодії короткосяжного характеру. Означена таким чином модель володіє визначними властивостями, пов'язаними із вирішальним впливом топологічних дефектів на її поведінку [5, 6]. У моделі

відбувається фазовий перехід, який не характеризується появою параметра порядку (намагніченість в термодинамічній границі завжди рівна нулеві, згідно теореми Мерміна-Вагнера-Гогенберга [7, 8]). Це явище отримало назву переходу Березінського-Костерліца-Таулеса (БКТ перехід), а фазу нижче критичної температури, T_{BKT} , що характеризується степеневим загасанням парної кореляційної функції спінів:

$$G_2(r) \equiv \langle \mathbf{S}_0 \mathbf{S}_r \rangle \sim r^{-\eta(T)}, \quad (1.2)$$

називають фазою квазі-далекосяжного впорядкування (QLRO – quasi-long-range ordering). Форма кореляційної функції нагадує відому поведінку кореляцій у точці Кюрі звичайних ферромагнетиків: $G_2(r) \sim r^{-(2-d+\eta)}$, де d вимірність ґратки. Формально, уся QLRO фаза являє собою неперервну послідовність фазових переходів 2-го роду, проте ферромагнітний стан не досягається поки $T \neq 0$. Це наслідок специфічної комбінації вимірності простору ($d = 2$) і спінів ($n = 2$), для якої спін-хвильові збудження руйнують ферромагнітний порядок при довільно низьких температурах, але степеневе загасання кватдалекосяжні кореляції зберігаються і описуються температурно залежним показником $\eta(T)$ кореляційної функції. Магнітна сприйнятливості розбігається на всьому проміжку $0 < T \leq T_{\text{BKT}}$.

Особливість переходу Березінського-Костерліца-Таулеса пояснюється його топологічною природою, його механізмом є дисоціація зв'язаних пар топологічних дефектів (вихор-антивихор), присутніх в низькотемпературній фазі. Спін-хвильове наближення, в якому модель має аналітичний розв'язок, правильно якісно описує поведінку в QLRO фазі (а в границі низьких температур і кількісно), коли пари знаходяться у зв'язаному стані і не мають вирішального впливу на властивості системи. З іншого боку, для опису БКТ переходу була запропонована феноменологічна теорія топологічних дефектів [5], які неможливо описати в рамках спін-хвильового наближення. З цієї теорії випливає логарифмічна взаємодія вихорів, яка уподібнює їх до кулонівських зарядів у двовимірному просторі. Базуючись на цьому БКТ перехід можна описати як перехід ізолятор-електроліт в двовимірному нейтральному кулонівському газі [9, 10].

Отже, маємо два різні підходи, спін-хвильове наближення, яке описує низькотемпературну фазу, але не пояснює БКТ перехід, і феноменологічну теорію топологічних дефектів, що базується на наближенні неперервного еластичного середовища і описує БКТ перехід, але не описує квазі-далекосяжні кореляції низькотемпературної фази. Своєрідним містком між цими двома, не дуже пов'язаними між собою, шляхами, виступає модель Вілена [11], яку можна ро-

глядати як низькотемпературне наближення до $2D$ XY моделі, на рівні із спін-хвильовим наближенням. Хоча модель Вілена і не має аналітичного розв'язку, її надзвичайна важливість у тому, що в гамільтоніані можливо явно виділити спін-хвильову і вихрову частини, і вираз для енергії вихорів має форму, ідентичну тій, яку знаходять з феноменологічної теорії топологічних дефектів.

У цьому огляді автор намагається стисло і доступно висвітлити усі три підходи (спін-хвильове наближення, феноменологічну теорію топологічних дефектів і модель Вілена) із наголосом на впливі заморожених немагнітних домішок (структурних дефектів) у кожному випадку, що є власне предметом його досліджень [12–15].

1.3. Заморожені немагнітні домішки

Модель із замороженими немагнітними розведеннями можна отримати вилучаючи випадковим чином спіни із вузлів ґратки із певною заданою імовірністю, однаковою для кожного вузла. Таким чином, зручно ввести числа заповнення

$$c_{\mathbf{r}} = \begin{cases} 1, & \text{якщо на вузлі є спін;} \\ 0, & \text{якщо вузол порожній} \end{cases} \quad (1.3)$$

і з їх допомогою переписати гамільтоніан (1.1) у випадку розведення:

$$H = -J \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\alpha=x,y} \cos(\theta_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_{\alpha}} - \theta_{\mathbf{r}}) c_{\mathbf{r}} c_{\mathbf{r}'} , \quad (1.4)$$

де ми перейшли до зручнішого опису двовимірних спінів кутовою змінною $\theta_{\mathbf{r}}$, що є кутом між спіном на заданому вузлі і довільно вибраним напрямком відрахунку; $\mathbf{a}_x = (a, 0)$ і $\mathbf{a}_y = (0, a)$ у (1.4) – базис елементарної комірки.

Якщо імовірність для вузла бути зайнятим спіном дорівнює c , а бути порожнім – відповідно $1 - c$, то на ґратці розміру $N = L \times L$ отримаємо в середньому кількість немагнітних вузлів: $(1 - c)N$, або концентрацію розведення $1 - c$. Має сенс розгляд лише усереднених за розведенням заданої концентрації спостережуваних фізичних величин (таких, наприклад, як вільна енергія чи парна кореляційна функція спінів). Таке усереднення за конфігураціями домішок можна записати як:

$$\overline{(\dots)} = \sum_{\{c_{\mathbf{r}}=0,1\}} P(\{c_{\mathbf{r}}\})(\dots) , \quad (1.5)$$

із функцією розподілу:

$$P(\{c_{\mathbf{r}}\}) = \prod_{\mathbf{r}} [c c_{\mathbf{r}} + (1-c)(1-c_{\mathbf{r}})] . \quad (1.6)$$

Цей підхід до опису нерівноважного розведення був запропонований Браутом [16] і невдовзі строго доведений Мазо [17].

Заморожені немагнітні домішки заслуговують на пильну увагу з огляду на те, що будь-які реальні матеріали, що досліджуються у фізичній лабораторії, неминуче містять структурні дефекти подібного характеру, тому бажано добре розуміти характер їх впливу на властивості ідеальних модельних систем.

2. Спін-хвильове наближення

Суть спін-хвильового (або гармонічного) наближення полягає в заміні косинуса в гамільтоніані (1.1) $2d$ XU моделі квадратичним виразом:

$$H^{\text{SW}} = H^0 + \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\alpha=x,y} (\theta_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_{\alpha}} - \theta_{\mathbf{r}})^2 . \quad (2.1)$$

Гамільтоніан (2.1) діагоналізується у фур'є-змінних:

$$H^{\text{SW}} = H^0 + \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{k}} (2 - \cos k_x a - \cos k_y a) |\theta_{\mathbf{k}}|^2 . \quad (2.2)$$

Таке наближення відповідає низьким температурам, коли різниця кутів між найближчими сусідніми спінами є малою величиною. Зрозуміло, що (2.1) не зберігає періодичність (1.1) відносно повороту $\theta_{\mathbf{r}}$ на кут кратний 2π , і тому (як стане очевидним з наступного розділу) не може описувати систему із топологічними дефектами. Проте наближення (2.1) дозволяє легко отримати аналітичний розв'язок, який правильно описує властивості XU моделі (1.1) при достатньо низьких температурах, причому не лише при $d = 2$, але й на ґратках іншої вимірності. Для порівняння парна кореляційна функція спінів у цьому наближенні має такий вигляд [18]:

$$G_2(R) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} \text{const} , & d > 2 \\ R^{-\eta(T)} , & d = 2 \\ e^{-\alpha(T)R} , & d = 1 \end{cases}$$

Як і можна було очікувати, спін-хвильове наближення правильно описує характер низькотемпературних кореляцій. Очевидною є особливість випадку $d = 2$, коли кореляції загасають, але значно повільніше ніж у неупорядкованій високотемпературній фазі. Отже,

спін-хвильове наближення правильно відтворює поведінку $2D$ XU моделі у фазі квазі-далекосяжного впорядкування. Показник η має наступну температурну залежність [19]:

$$\eta(T) = k_B T / (2\pi J) . \quad (2.3)$$

При низьких температурах цей вираз добре збігається з даними Монте Карло симуляцій, але ближче до точки переходу реально спостережуваний показник зростає із температурою швидше ніж за лінійним законом.

Так виглядає картина у випадку ідеально регулярної ґратки, введення домішок істотно ускладнює ситуацію. Гамільтоніан

$$H_{\text{dil}}^{\text{SW}} = c^2 H^0 + \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\alpha=x,y} (\theta_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_{\alpha}} - \theta_{\mathbf{r}})^2 c_{\mathbf{r}} c_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_{\alpha}} \quad (2.4)$$

у загальному випадку не діагоналізується у фур'є змінних:

$$\begin{aligned} H_{\text{dil}}^{\text{SW}} &= H^{\text{SW}} + (c^2 - 1)H_0 \\ &+ \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \rho(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \left(\sum_{\alpha=x,y} L_{\alpha}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') K_{\alpha}(\mathbf{k}) K_{\alpha}(\mathbf{k}') \right) \theta_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}'} \\ &- J \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} \left[\rho(-\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{q}) \rho(\mathbf{q}) - \rho(-\mathbf{k} - \mathbf{q}) \rho(-\mathbf{k}' + \mathbf{q}) \right] \\ &\times \left(2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=x,y} K_{\alpha}^2(\mathbf{q}) \right) \theta_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}'} , \end{aligned} \quad (2.5)$$

де H^{SW} результат (2.2) для нерозведеної моделі, $K_{\alpha}(\mathbf{k}) \equiv 2 \sin \frac{k_{\alpha} a}{2}$, $L_{\alpha}(\mathbf{k}) \equiv 2 \cos \frac{k_{\alpha} a}{2}$, а

$$\rho(\mathbf{q}) \equiv \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} (1 - c_{\mathbf{r}}) , \quad \mathbf{q} \in 1\text{ша зона Брілюена} . \quad (2.6)$$

Набір параметрів $\rho(\mathbf{q})$ характеризує розведення у фур'є просторі. Якщо домішок немає ($c_{\mathbf{r}} = 1$, $\mathbf{r} = \overline{1, N}$, $c = 1$), то $\rho(\mathbf{q}) = 0$ і в (2.5) залишається лише H^{SW} , енергія чистої моделі. У іншому тривіальному випадку, коли система «порожня», не має магнітних вузлів, $\rho(\mathbf{q}) = \delta(\mathbf{q})$ і $H_{\text{dil}}^{\text{SW}} = 0$.

Уявімо, що домішки розкидані не випадково, а утворюють деяку регулярну структуру. Тоді, очевидно, $\rho(\mathbf{q}) = (1 - c)\delta(\mathbf{q})$, де c –

концентрація магнітних вузлів. Іншими словами, у цьому випадку $\rho_{\mathbf{q}}$ співпадає зі своїм усередненим за розведенням значенням (див.(1.5)):

$$\overline{\rho(\mathbf{q})} = (1 - c)\delta(\mathbf{q}) . \quad (2.7)$$

Основною ідеєю роботи [12] було припущення про те, що в термодинамічній границі фізичні величини, усереднені за всіма можливими конфігураціями розведення, будуть близькими до таких, розрахованих для системи із $\rho(\mathbf{q}) = \overline{\rho(\mathbf{q})}$. (У розділі 4 буде показано, що це наближення відповідає наближенню однорідно «розмазаного» розведення.) У [12] було запропоновано розклад за відхиленням $\rho(\mathbf{q})$ від свого середнього значення,

$$\Delta\rho(\mathbf{q}) = \rho(\mathbf{q}) - \overline{\rho(\mathbf{q})} , \quad (2.8)$$

і розраховано парну кореляційну функцію спінів, враховуючи доданки у розкладі до третього порядку включно. Було отримано степеневу залежність кореляційної функції із показником

$$\eta^{\text{dil}}(T) = \eta^{\text{pure}}(T) \left(\frac{1}{c^2} + 0.73\frac{1-c}{c^3} - 2.27\frac{(1-3c+2c^2)}{c^4} \right) , \quad (2.9)$$

де вся температурна залежність міститься у показнику η^{pure} нерозведеної моделі, (2.3). Перший доданок в дужках відповідає нульовому порядку розкладу за $\Delta\rho$ (а також першому порядку, внесок від якого дорівнює нулеві), другий – другому і третій – третьому порядку розкладу.

Автори роботи [12] також виконали Монте Карло симуляції для $2D$ XY моделі на основі кластерного алгоритму Вольфа [20] в широкому інтервалі концентрацій розведення і для декількох значень температури. Рис.1, запозичений з роботи [12], представляє порівняння результатів комп'ютерних симуляцій із аналітичним результатом (2.9). Дані добре узгоджуються в області низьких концентрацій розведення.

3. Вихори у $2D$ XY моделі

Феноменологічна теорія топологічних дефектів базується на понятті неперервного пружного середовища, енергія якого задається виразом

$$E = \frac{1}{2}J \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\alpha=x,y} (\Delta_{\alpha}\theta_{\mathbf{r}})^2 \simeq \frac{1}{2}J \int d\mathbf{r} (\nabla\theta(\mathbf{r}))^2 . \quad (3.1)$$

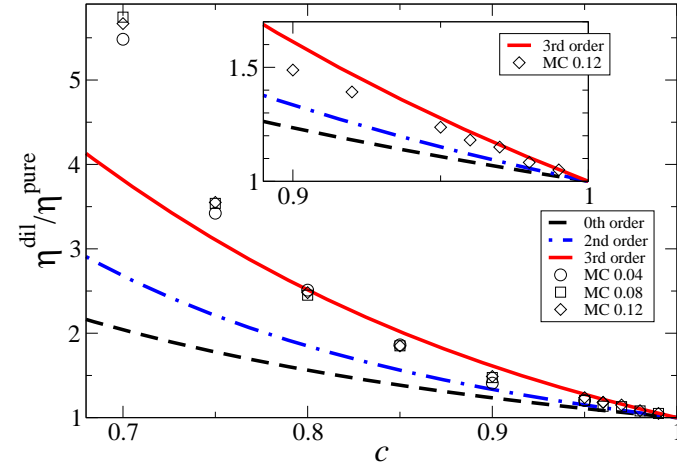


Рис. 1. Залежність показника η^{dil} парної кореляційної функції спінів розведеної моделі, нормованого на η^{pure} , від концентрації магнітних вузлів c . Суцільна і штриховані лінії відповідають результатам, отриманим з різних порядків розкладу. Символи позначають результати Монте Карло симуляцій.

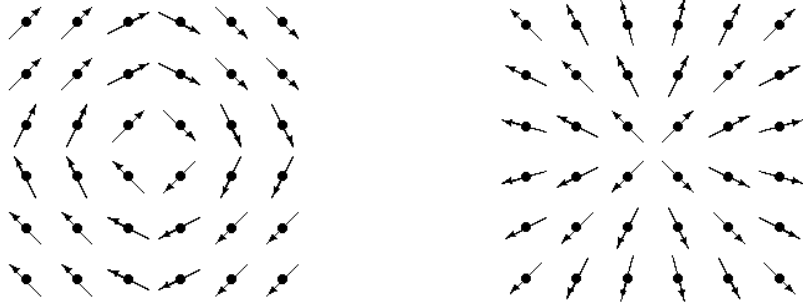
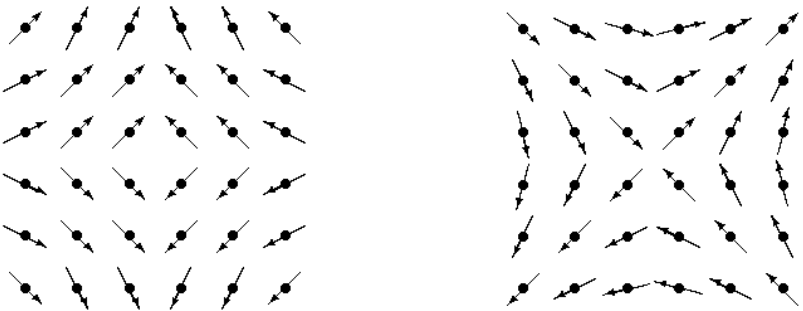
Ця енергія співпадає з енергією (2.1) $2D$ XY моделі у спіньхвильовому наближенні, якщо в (2.1) перейти від суми до інтегралу. Отже, $\theta(\mathbf{r})$ в (3.1) можна розглядати як розширення спінової змінної на неперервну область значень.

Топологічні дефекти у двовимірному просторі називають вихорами (рис.2,3). Вихор можна означити як конфігурацію поля $\theta(\mathbf{r})$ з найменшою енергією (основний стан, $T = 0$) при накладеній топологічній умові $\oint d\theta = 2\pi q$, де інтеграл береться за контуром, який захоплює центр вихора, а q називається зарядом чи числом закручення (winding number) означеного таким чином вихора. У системі полярних координат, початок відліку якої співпадає з центром вихора, така конфігурація задається рівнянням

$$\theta = q\varphi + \text{const} , \quad (3.2)$$

з якого легко отримати градієнт поля, $\nabla\theta = \frac{q}{r}(-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Градієнт завжди напрямлений перпендикулярно до радіус-вектора, проведеного з центру вихора.

Вихор повністю задається його зарядом q , а значення константи

Рис. 2. Приклади вихорів із зарядом $m = 1$.Рис. 3. Приклади вихорів із зарядом $m = -1$ (антивихори).

в (3.2) є абсолютно довільним, оскільки від конфігурації із одним значенням константи до конфігурації з іншою сталою можна перейти без зміни енергії (3.1). Так два вихори на рис.2 є еквівалентними один одному, так само як і два антивихори на рис.3.

Якщо бути точними, то у випадку конфігурації спінів із топологічними дефектами перехід від дискретної суми до інтегралу в (3.1) не є правомірним через виникнення особливостей у неперервному полі $\theta(\mathbf{r})$. Щоб оцінити енергію правильно, слід вилючити з області інтегрування «ядра» вихорів, енергія яких залежить лише від зарядів. Така оцінка є нетривіальною задачею [18], якої ми тут не торкатимось.

Для нашого розгляду важливою є «пружна» частина енергії поля $\theta(\mathbf{r})$, яка задається інтегралом з (3.1), взятим за всією системою окрім ядер вихорів. Для одного ізольованого вихора, заданого рівнянням (3.2) така енергія розбігається в термодинамічній границі:

$$E_{\text{el}}^{\text{pure}} = q^2 J \pi \int_A^L \frac{dr}{r} = q^2 J \pi \ln(L/A),$$

де L лінійний розмір системи, а A радіус ядра вихора.

Пружну енергію системи із вихором (3.2) і вакансією (немагнітним вузлом) на достатній відстані r від центру вихора можна дістати як енергію системи без вакансії мінус енергія, що припадає на вузол \mathbf{r} , який є порожнім. Цю енергію ми обчислюємо повертаючись до дискретної ґратки, тобто як суму за чотирма зв'язками, тоді енергія означеної системи із топологічним дефектом в початку координат і структурним дефектом в точці (r, φ) має вигляд

$$\begin{aligned} E_{\text{el}}^{\text{dil}} &= E_{\text{el}}^{\text{pure}} - E_{\text{vac}} = E_{\text{el}}^{\text{pure}} - \frac{1}{2} J \sum_{\alpha=x,y} [(\nabla\theta \cdot \mathbf{a}_\alpha)^2 + (-\nabla\theta \cdot \mathbf{a}_\alpha)^2] \\ &= E_{\text{el}}^{\text{pure}} - \frac{1}{2} q^2 J \frac{a^2}{r^2} \{2 \sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \varphi\} = E_{\text{el}}^{\text{pure}} - J q^2 (a/r)^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отже, вакансія притягається до вихора, причому незалежно від знаку його заряду. Це добре узгоджується з [21, 22]. Звичайно наша оцінка передбачає, що вакансія не збурює решту поля $\theta(\mathbf{r})$, це припущення надійно обґрунтовано в [21]. Фактично, наш результат майже співпадає з тим, що представлений в [21], але видається більш однозначним, оскільки в [21] коефіцієнт перед взаємодією залежить від того, яким чином вирізається область неперервного поля $\theta(\mathbf{r})$ навколо вакансії, а в нашому випадку коефіцієнт повністю визначається структурою ґратки.

Далі ми розглядаємо вакансію у системі, що містить пару вихорів (із зарядами q та q'). Конфігурація поля із парою вихорів є просто суперпозицією полів двох ізольованих вихорів, $\theta(\mathbf{r}) + \theta'(\mathbf{r})$, а градієнт: $\nabla\theta + \nabla\theta'$. Для такої конфігурації поля без вакансії нескладним інтегруванням можна отримати пружну енергію:

$$E_{\text{el}}^{\text{pure}} = -2\pi Jqq' \ln(R/A) + \pi J(q + q')^2 \ln(L/A), \quad (3.4)$$

де R відстань між вихорами. Слід зауважити, що доданок, який розбігається із розміром системи, зникає у випадку нейтральної пари ($q' = -q$).

Нехай координати вакансії є (r, φ) у полярній системі координат, центрованої на вихорі q і (r', φ') у системі центрованої на q' . Тоді енергія, що відповідає вузлу, на якому розміщена домішка:

$$E_{\text{vac}} = Ja^2 \left((q/r)^2 + (q'/r')^2 + 2(q/r)(q'/r') \cos(\varphi - \varphi') \right). \quad (3.5)$$

Підсумувати цей розділ можна узагальненням пружної енергії для системи із довільним числом вихорів і вакансією у точці \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} E_{\text{el}}^{\text{dil}} &= E_{\text{el}}^{\text{pure}} - E_{\text{vac}}(\mathbf{r}) \\ &= E_{\text{el}}^{\text{pure}} - J \sum_{\mathbf{R}} \sum_{\mathbf{R}'} q(\mathbf{R})q(\mathbf{R}') \frac{a^2}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}||\mathbf{R}' - \mathbf{r}|} \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r})(\mathbf{R}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}||\mathbf{R}' - \mathbf{r}|}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

де сума перераховує всі топологічні дефекти в системі.

4. Модель Вілена

Згідно [23] модель Вілена можна вивести в наближенні низьких температур з гамільтоніану

$$H = -J \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} [\cos(\theta_{\mathbf{r}} - \theta_{\mathbf{r}'}) - 1] \quad (4.1)$$

який еквівалентний гамільтоніану (1.1) $2D$ XY моделі. Статистичний інтеграл тоді записується як:

$$Z = \left(\prod_{\mathbf{r}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_{\mathbf{r}}}{2\pi} \right) \exp \left[\sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} V(\theta_{\mathbf{r}} - \theta_{\mathbf{r}'}) \right], \quad (4.2)$$

де $V(\theta) = K [\cos \theta - 1]$ і $K = J/k_B T$.

Спочатку наведемо виведення моделі Вілена без домішок, а потім узагальнимо результат на розведеної моделі. Ми шукатимемо наближену форму для виразу під інтегралом у (4.2), яка, зберігаючи початкову симетрію моделі, була б простішою і зручнішою для аналізу. Забігаючи наперед, можна сказати, що це буде суперпозиція експонент із показниками квадратичними за $\theta(\mathbf{r})$, що має подібність до спін-хвильового наближення, але у модель увійдуть нові дискретні змінні, які пізніше будуть пов'язані із вихровими зарядами.

Першим кроком слід розвинути фактор Больцмана у (4.2) в ряд Фур'є:

$$\exp \left[\sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} V(\theta_{\mathbf{r}} - \theta_{\mathbf{r}'}) \right] = \prod_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{is(\theta_{\mathbf{r}} - \theta_{\mathbf{r}'})} e^{\tilde{V}(s)}, \quad (4.3)$$

Фур'є змінна s залежить від двох координат у прямому просторі: $s = s(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Тепер, застосовуючи формулу сумування Пуассона [24]:

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} g(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi g(\phi) e^{-2\pi i\phi m}, \quad (4.4)$$

яка зазвичай використовується для покращення збіжності рядів, до кожної суми в (4.3), статистичний інтеграл можна переписати як:

$$Z = \left(\prod_{\mathbf{r}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_{\mathbf{r}}}{2\pi} \right) \sum_{m_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}}^{+\infty} e^{\sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} V_0(\theta_{\mathbf{r}} - \theta_{\mathbf{r}'} - 2\pi m_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'})}, \quad (4.5)$$

з $e^{V_0(\theta)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{\tilde{V}(\phi)} e^{i\phi\theta}$. Наразі це результат точних перетворень.

Використаємо тепер наближення низьких температур. У цьому випадку неважко отримати: $e^{V_0(\theta)} \simeq e^{-K\theta^2/2}$, як результат асимптотичної поведінки (при $K \rightarrow \infty$): $e^{\tilde{V}(s)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-is\theta} e^{K(\cos\theta - 1)} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi K}} e^{-s^2/(2K)}$.

Тоді статистичний інтеграл запишеться як

$$Z = \sum_{m_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}}^{+\infty} \Theta(m_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}) \left(\prod_{\mathbf{r}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_{\mathbf{r}}}{2\pi} \right) e^{-K \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} (\theta_{\mathbf{r}} - \theta_{\mathbf{r}'} - 2\pi m_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'})^2}. \quad (4.6)$$

Ми отримали бажану форму підінтегральної функції, але доти, доки межі інтегрування залишаються $(-\pi, \pi)$ усі члени ряду з $m \neq 0$

дають зникаюче малий внесок в (4.6) (при низьких температурах, $K \rightarrow \infty$) і таким чином (4.6) зводиться до спін-хвильового наближення. Для того, щоб розширити межі інтегрування зручно використати рівність:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi f(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{\beta\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi e^{-\beta\varepsilon\varphi^2} f(\varphi), \quad (4.7)$$

яка виконується для довільної періодичної функції $f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi)$. Останнє легко перевірити, записавши ліву частину (4.7) як $2\pi F(0)$: інтегруючи кожен доданок правої частини і перейшовши до границі $\varepsilon \rightarrow 0$ отримуємо теж $2\pi F(0)$.

Нарешті можемо записати статистичний інтеграл моделі Вілена [11]

$$Z = \sum_{m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\infty}^{+\infty} \left(\prod_{\mathbf{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta_{\mathbf{r}}}{2\pi} \right) e^{-\beta H_{\text{Vill}}^{\text{dil}}}, \quad (4.8)$$

з гамільтоніаном

$$H_{\text{Vill}}^{\text{dil}} = J \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} (\theta_{\mathbf{r}} - \theta_{\mathbf{r}'} - 2\pi m_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'})^2 + \varepsilon \sum_{\mathbf{r}} \theta_{\mathbf{r}}^2. \quad (4.9)$$

Розписане вище виведення можна провести і для моделі з немагнітними домішками [15]. Наведемо відразу остаточний результат. Статистичний інтеграл матиме вигляд:

$$Z = \sum_{m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\infty}^{+\infty} \Theta(m_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}) \left(\prod_{\mathbf{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta_{\mathbf{r}}}{2\pi} \right) e^{-\beta H_{\text{Vill}}^{\text{dil}}}, \quad (4.10)$$

де $\Theta(m) = c_{\mathbf{r}} c_{\mathbf{r}'} + (1 - c_{\mathbf{r}} c_{\mathbf{r}'}) \delta_{m,0}$, а гамільтоніан:

$$H_{\text{Vill}}^{\text{dil}} = J \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} (\theta_{\mathbf{r}} - \theta_{\mathbf{r}'} - 2\pi m_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'})^2 c_{\mathbf{r}} c_{\mathbf{r}'} + \varepsilon \sum_{\mathbf{r}} \theta_{\mathbf{r}}^2. \quad (4.11)$$

Відомо [11], що у гамільтоніані (4.9) чистої моделі Вілена можна виокремити дві незалежні частини: спін-хвильову і вихрову. Це можна показати перейшовши до Фур'є образів спінових змінних $\theta_{\mathbf{r}}$:

$$\theta_{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \theta_{\mathbf{k}}, \quad \theta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \theta_{\mathbf{r}},$$

дискретних змінних $m_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$,

$$m_{\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{a}_{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_{\alpha}/2)} m_{\mathbf{q}}^{\alpha}, \quad \alpha = x, y,$$

$$m_{\mathbf{q}}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_{\alpha}/2)} m_{\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{a}_{\alpha}}, \quad \alpha = x, y,$$

та зробивши зсув:

$$\theta_{\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}} - 2\pi i \frac{K_x(\mathbf{k}) m_{\mathbf{k}}^x + K_y(\mathbf{k}) m_{\mathbf{k}}^y}{K_x^2(\mathbf{k}) + K_y^2(\mathbf{k})}$$

($K_{\alpha}(\mathbf{k})$ було означено у підписі до виразу (2.5)).

Якщо проробити це із гамільтоніаном (4.11) розведеної моделі, знову ж таки будуть отримані незалежні спін-хвильова та вихрова частини, але з'явиться ще один перехресний доданок, який залежатиме як від спінових, так і від вихрових змінних. Таким чином, гамільтоніан можна записати як такий, що складається з трьох частин:

$$H_{\text{Vill}}^{\text{dil}} = H_{\text{SW}}^{\text{dil}} + H_{\text{Vort}}^{\text{dil}} + H_{\text{SW, Vort}}^{\text{dil}}. \quad (4.12)$$

Звичайно, як і повинно бути, перехресний доданок $H_{\text{SW, Vort}}^{\text{dil}}$ зникає в границі чистої моделі: $c_{\mathbf{r}} = 1, \mathbf{r} = 1, \dots, N$. Він має форму:

$$H_{\text{SW, Vort}}^{\text{dil}} = 2\pi J \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \rho(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \left(L_x(\mathbf{k} + \mathbf{k}') K_x(\mathbf{k}) K_y(\mathbf{k}') \right. \\ \left. - L_y(\mathbf{k} + \mathbf{k}') K_y(\mathbf{k}) K_x(\mathbf{k}') \right) (K_x^2(\mathbf{k}') + K_y^2(\mathbf{k}'))^{-1} \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}'}, \quad (4.13)$$

де $q_{\mathbf{k}} = i(K_y(\mathbf{k}) m_{\mathbf{k}}^x - K_x(\mathbf{k}) m_{\mathbf{k}}^y)$ – фур'є образи вихрових зарядів ($L_{\alpha}(\mathbf{k})$ було означено у підписі до виразу (2.5)). Спін-хвильова частина виглядає як:

$$H_{\text{SW}}^{\text{dil}} = \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} K_{\alpha}^2(\mathbf{k}) \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \\ + \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \rho(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \left(\sum_{\alpha} L_{\alpha}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') K_{\alpha}(\mathbf{k}) K_{\alpha}(\mathbf{k}') \right) \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}'}, \quad (4.14)$$

і цілком співпадає із виразом (2.5) отриманим в розділі 2. Ми лише не включили у (4.14) (так само як у (4.13) і в наступний вираз) доданок, квадратичний за ρ , оскільки в наближенні низьких концентрацій

розведення, в якому ми працюватимемо, ним можна знехтувати [25]. Енергія ж вихорів у розведеній системі записується як [15]:

$$H_{\text{Vort}}^{\text{dil}} = 2\pi J \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \frac{q_{\mathbf{k}} q_{-\mathbf{k}}}{\sum_{\gamma} K_{\gamma}^2(\mathbf{k})} + 2\pi J \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \rho(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (4.15)$$

$$\times \left(\frac{L_x(\mathbf{k} + \mathbf{k}') K_y(\mathbf{k}) K_y(\mathbf{k}') + L_y(\mathbf{k} + \mathbf{k}') K_x(\mathbf{k}) K_x(\mathbf{k}')}{(K_x^2(\mathbf{k}) + K_y^2(\mathbf{k}))(K_x^2(\mathbf{k}') + K_y^2(\mathbf{k}'))} \right) q_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}'} .$$

Перший доданок відповідає моделі без вакансій, його поведінка добре відома:

$$H_{\text{Vort}}^{\text{pure}} = 2\pi^2 J \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \frac{q_{\mathbf{k}} q_{-\mathbf{k}}}{\sum_{\gamma} K_{\gamma}^2(\mathbf{k})} \quad (4.16)$$

$$\simeq -2\pi \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}'} q(\mathbf{R}) q(\mathbf{R}') \ln(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|/a) + \pi^2 J \sum_{\mathbf{R}} (q(\mathbf{R}))^2 ,$$

де $q(\mathbf{R})$ заряди топологічних дефектів [11], означені на вузлах дуальної ґратки \mathbf{R} . (Вузли дуальної ґратки розміщуються у центрах елементарних комірок вихідної ґратки.) Отже, енергія вихорів у чистій моделі Вілена має таку ж форму як і у феноменологічній теорії топологічних дефектів. Увесь вплив домішок міститься у другому доданку в (4.15).

Рівняння (4.13) і, особливо, внесок немагнітних домішок у (4.15), заслуговують на детальне дослідження, оскільки могли б дати більш надійну оцінку взаємодії вакансії із топологічними дефектами, але у цьому огляді ми обмежимось наближенням «розмазаного» розведення (див. наступний розділ), яке дозволяє просто оцінити зміну критичної температури, пов'язану із присутністю домішок.

5. Наближення «розмазаного» розведення і оцінка критичної температури. Підсумки

У попередніх двох розділах ми розглянули два різні підходи до опису поведінки топологічних дефектів в двовимірній ХУ моделі: феноменологічну теорію, запропоновану ще Костерліцем і Таулесом, і модель Вілена, що може розглядатись як низькотемпературне наближення. У випадку регулярної ґратки (без структурних дефектів) обидва підходи дають однаковий результат для взаємодії вихорів.

У цьому останньому розділі ми застосуємо досить грубе наближення «розмазаного» розведення, яке, втім, дозволяє дуже просто оцінити зміну критичної температури за рахунок присутності замороженого розведення.

У точці БКТ переходу відбувається дисоціація вихрових пар. Це підказує дуже простий спосіб приблизно оцінити значення цієї критичної температури [26], знаючи закон взаємодії топологічних дефектів. Уявімо ідеальну систему, що складається лише з однієї нейтральної пари вихорів (одиночні за абсолютним значенням заряди). Єдиним ступенем вільності тут виступатиме відстань R між вихорами. Знаючи енергію взаємодії між парою вихорів $E_{\text{int}}(R) = 2\pi J \ln(R/a)$ для моделі без домішок, отриману з феноменологічної теорії топологічних дефектів, або з моделі Вілена, нескладно знайти середнє квадратичне значення цієї відстані:

$$\langle R^2 \rangle = \frac{\int_a^{\infty} R^3 e^{-\beta E_{\text{int}}(R)} dR}{\int_a^{\infty} R e^{-\beta E_{\text{int}}(R)} dR} = a^2 \frac{\pi\beta J - 1}{\pi\beta J - 2} . \quad (5.1)$$

Температурою переходу можна вважати температуру, при якій ця величина прямує до безмежності (дисоціація). Легко побачити, що це матиме місце при $kT_{\text{BKT}}/J \simeq \pi/2$. На жаль ця оцінка виявляється відносно далекою від справжньої температури БКТ переходу (для порівняння, найточніша на сьогодні оцінка дає $kT_{\text{BKT}}/J \simeq 0.893$ [27]). Незважаючи на кількісну відмінність, такий підхід правильно відображає механізм переходу, і ми сподіваємось отримати з його допомогою залежність критичної температури від концентрації розведення у моделі із замороженими немагнітними домішками. Не сподіваючись на правильну оцінку абсолютного значення критичної температури ми запишемо результат як відношення $T_{\text{BKT}}^{\text{dil}}/T_{\text{BKT}}^{\text{pure}}$, де $T_{\text{BKT}}^{\text{pure}}$ температура чистої моделі отримана з умови розбіжності (5.1).

Проте отримані в попередніх розділах вирази для взаємодії вихорів у розведеній моделі мають занадто складну форму для того, щоб дати якийсь аналітичний результат при підстановці в (5.1). Ми використаємо наближення, які формально виглядатимуть по-різному у випадку феноменологічної теорії топологічних дефектів і в моделі Вілена, проте приводять до однакового результату, який дозволяє оцінити $T_{\text{BKT}}^{\text{dil}}$ з (5.1).

Почнемо з феноменологічної теорії топологічних дефектів. Еластичну енергію системи, що складається з однієї нейтральної пари вихорів і деякої скінченної частки вільних від спінів вузлів, можна записати як:

$$E_{\text{int}}^{\text{dil}} = E_{\text{int}} - \sum_{\mathbf{r}_{\text{vac}}} E_{\text{vac}}(\mathbf{r}) , \quad (5.2)$$

де E_{int} енергія системи без домішок, $E_{\text{vac}}(\mathbf{r})$ – енергія, що припадає на вузол \mathbf{r} , яка дається виразом (3.5), а сума перелічує всі порожні вузли у системі.

Звичайно, (5.2) не може бути точним виразом, оскільки вираз (3.5) був отриманий з припущення, що кожній вакансії відповідає чотири зруйновані зв'язки. Таке припущення не буде виконуватись для вакансій, які знаходяться на сусідніх вузлах. Окрім того, при значній густині домішок, на відміну від розглянутого у розділі 3 випадку однієї вакансії, припущення про незмінність форми конфігурації вихора теж видається сумнівним. Проте, вважатимемо (5.2) і (3.5) задовільним наближенням, коли концентрація вакансій є малою величиною.

Вираз (5.2) можна переписати у формі:

$$E_{\text{int}}^{\text{dil}} = E_{\text{int}} - \int d\mathbf{r} \rho_{\text{vac}}(\mathbf{r}) E_{\text{vac}}(\mathbf{r}), \quad (5.3)$$

із густиною розведення

$$\rho_{\text{vac}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (1 - c_{\mathbf{r}}), \quad (5.4)$$

де δ – дельта-функція, а $c_{\mathbf{r}}$ – числа заповнення (1.3).

Оскільки вакансії розташовуються на ґратці випадково, з однаковою імовірністю для кожного вузла, немає підстав для того, щоб якась ділянка була більше чи менше розведеною за іншу ділянку. Звичайно флуктуації імовірнісного характеру у густині існують, проте вони мають давати зникаюче малий внесок в термодинамічній границі. Нехтуючи цими флуктуаціями, ми замінюємо вираз (5.4) однорідно «розмазанною» густиною:

$$\rho(\mathbf{r}) \simeq (1 - c)N/(a^2N) = (1 - c)/a^2,$$

що є просто числом порожніх вузлів, розділеним на площу системи. Тепер, інтеграл в (5.3) легко обчислити, він дає $E_{\text{int}}^{\text{dil}}(R) = [1 - 2(1 - c)]2\pi J \ln(R/a)$. Негайний висновок, що температура БКТ переходу: $kT_{\text{BKT}}^{\text{dil}}/J = [1 - 2(1 - c)]\pi/2$, чи, нормалізуючи на критичну температуру чистої моделі,

$$T_{\text{BKT}}^{\text{dil}}/T_{\text{BKT}}^{\text{pure}} = 1 - 2(1 - c). \quad (5.5)$$

Цікаво, що такий самий результат можна отримати з гамільтоніану моделі Вілена (4.15), якщо знехтувати внесками від розведення ненульового порядку за $\Delta\rho$ (див. розділ 2). У цьому випадку ми отримуємо для енергії пари вихорів:

$$H_{\text{Vort}}^{\text{dil}} = 2\pi [1 - 2(1 - c)] J \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{q_{\mathbf{k}} q_{-\mathbf{k}}}{\sum_{\gamma} K_{\gamma}^2(\mathbf{k})}. \quad (5.6)$$

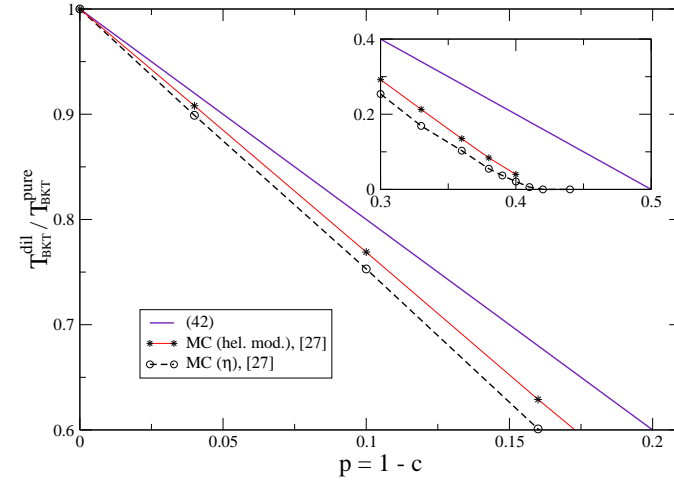


Рис. 4. Фазова діаграма для $2d$ XY моделі із замороженими домішками концентрації $p = 1 - c$.

Як наслідок, знову маємо $E_{\text{int}}^{\text{dil}}(R) = [1 - 2(1 - c)]2\pi J \ln(R/a)$, і приходимо до тієї ж оцінки (5.5) для критичної температури.

Результат (5.5) свідчить про зменшення температури переходу із зростанням концентрації розведення, як і слід очікувати через зменшення середнього координаційного числа. Окрім цього, незважаючи на те, що наше виведення базувалося на наближення слабкого розведення, формула (5.5) передбачає перетворення T_{BKT} в нуль при $c = 0.5$. Хоча й не збігаючись кількісно із відомим значенням перколяційного порогу для двовимірної квадратної ґратки: $c \simeq 0.59$ [28], це все ж важлива якісна риса результату (5.5).

На рис.4, запозиченому з [15], представлено порівняння між аналітичним результатом (5.5) і доступними на сьогодні Монте Карло результатами для фазової діаграми $2D$ XY моделі із замороженим вузловим розведенням [29]. Дві Монте Карло криві на рис.4 відповідають двом різним методам оцінки критичної температури: з поведінки показника кореляційної функції (η) і зі стрибка модуля спіральності (helicity modulus). Як видно з рис.4, відомі на сьогодні дані Монте Карло симуляцій розведеної $2D$ XY моделі є недостатніми для того, щоб зробити якісь остаточні висновки про правомірність оцінки (5.5). Принаймні лінійний характер поведінки при низьких концентраціях розведення узгоджується добре.

Залежності критичної температури (5.5) і показника парної коре-

ляційної функції (2.9) від концентрації немагнітних домішок є основними підсумками дослідження впливу замороженого розведення на $2D$ XU модель. Слід ще раз наголосити, що (5.5) можна отримати в наближенні «розмазаної» густини розведення як з феноменологічної теорії топологічних дефектів, так і з моделі Вілена. В оцінці асимптотичної поведінки парної спінової кореляційної функції у спін-хвильовому наближенні однорідно «розмазане» розведення відповідає нульовому порядку розкладу за $\Delta\rho$.

Література

1. S. Hikami and T. Tsuneto. Prog. of Theor. Phys. **63**, 387 (1980)
2. W. Dürr et al. Phys. Rev. Lett. **62**, 206 (1989)
3. C. A. Ballantine et al. Appl. Phys. A **49**, 459 (1989)
4. F. Huang et al. J. Appl. Phys. **73**, 6760 (1993)
5. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless. J. Phys. C: Solid State Phys. **6**, 1181 (1973)
6. V. L. Berezinskii, A. Ya. Blank. Sov. Phys.-JETP **37**, 369 (1973).
7. N. D. Mermin and H. Wagner. Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966)
8. P. C. Hohenberg. Phys. Rev. **158**, 383 (1967)
9. J. M. Kosterlitz. J. Phys. C: Solid State Phys. **7**, 1046 (1974)
10. P. Minnhagen. Rev. of Mod. Phys. **59**, 1001 (1987)
11. J. Villain. Jour. de Phys. **36**, (1975) 581
12. O. Kapikranian, B. Berche and Yu. Holovatch. Eur. Phys. J. B **56**, 93 (2007)
13. O. Kapikranian, B. Berche and Yu. Holovatch. Phys. Lett. A **366**, 150 (2007)
14. O. Kapikranian, B. Berche and Yu. Holovatch. Probl. of Atom. Sc. and Tech., N3 (2), 376 (2007)
15. O. Kapikranian, B. Berche and Yu. Holovatch. Препринт: arXiv:0803.1938. Прийнято до друку в Phys. Lett. A (2008)
16. R. Brout. Phys. Rev. **115**, 824 (1959)
17. R. M. Mazo. Jour. Chem. Phys. **39**, 1224 (1963)
18. P. M. Chaikin and T. C. Lubensky. *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
19. F. Wegner. Z. Phys. **206**, 465 (1967)
20. U. Wolff, Nucl. Phys. B **322**, 759 (1989)
21. A. R. Pereira, L. A. S. Mól, S. A. Leonel, P. Z. Coura and B. V. Costa. Phys. Rev. B **68**, 132409 (2003)
22. G. M. Wysin. Phys. Rev. B **68**, 184411 (2003)

23. J. V. José, L. P. Kadanoff, S. Kirkpatrick and D. R. Nelson. Phys. Rev. B **16**, 1217 (1977)
24. P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics, Part I* (McGraw-Hill, New York, 1953) crop. 466-467
25. B. Berche, A. I. Fariñas-Sanchez, Yu. Holovatch and R. V. Paredes. Eur. Phys. J. B **36**, 91 (2003)
26. Yu. A. Izyumov and Yu. N. Skryabin. *Statistical Mechanics of Magnetically Ordered Systems* (Kluwer Academic Publishers, New York, 1988)
27. M. Hasenbusch and K. Pinn. J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 63 (1997)
28. T. Gebele. J. Phys. A: Math. Gen. **17**, L51 (1984)
29. G. M. Wysin, A. R. Pereira, I. A. Marques, S. A. Leonel and P. Z. Coura. Phys. Rev. B **72**, 094418 (2005)

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN:

- Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences
- ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services
- INSPEC
- Elsevier Bibliographic Databases (EMBASE, EMNursing, Compendex, GEOBASE, Scopus)
- “Referativnyi Zhurnal”
- “Dzherelo”

EDITOR IN CHIEF: Ihor Yukhnovskii

EDITORIAL BOARD: T. Arimitsu, *Tsukuba*; J.-P. Badiali, *Paris*; B. Berche, *Nancy*; T. Bryk, *Lviv*; J.-M. Caillol, *Orsay*; C. von Ferber, *Freiburg*; R. Folk, *Linz*; D. Henderson, *Provo*; F. Hirata, *Okazaki*; Yu. Holovatch, *Lviv*; M. Holovko, *Lviv*; O. Ivankiv, *Lviv*; W. Janke, *Leipzig*; M. Korynevskii, *Lviv*; Yu. Kozitsky, *Lublin*; M. Kozlovskii, *Lviv*; H. Krienke, *Regensburg*; R. Levitskii, *Lviv*; V. Morozov, *Moscow*; I. Mryglod, *Lviv*; O. Patsahan (Assistant Editor), *Lviv*; N. Plakida, *Dubna*; G. Röpke, *Rostock*; I. Stasyuk (Associate Editor), *Lviv*; M. Tokarchuk, *Lviv*; I. Vakarchuk, *Lviv*; M. Vavruk, *Lviv*; A. Zagorodny, *Kyiv*

CONTACT INFORMATION:

Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2760908; Fax: +38(032)2761978
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua <http://www.icmp.lviv.ua>