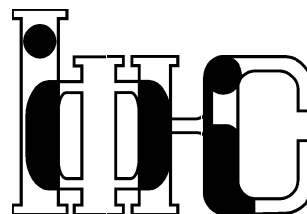


Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Національна академія наук України



ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

Іван Романович Козярський
Тарас Степанович Мисакович
Ігор Васильович Стасюк

БОЗОННІ ТА ФЕРМІОННІ СПЕКТРИ В МОДЕЛІ
БОЗЕ-ФЕРМІ-ГАББАРДА

Роботу отримано 5 грудня 2012 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом квантової статистики

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

ICMP-12-11U

І.Р.Козярський, Т.С.Мисакович, І.В.Стасюк

БОЗОННІ ТА ФЕРМІОННІ СПЕКТРИ
В МОДЕЛІ БОЗЕ-ФЕРМІ-ГАББАРДА

ЛЬВІВ

УДК: 544.015.4

PACS: 64.75.+g, 71.20.Tx, 64.70.-p

Бозонні та ферміонні спектри в моделі Бозе-Фермі-Габбарда

I.R.Козьярський, Т.С.Мисакович, І.В.Стасюк

Анотація. Досліджено бозонні та ферміонні спектри моделі Бозе-Фермі-Габбарда. Розраховано бозонну функцію Гріна для випадку локалізованих ферміонів та ферміонну функцію в випадку локалізованих бозонів з використанням формалізму операторів Габбарда. Побудовано фазові діаграми, що визначають області існування надплинної фази та фази моттівського діелектрика в площині (μ_b, t^b) (хімічний потенціал бозонів, параметр перескоку бозонів) в режимі фіксованого хімічного потенціалу ферміонів або фіксованої середньої концентрації ферміонів на вузлі. Для різних станів у фазі моттівського діелектрика, зображених на діаграмах, побудовано бозонні та ферміонні спектри частинок при різних температурах.

Boson and fermion spectra of the Bose-Fermi-Hubbard model

I.R.Kozyarsky, T.S.Mysakovych, I.V.Stasyuk

Abstract. The boson and fermion spectra of the Bose-Fermi-Hubbard model are investigated. The boson Green's function is calculated for the case of localized fermions and the fermion Green's function is calculated for the case of localized bosons; the formalism of Hubbard operators is used. Phase diagrams determining the regions of existence superfluid phase and the Mott insulator are built in the plane (μ_b, t^b) (the boson chemical potential vs. boson hopping parameter) in the regimes of fixed chemical potential or fixed concentration of fermions. For different states of the Mott insulator phase depicted on the phase diagram the boson and fermion spectra are built at different temperatures.

1. Вступ

Модель Бозе-Фермі-Габбарда можна вважати узагальненням моделі Бозе-Габбарда [1] в випадку наявності ферміонів. Одним з прикладів застосування моделі є експерименти по створенню оптичних ґраток [2], де систему з великої кількості частинок бозе та фермі типів охолоджують до низької температури, потім поміщають в штучно створене за допомогою лазера періодичне потенціальне поле. Змінюючи величини інтенсивності лазерного випромінювання та температури охолодження можна підібрати параметри моделі для моделювання певного конкретного об'єкта та перевірки теоретичних розрахунків [3]. В таких експериментах використовують, наприклад, такі пари частинок: (${}^6\text{Li}$ - ${}^7\text{Li}$, ${}^7\text{Li}$ - ${}^{87}\text{Rb}$). Перше покоління таких експериментів зосереджувалось головним чином на застосуванні і, відповідно, моделюванні одних видів частинок чи їхньої суміші різних ізотопів одного атома. У штучно створене поле вводилися суто бозе-, чи фермі-частинки. Такі системи описувались відповідно моделями Бозе-Габбарда, чи Фермі-Габбарда [4,5]. Тепер експериментальна робота іде в сферу суміші різних видів атомів. Оскільки компоненти таких сумішей суттєво відрізняються спіном і атомними масами, то це дає змогу моделювати системи з сильною анізотропією. Крім того, коли в експериментах використовують легкі лужні метали, такі як Li, K чи один із рідкоземельних атомів, таких як Sr, то один з атомів має можливість для зміни статистики Фермі-Дірака на Бозе-Айнштайна, шляхом простої зміни ізотопу [6]. Особливо цікавою особливістю бозе-фермі суміші є те, що вона дає можливість створювати ферміонні композити, утворених спарюванням ферміонів і бозонів (або ферміонних і бозонних дірок) [7-9].

Іншим прикладом систем, які можуть бути описані гамільтоніаном моделі Бозе-Фермі-Габбарда, є інтеркаляція іонів в кристалах [10, 11], які є оксидами перехідних металів, тут іони кристалів є бозонами, а електрони ферміонами. Наприклад інтеркальвані іони Li в кристал діоксид титану TiO_2 . Такі системи належать до напівпровідників, ширина забороненої зони в них становить 3 еВ. Ці матеріали є предметом інтенсивних теоретичних та експериментальних досліджень.

В цій роботі ми розглянули модель Бозе-Фермі-Габбарда, ввели оператори Габбарда, що діють на одновузлові стани. Обчислили середні величини концентрацій бозонів та ферміонів на вузлі ґратки в випадку сильної взаємодії при відсутності перескоків частинок. Побудували кореляційні функції Гріна для бозе-частинок в випадку ло-

калізованих на вузлах ферміонів [12], та фермі-частинок в випадку локалізованих на вузлах бозонів. Відповідно до цих функцій Гріна побудовані фазові діаграми та спектри частинок.

2. Розрахунок концентрації бозе- та фермі-частинок при відсутності переносу

Модель Бозе-Фермі-Габбарда описується наступним гамільтоніаном:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij}^b b_i^+ b_j + \sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij}^f a_i^+ a_j + U_b \sum_{i=1}^N \frac{n_i^b (n_i^b - 1)}{2} \\ & + U_{bf} \sum_{i=1}^N n_i^b n_i^f - \mu_b \sum_{i=1}^N b_i^+ b_i - \mu_f \sum_{i=1}^N a_i^+ a_i, \end{aligned} \quad (2.1)$$

де перший та другий доданок – енергії міжвузлового переносу відповідно бозонів та ферміонів, третій – енергія взаємодії бозонів на одному вузлі ґратки, четвертий – взаємодія бозонів з ферміонами також на одному вузлі ґратки.

Введемо так звані «одновузлові» стани для вузла i . Якщо число бозонів на вузлі $n^b = m$, а ферміонів $n^f = 0$, то такий вузловий стан частинок позначатимемо $|m\rangle$; якщо $n^b = m$, а ферміонів $n^f = 1$, то такий стан позначатимемо $|\tilde{m}\rangle$. Перепишемо оператори породження та знищення бозонів і ферміонів через оператори Габбарда $X^{mn} = |m\rangle\langle n|$, де n, m - приймають як «тільдовані», так і «нетільдовані» стани;

$$\begin{aligned} a_i^+ &= \sum_{n, \tilde{n}=0}^{\infty} X_i^{\tilde{n}n} \\ a_i &= \sum_{n, \tilde{n}=0}^{\infty} X_i^{n\tilde{n}} \\ b_i &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} X_i^{nn+1} + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \sqrt{\tilde{n}+1} X_i^{\tilde{n}\tilde{n}+1} \\ b_i^+ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} X_i^{n+1n} + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \sqrt{\tilde{n}+1} X_i^{\tilde{n}+1\tilde{n}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Перепишемо гамільтоніан через оператори Габбарда:

$$\hat{H} = \hat{H}^b + \hat{H}^f + \hat{H}_0, \quad (2.3)$$

де \hat{H}^b та \hat{H}^f - доданки перескоку відповідно бозе- та фермі-частинок, а \hat{H}_0 - доданок взаємодії частинок на одному вузлі;

$$\begin{aligned} \hat{H}^b &= \sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij}^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} X_i^{n+1n} + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \sqrt{\tilde{n}+1} X_i^{\tilde{n}+1\tilde{n}} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m+1} X_j^{mm+1} + \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \sqrt{\tilde{m}+1} X_j^{\tilde{m}\tilde{m}+1} \right), \\ \hat{H}^f &= \sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij}^f \left(\sum_{n, \tilde{n}=0}^{\infty} X_i^{\tilde{n}n} \times \sum_{m, \tilde{m}=0}^{\infty} X_j^{m\tilde{m}} \right), \\ \hat{H}_0 &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n X_i^{nn} + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \lambda_{\tilde{n}} X_i^{\tilde{n}\tilde{n}} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тут введено позначення:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{U_{bb}}{2} (n^2 - n) - \mu_b n, \\ \lambda_{\tilde{n}} &= \frac{U_{bb}}{2} (\tilde{n}^2 - \tilde{n}) + U_{bf} \tilde{n} - \mu_b \tilde{n} - \mu_f. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Розрахуємо деякі характеристики моделі у наближенні, коли відсутній перенос частинок між різними їх позиціями, тобто $t_{ij}^b = 0$ і $t_{ij}^f = 0$. Розрахуємо статистичну суму системи в наближенні гамільтоніана \hat{H}_0 .

$$\begin{aligned} Z &= \text{Sp exp}(-\beta \hat{H}_0) \\ &= \text{Sp exp} \left(\sum_{i=1}^N -\beta \hat{H}_i \right) = \text{Sp} \prod_{i=1}^N \text{exp}(-\beta \hat{H}_i) = Z_i^N. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тут Z_i – статистична сума, розрахована на один вузол, $Z_i = \text{Sp} e^{-\beta \hat{H}_i}$, N – кількість вузлів в системі. Тоді термодинамічний потенціал на один вузол буде: $\Omega = -T \ln Z_i$, а концентрація бозонів та ферміонів на вузлі ґратки:

$$\begin{aligned} n_b &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_b} = \frac{T}{Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial \mu_b}, \\ n_f &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_f} = \frac{T}{Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial \mu_f}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$Z_i = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \lambda_n} + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} e^{-\beta \lambda_{\tilde{n}}}, \quad (2.8)$$

$$n_b = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_n} n + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_{\tilde{n}}} \tilde{n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_n} + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_{\tilde{n}}}}, \quad (2.9)$$

$$n_f = \frac{\sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_{\tilde{n}}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_n} + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_{\tilde{n}}}}. \quad (2.10)$$

Знайдемо середні значення операторів Габбарда:

$$\langle X^{nn} \rangle = \frac{e^{-\beta\lambda_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_n} + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_{\tilde{n}}}}, \quad (2.11)$$

$$\langle X^{\tilde{n}\tilde{n}} \rangle = \frac{e^{-\beta\lambda_{\tilde{n}}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_n} + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_{\tilde{n}}}}. \quad (2.12)$$

Побудуємо графіки залежності середньої концентрації бозонів на вузлі ґратки від хімічного потенціалу бозонів в режимі фіксованого хімічного потенціалу та фіксованої концентрації ферміонів (див. Рис. 1). В режимі фіксованої концентрації розв'язуємо рівняння (2.10) відносно μ_f .

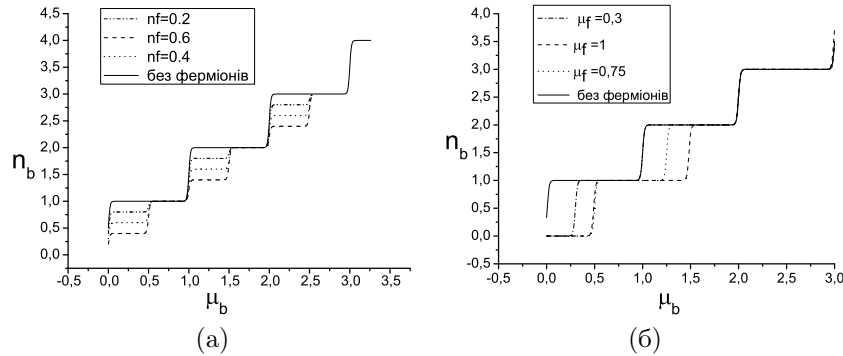


Рис. 1. Концентрація бозонів при (а) фіксованій концентрації ферміонів, (б) при фіксованому хімічному потенціалі ферміонів $T = 0.01$, $U_{bb} = 1$, $U_{bf} = 0.5$.

Відомо, що при відсутності ферміонів концентрація бозонів змінюється стрибкоподібно на ціле значення при зміні хімічного потенціалу бозонів. При наявності ферміонів у системі утворюються так звані композитні ферміони [9], завдяки відштовхуванню між ферміонами та бозонами ми маємо ситуацію, коли ферміони фактично

«не пускають» бозони на вузли і тому концентрація бозонів при деяких значеннях хімпотенціалу бозонів є меншою порівняно з випадком відсутності ферміонів, це проявляється у додаткових стрибках на концентрації бозе-частинок у режимі фіксованої концентрації ферміонів. У випадку фіксованого хімпотенціалу ферміонів виникає стрибок концентрації бозонів не при цілочисельному значенню хімпотенціалу бозонів відносно U_{bb} , та змінюється по мірі зміни ферміонного хімпотенціалу.

3. Розрахунок функції Гріна бозе-частинок

Розрахуємо функцію Гріна $\langle\langle b_p | b_l^+ \rangle\rangle$ з врахуванням перескоків частинок:

$$\begin{aligned} \langle\langle b_p | b_l^+ \rangle\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \langle\langle X_p^{nn+1} | b_l^+ \rangle\rangle \\ &+ \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \sqrt{\tilde{n}+1} \langle\langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}+1} | b_l^+ \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Знайдемо потрібні функції Гріна з рівняння руху:

$$\begin{aligned} \hbar\omega \langle\langle X_p^{nn+1} | b_l^+ \rangle\rangle &= \frac{\hbar}{2\pi} \langle\langle [X_p^{nn+1}, b_l^+] + \ll [X_p^{nn+1}, \hat{H}] | b_l^+ \rangle\rangle, \\ \hbar\omega \langle\langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}+1} | b_l^+ \rangle\rangle &= \frac{\hbar}{2\pi} \langle\langle [X_p^{\tilde{n}\tilde{n}+1}, b_l^+] + \ll [X_p^{\tilde{n}\tilde{n}+1}, \hat{H}] | b_l^+ \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Підставляючи одержані комутатори в рівняння (3.2), отримуємо наступні рівняння для функцій Гріна:

$$\begin{aligned} \hbar\omega \langle\langle X_p^{nn+1} | b_l^+ \rangle\rangle &= \frac{\hbar}{2\pi} \delta_{p,l} \sqrt{n+1} \langle X_p^{nn} - X_p^{n+1n+1} \rangle \\ &+ (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \langle\langle X_p^{nn+1} | b_l^+ \rangle\rangle + \sum_j t_{pj}^b \langle\langle (X_p^{nn} - X_p^{n+1n+1}) b_j | b_l^+ \rangle\rangle \\ &+ \sum_i t_{ip}^b \langle\langle b_i^+ (X_p^{nn+2} \sqrt{n+2} - X_p^{n-1n+1} \sqrt{n}) | b_l^+ \rangle\rangle \\ &+ \sum_i t_{ip}^f \langle\langle a_i^+ X_p^{n\tilde{n}+1} | b_l^+ \rangle\rangle - \sum_j t_{pj}^f \langle\langle X_p^{\tilde{n}n+1} a_j | b_l^+ \rangle\rangle, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\hbar\omega \langle\langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}+1} | b_l^+ \rangle\rangle = \frac{\hbar}{2\pi} \delta_{p,l} \sqrt{\tilde{n}+1} \langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}} - X_p^{\tilde{n}+1\tilde{n}+1} \rangle$$

$$\begin{aligned}
& +(\lambda_{\tilde{n}+1} - \lambda_{\tilde{n}})\langle\langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}+1}|b_l^+\rangle\rangle + \sum_j t_{pj}^b \langle\langle (X_p^{\tilde{n}\tilde{n}} - X_p^{\tilde{n}+1\tilde{n}+1})b_j|b_l^+\rangle\rangle \\
& + \sum_i t_{ip}^b \langle\langle b_i^+ (X_p^{\tilde{n}\tilde{n}+2}\sqrt{\tilde{n}+2} - X_p^{\tilde{n}-1\tilde{n}+1}\sqrt{\tilde{n}})|b_l^+\rangle\rangle \\
& - \sum_i t_{ip}^f \langle\langle a_i^+ X_p^{\tilde{n}\tilde{n}+1}|b_l^+\rangle\rangle + \sum_j t_{pj}^f \langle\langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}+1}a_j|b_l^+\rangle\rangle. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Приймаємо наближення $t_{pj}^f = 0$ в формулах (3.3) та (3.4).

Для розрахунку функцій Гріна в правій частині рівнянь (3.3), (3.4) виконаємо розщеплення в дусі наближення хаотичних фаз:

$$\begin{aligned}
& \langle\langle (X_p^{nn} - X_p^{n+1n+1})b_j|b_l^+\rangle\rangle \simeq \langle X_p^{nn} - X_p^{n+1n+1} \rangle \langle\langle b_j|b_l^+\rangle\rangle \\
& + \langle b_j \rangle \langle\langle X_p^{nn} - X_p^{n+1n+1}|b_l^+\rangle\rangle, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle\langle (X_p^{\tilde{n}\tilde{n}} - X_p^{\tilde{n}+1\tilde{n}+1})b_j|b_l^+\rangle\rangle \approx \langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}} - X_p^{\tilde{n}+1\tilde{n}+1} \rangle \langle\langle b_j|b_l^+\rangle\rangle \\
& + \langle b_j \rangle \langle\langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}} - X_p^{\tilde{n}+1\tilde{n}+1}|b_l^+\rangle\rangle, \tag{3.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle\langle b_i^+ (X_p^{nn+2}\sqrt{n+2} - X_p^{n-1n+1}\sqrt{n})|b_l^+\rangle\rangle \approx \\
& \langle b_i^+ \rangle \langle\langle X_p^{nn+2}\sqrt{n+2} - X_p^{n-1n+1}\sqrt{n}|b_l^+\rangle\rangle \\
& + \langle X_p^{nn+2}\sqrt{n+2} - X_p^{n-1n+1}\sqrt{n} \rangle \langle\langle b_i^+|b_l^+\rangle\rangle, \tag{3.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_i^+ (X_p^{\tilde{n}\tilde{n}+2}\sqrt{\tilde{n}+2} - X_p^{\tilde{n}-1\tilde{n}+1}\sqrt{\tilde{n}})|b_l^+\rangle\rangle \approx \\
& \langle b_i^+ \rangle \langle\langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}+2}\sqrt{\tilde{n}+2} - X_p^{\tilde{n}-1\tilde{n}+1}\sqrt{\tilde{n}}|b_l^+\rangle\rangle \\
& + \langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}+2}\sqrt{\tilde{n}+2} - X_p^{\tilde{n}-1\tilde{n}+1}\sqrt{\tilde{n}} \rangle \langle\langle b_i^+|b_l^+\rangle\rangle. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Оскільки, ми визначаємо функцію Гріна для фази моттівського діелектрика, то $\langle b_i \rangle = \langle b_i^+ \rangle = 0$. Приймаючи також $\langle X_p^{nn+2} \rangle = 0$ та $\langle X_p^{n-1n+1} \rangle = 0$, отримуємо наступні функції Гріна:

$$\begin{aligned}
\langle\langle X_p^{nn+1}|b_l^+\rangle\rangle & = \frac{\sum_j t_{pj}^b \sqrt{n+1} \langle X_p^{nn} - X_p^{n+1n+1} \rangle \langle\langle b_j|b_l^+\rangle\rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} \\
& + \frac{\frac{\hbar}{2\pi} \sqrt{n+1} \langle X_p^{nn} - X_p^{n+1n+1} \rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}+1}|b_l^+\rangle\rangle & = \frac{\sum_j t_{pj}^b \sqrt{\tilde{n}+1} \langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}} - X_p^{\tilde{n}+1\tilde{n}+1} \rangle \langle\langle b_j|b_l^+\rangle\rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{\tilde{n}+1} - \lambda_{\tilde{n}})} \\
& + \frac{\frac{\hbar}{2\pi} \sqrt{\tilde{n}+1} \langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}} - X_p^{\tilde{n}+1\tilde{n}+1} \rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{\tilde{n}+1} - \lambda_{\tilde{n}})}. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Таким чином, можемо записати функцію $\langle\langle b_p|b_l^+\rangle\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle\langle b_p|b_l^+\rangle\rangle & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_j t_{pj}^b (n+1) \langle X_p^{nn} - X_p^{n+1n+1} \rangle \langle\langle b_j|b_l^+\rangle\rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\hbar}{2\pi} (n+1) \langle X_p^{nn} - X_p^{n+1n+1} \rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} \\
& + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \frac{\sum_j t_{pj}^b (\tilde{n}+1) \langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}} - X_p^{\tilde{n}+1\tilde{n}+1} \rangle \langle\langle b_j|b_l^+\rangle\rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{\tilde{n}+1} - \lambda_{\tilde{n}})} \\
& + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \frac{\frac{\hbar}{2\pi} (\tilde{n}+1) \langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}} - X_p^{\tilde{n}+1\tilde{n}+1} \rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{\tilde{n}+1} - \lambda_{\tilde{n}})}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Оскільки функція Гріна містить члени на різних вузлах, перейдемо до \vec{k} простору за допомогою Фур'є перетворення:

$$\begin{aligned}
\langle\langle b_p|b_l^+\rangle\rangle & = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{R}_{pl}} \langle\langle b|b^+\rangle\rangle_k, \\
\langle\langle b_j|b_l^+\rangle\rangle & = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{R}_{jl}} \langle\langle b|b^+\rangle\rangle_k, \\
\vec{R}_{pl} & = \vec{R}_p - \vec{R}_l, \\
t_{pj}^b & = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{R}_{pj}} t_{\vec{k}}^b. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо функцію Гріна бозе частинок в \vec{k} просторі:

$$\langle\langle b|b^+\rangle\rangle_k = \frac{1}{2\pi} \frac{g(\omega)}{1 - g(\omega)t_k}, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
g(\omega) & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \langle X_p^{nn} - X_p^{n+1n+1} \rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} \\
& + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \frac{(\tilde{n}+1) \langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}} - X_p^{\tilde{n}+1\tilde{n}+1} \rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{\tilde{n}+1} - \lambda_{\tilde{n}})}. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

4. Розрахунок функції Гріна фермі-частинок

Розрахуємо для фермі частинок функцію Гріна $\langle\langle a_p | a_l^+ \rangle\rangle$:

$$\langle\langle a_p | a_l^+ \rangle\rangle = \sum_{n, \bar{n}=0}^{\infty} \sum_{m, \bar{m}=0}^{\infty} \langle\langle X_p^{n\bar{n}} | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle. \quad (4.1)$$

Знайдемо функцію Гріна $\langle\langle X_p^{n\bar{n}} | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle$ з рівняння руху:

$$\begin{aligned} \hbar\omega \langle\langle X_p^{n\bar{n}} | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle &= \frac{\hbar}{2\pi} \langle\{X_p^{n\bar{n}}, X_l^{\bar{m}m}\}\rangle \\ &+ \langle\langle [X_p^{n\bar{n}}, \hat{H}] | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Підставляючи знайдені вирази комутатора та антикомутатора в рівняння (4.2) одержуємо наступне рівняння для функції Гріна:

$$\begin{aligned} \hbar\omega \langle\langle X_p^{n\bar{n}} | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle &= \frac{\hbar}{2\pi} \delta_{p,l} (X_p^{nn} + X_p^{\bar{n}\bar{n}}) \\ &+ \sum_j t_{pj}^f \langle\langle (X_p^{nn} + X_p^{\bar{n}\bar{n}}) a_j | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle + (\lambda_{\bar{n}} - \lambda_n) \langle\langle X_p^{n\bar{n}} | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle \\ &+ \sum_i t_{ip}^b \langle\langle b_i^+ (\sqrt{\bar{n}+1} X_p^{n\bar{n}+1} - \sqrt{n+1} X_p^{n\bar{n}+1}) | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle \\ &+ \sum_j t_{pj}^b \langle\langle (\sqrt{\bar{n}+1} X_p^{n+1\bar{n}} - \sqrt{n+1} X_p^{n+1\bar{n}}) b_j | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При розщепленні функцій:

$$\langle\langle b_i^+ X_p^{n\bar{n}+1} | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle \approx \langle b_i^+ \rangle \langle\langle X_p^{n\bar{n}+1} | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle + \langle X_p^{n\bar{n}+1} \rangle \langle\langle b_i^+ | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle,$$

$$\langle\langle X_p^{n+1\bar{n}} b_j | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle \approx \langle X_p^{n+1\bar{n}} \rangle \langle\langle b_j | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle + \langle b_j \rangle \langle\langle X_p^{n+1\bar{n}} | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle, \quad (4.4)$$

доданками з функціями $\langle\langle b_i^+ | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle$ та $\langle\langle b_j | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle$ нехтуємо. Доданки, які містять середні: $\langle b_j \rangle$, $\langle b_i^+ \rangle$ рівні нулю, оскільки дані середні для фази моттівського діелектрика в наближеному гамільтоніані \hat{H}_0 рівні нулю. Якщо прийняти наближення типу Габбард-1, дістанемо таке розщеплення:

$$\ll \langle (X_p^{nn} + X_p^{\bar{n}\bar{n}}) a_i | X_l^{\bar{m}m} \rangle \rangle = \langle X_p^{nn} + X_p^{\bar{n}\bar{n}} \rangle \langle\langle a_j | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle. \quad (4.5)$$

Таким чином, отримуємо наступні функції Гріна:

$$\begin{aligned} \langle\langle X_p^{n\bar{n}} | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle &= \frac{\sum_j t_{pj}^f \langle X_p^{nn} + X_p^{\bar{n}\bar{n}} \rangle \langle\langle a_j | X_l^{\bar{m}m} \rangle\rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{\bar{n}} - \lambda_n)} \\ &+ \frac{\frac{\hbar}{2\pi} \langle X_p^{nn} + X_p^{\bar{n}\bar{n}} \rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{\bar{n}} - \lambda_n)}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle a_p | a_l^+ \rangle\rangle &= \sum_{n, \bar{n}=0}^{\infty} \frac{\sum_j t_{pj}^f \langle X_p^{nn} + X_p^{\bar{n}\bar{n}} \rangle \langle\langle a_j | a_l^+ \rangle\rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{\bar{n}} - \lambda_n)} \\ &+ \sum_{n, \bar{n}=0}^{\infty} \frac{\frac{\hbar}{2\pi} \langle X_p^{nn} + X_p^{\bar{n}\bar{n}} \rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{\bar{n}} - \lambda_n)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Оскільки функції містять компоненти на різних вузлах системи зробимо перетворення Фур'є:

$$\langle\langle a_p | a_l^+ \rangle\rangle = \frac{1}{N} \sum_k e^{i\vec{k}R_{pl}} \langle\langle a | a^+ \rangle\rangle_k,$$

$$\langle\langle a_j | a_l^+ \rangle\rangle = \frac{1}{N} \sum_k e^{i\vec{k}R_{jl}} \langle\langle a | a^+ \rangle\rangle_k,$$

$$t_{pj}^f = \frac{1}{N} \sum_k t_k^f e^{i\vec{k}R_{pj}}. \quad (4.8)$$

Остаточо отримуємо функцію Гріна для фермі частинок:

$$\langle\langle a | a^+ \rangle\rangle_k = \frac{\sum_{n, \bar{n}=0}^{\infty} \frac{\hbar}{2\pi} q(\omega)}{1 - t_k^f \sum_{n, \bar{n}=0}^{\infty} q(\omega)}, \quad (4.9)$$

$$q(\omega) = \frac{\langle X_p^{nn} + X_p^{\bar{n}\bar{n}} \rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{\bar{n}} - \lambda_n)}. \quad (4.10)$$

5. Розрахунок середньої концентрації ферміонів на вузлі ґратки

Обчислимо середню концентрацію ферміонів, для випадку локалізованих на вузлі бозонів, коли $0 < U_{bf} < U_b$, $U_b < \mu_f < 2U_b$. Як показано в роботі [12], на фазовій діаграмі (μ', μ) , при низькій температурі для даного випадку відмінними від нуля можуть бути середні значення операторів Габбарда лише у певних областях цієї діаграми, а на лініях дотику таких областей одночасно декілька таких середніх відмінні від нуля (див. Рис. 2).

Розглянемо випадок для точок на фазовій діаграмі, що знаходяться на лінії, яка розділяє області «2» та «1», де відповідно на

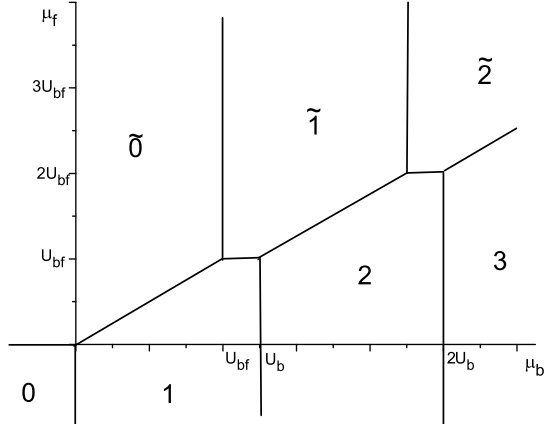


Рис. 2. Фазова діаграма основного стану системи $U_{bb} = 1U_{bf} = 0.8$.

цих областях відмінними від нуля є середні значення операторів: $\langle X^{22} \rangle$ та $\langle X^{\bar{1}\bar{1}} \rangle$. На лінії середні значення цих операторів відмінні від нуля одночасно. В такому разі можемо переписати функцію Гріна (4.9) наступним чином:

$$\langle\langle a|a^+ \rangle\rangle_k = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{\frac{\langle X^{\bar{1}\bar{1}} \rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{\bar{1}} - \lambda_1)} + \frac{\langle X^{22} \rangle}{\hbar\omega - (\lambda_2 - \lambda_2)}}{1 - t_k^f \left(\frac{\langle X^{\bar{1}\bar{1}} \rangle}{\hbar\omega - (\lambda_{\bar{1}} - \lambda_1)} + \frac{\langle X^{22} \rangle}{\hbar\omega - (\lambda_2 - \lambda_2)} \right)}. \quad (5.1)$$

При знаходженні полюсів цієї функції (5.1) отримуємо квадратне рівняння, це вказує на те, що ферміонний спектр складається з двох зон, корені якого позначимо: ω_1, ω_2 :

$$\begin{aligned} c &= (\lambda_{\bar{1}} - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_2) + t_k^f(\lambda_2 - \lambda_2)\langle X^{\bar{1}\bar{1}} \rangle + t_k^f(\lambda_{\bar{1}} - \lambda_1)\langle X^{22} \rangle, \\ b &= -t_k^f\langle X^{\bar{1}\bar{1}} \rangle - t_k^f\langle X^{22} \rangle - (\lambda_{\bar{1}} - \lambda_1) - (\lambda_2 - \lambda_2), \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$D = b^2 - 4c,$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}. \quad (5.3)$$

Прийmemo $\hbar = 1$, ω_1 і ω_2 є функції від t_k^f , $t_k^f \in [-W_f, W_f]$, де W_f є ширина зони для ферміонів. Спектральна густина буде рівна:

$$A(\omega)_k = 2\text{Im} \langle\langle a|a^+ \rangle\rangle_k, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} A(\omega)_k &= \frac{[\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)]}{\omega_1 - \omega_2} \left\{ \left[\omega - (\lambda_2 - \lambda_2) \right] \langle X^{\bar{1}\bar{1}} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle X^{22} \rangle \left[\omega - (\lambda_{\bar{1}} - \lambda_1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Тоді середня концентрація ферміонів на вузлі буде:

$$n^f = \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\omega)_k d\omega}{e^{\beta\omega} + 1}. \quad (5.6)$$

Перейдемо від суми по k до інтегрування, використавши напівеліптичну функцію:

$$\rho(t) = \frac{2}{\pi W_f^2} \sqrt{W_f^2 - t^2}. \quad (5.7)$$

Остаточно концентрація ферміонів на вузлі буде рівна:

$$n^f = \int_{-W_f}^{W_f} \frac{\rho(t)}{\omega_1 - \omega_2} \left(\frac{f(w_1)}{e^{\beta\omega_1} + 1} - \frac{f(w_2)}{e^{\beta\omega_2} + 1} \right) dt \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} f(w_1) &= \left[\omega_1 - (\lambda_2 - \lambda_2) \right] \langle X^{\bar{1}\bar{1}} \rangle \\ &\quad + \left[\omega_1 - (\lambda_{\bar{1}} - \lambda_1) \right] \langle X^{22} \rangle, \\ f(w_2) &= \left[\omega_2 - (\lambda_2 - \lambda_2) \right] \langle X^{\bar{1}\bar{1}} \rangle \\ &\quad + \left[\omega_2 - (\lambda_{\bar{1}} - \lambda_1) \right] \langle X^{22} \rangle, \end{aligned} \quad (5.9)$$

Розглянемо тепер точки на фазовій діаграмі, які знаходяться на прямій, що розділяє області «2» та « $\bar{2}$ », де відмінними від нуля є середні значення операторів: $\langle X^{22} \rangle$, $\langle X^{\bar{2}\bar{2}} \rangle$, причому $\langle X^{22} \rangle + \langle X^{\bar{2}\bar{2}} \rangle = 1$. Таким чином, функція Гріна (4.9) перепишеться:

$$\langle\langle a|a^+ \rangle\rangle_k = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\omega - (\lambda_2 - \lambda_2) - t_k^f}. \quad (5.10)$$

Спектральна густина буде рівною:

$$A(\omega)_k = \delta \left[\omega - (\lambda_2 - \lambda_2) - t_k^f \right]. \quad (5.11)$$

І аналогічно до попереднього прикладу, за формулами (5.6), та (5.7) обчислимо середню концентрацію ферміонів на вузлі для даних умов:

$$n^f = \int_{-W_f}^{W_f} \rho(t) \frac{dt}{e^{\beta(\lambda_2 - \lambda_2 + t)} + 1}. \quad (5.12)$$

6. Числові розрахунки фазових діаграм, спектрів бозе та фермі частинок

Розрахуємо, виходячи з функції Гріна (3.13) області існування надплинної фази та фази моттівського діелектрика. Фазовий перехід з моттівського діелектрика в надплинну фазу характеризує розбіжність функції Гріна $\langle\langle b|b^+ \rangle\rangle_{k=0} \rightarrow \infty$, що призводить до рівняння:

$$1 = t_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \langle X_p^{nn} - X_p^{n+1n+1} \rangle}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} + \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \frac{(\tilde{n}+1) \langle X_p^{\tilde{n}\tilde{n}} - X_p^{\tilde{n}+1\tilde{n}+1} \rangle}{\lambda_{\tilde{n}+1} - \lambda_{\tilde{n}}} \right] \quad (6.1)$$

Побудуємо фазову діаграму в площині (μ_b, W_b) $-W_b < t_b^b < W_b$ в режимі фіксованої концентрації ферміонів. Потрібні в виразі для функції Гріна середні значення операторів Габбарда обраховуємо за формулами (2.11), (2.12). Хімпотенціал визначаємо з рівняння (2.10) при фіксованій концентрації ферміонів. Побудуємо спектри частинок в фазі моттівського діелектрика, зображених точками на фазовій діаграмі (див. Рис. 3). Числами n позначені переходи: $\lambda_{n+1} - \lambda_n$, а \tilde{n} переходи: $\lambda_{\tilde{n}+1} - \lambda_{\tilde{n}}$, що відповідають зміні енергії системи при попаданні на вузол бозона. При низькій температурі, близької до абсолютного нуля, точки А і В попадають на діаграмі основного стану (Рис.2) на лінію, що розділяє області: «1» та «2», а точка С на лінію, що розділяє області «2» та «2».

З спектрів, зображених на (Рис. 3) можна зауважити, що наявність на вузлах ферміонів приводить до розщеплення зони фази моттівського діелектрика, порівняно з випадком відсутності в системі ферміонів. При низькій температурі дисперсія спостерігатиметься тільки в тих спектральних лініях, яким відповідають полюси, що містять відмінні від нуля середні значення операторів Габбарда, та відмінну від нуля статистичну вагу зон. Для точки А, що знаходиться на лінії фазової діаграми, одна з спектральних ліній занулюється посередині зони Брілюена, отже там спостерігається фазовий перехід.

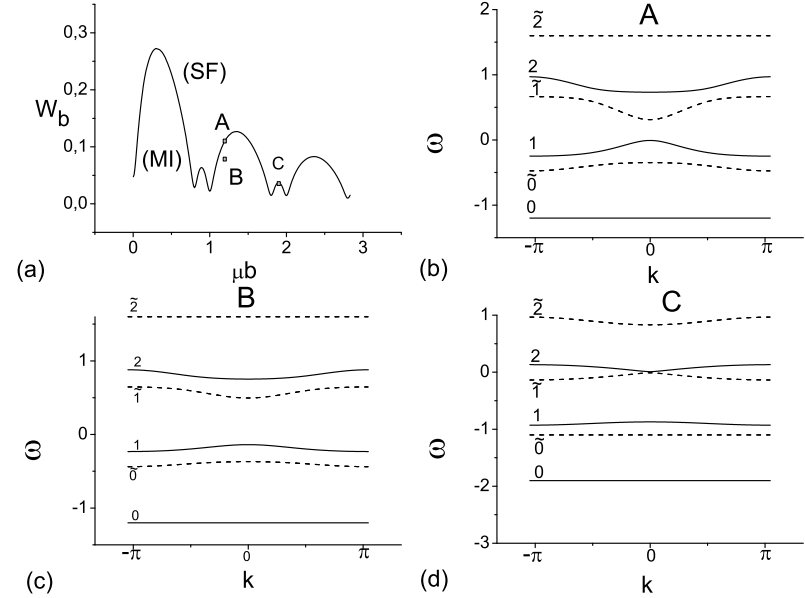


Рис. 3. а) Фазова діаграма при фіксованій концентрації фермічастинок. б), с), d) Спектри бозе-частинок в умовах зображених точками на фазовій діаграмі $T = 0.01, n_f = 0.6, U_{bb} = 1, U_{bf} = 0.8$.

В точці В, яка знаходиться в фазі Моттівського діелектрика, спостерігається менше виражена дисперсія, жодна лінія не занулюється. В точці С спостерігається занулення одразу двох ліній посередині зони Брілюена, внаслідок симетричного розташування відносно розщепленої зони.

Розрахуємо аналогічним чином фазову діаграму та спектри бозе-частинок для режиму фіксованого хімічного потенціалу ферміонів (див. Рис. 4). Фазова діаграма, в областях малих значень хімічного потенціалу бозонів, зазнає деякого відхилення порівняно з випадком відсутності ферміонів [12], проте зі збільшенням хімічного потенціалу бозонів воно зникає, це говорить про те, що система вже не відчуває ферміонів. При низькій температурі виражена дисперсія буде спостерігатися тільки в двох лініях, оскільки в даній точці фазової діаграми тільки два полюси містять середні значення операторів Габбарда, що не прямують до нуля, та статистична вага зон яких відмінна від нуля. Точки А і В при низькій температурі на діаграмі основного стану попадають в область «1», а точка С в область «2»

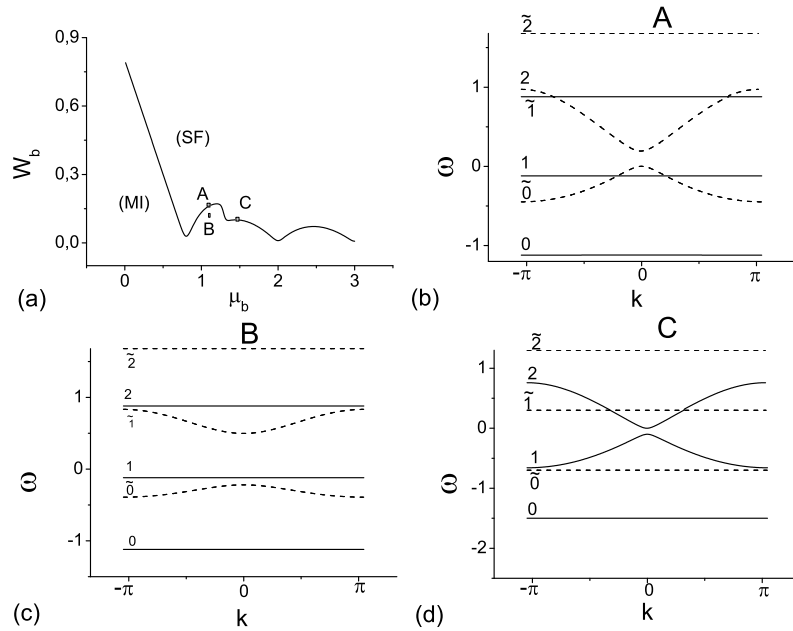


Рис. 4. а) Фазова діаграма при фіксованому хімічному потенціалі фермі-частинок. б), с), d) Спектри бозе-частинок в умовах, зображених точками на фазовій діаграмі $T = 0.015, \mu_f = 1.1, U_{bb} = 1, U_{bf} = 0.8$.

(Рис. 2). Аналогічно до попереднього випадку для точок, що знаходяться на лінії фазової діаграми спостерігається занулення однієї з ліній посередині зони Брілюена. Як можна було зауважити: на (Рис. 3) в режимі фіксованої концентрації ферміонів чотири лінії зазнають дисперсії, а на (Рис. 4) в режимі фіксованого хімпотенціалу ферміонів тільки дві. Це відбувається тому, що в цих двох випадках є різними середні значення операторів Габбарда та відповідні статистичні ваги зон відмінні від нуля.

Розрахуємо спектри фермі-частинок, використовуючи функцію Гріна для локалізованих на вузлах бозонах в режимі фіксованої концентрації ферміонів, $-W_f < t_k^f < W_f$, середні значення операторів Габбарда обчислюємо за формулами (2.11), (2.12), хімпотенціал ферміонів визначаємо з рівняння (2.10) при фіксованому значенні концентрації.

Числами n позначено лінії, яким відповідають переходи: $\lambda_{\bar{n}} - \lambda_n$,

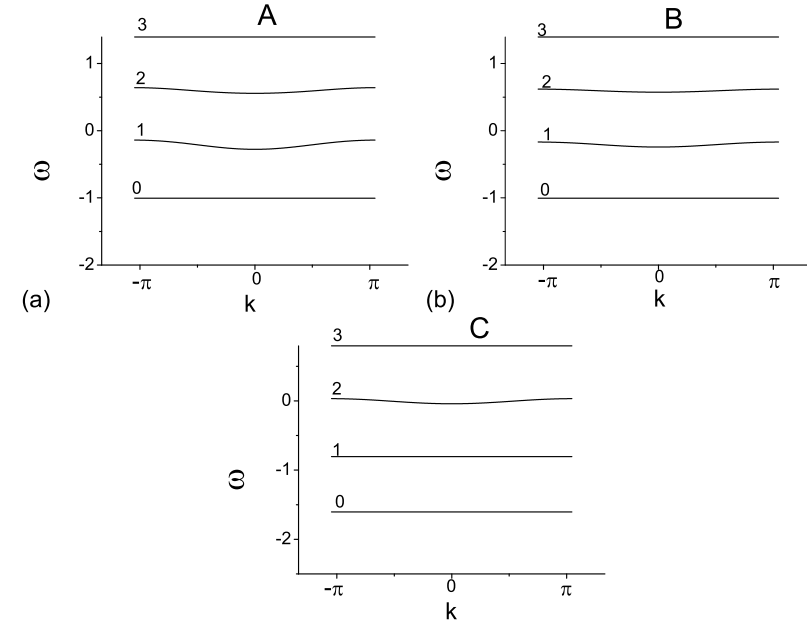


Рис. 5. Спектри фермі частинок (хімпотенціал бозонів взятий в умовах зображених точками на фазовій діаграмі Рис. 3а) $T = 0.01, n_f = 0.6$. Для точки А $W_f = 0, 112$. Для В $W_f = 0, 07$. Для С $W_f = 0, 036$.

що відповідають зміні енергії системи при попаданні на вузол ферміона (див. Рис 5). Дисперсія виражено спостерігається тільки на двох лініях для точок А, В, що відповідають полюсам функції Гріна, в яких середні значення операторів Габбарда та відповідні статистичні ваги зон не прямують до нуля при низькій температурі. На діаграмі основного стану (Рис. 2) ці точки знаходяться на лінії, що розмежує області «2» і «1̄» (де відмінні від нуля відповідні середні значення операторів $\langle X^{\bar{1}\bar{1}} \rangle, \langle X^{22} \rangle$). При переході з області «2» в область «1̄» на фазовій діаграмі відбувається знищення бозона і поява ферміона. Та для точки С дисперсія спостерігається тільки на одній кривій. На діаграмі основного стану (Рис. 2) ця точка знаходиться на лінії, що розмежує області «2» і «2̄» (де відмінні від нуля середні значення операторів $\langle X^{\bar{2}\bar{2}} \rangle, \langle X^{22} \rangle$). При переході з області «2» в область «2̄» на фазовій діаграмі відбувається поява ферміона, число бозонів на вузлі не змінюється. На графіках хімічний потенціал ферміонів відповідає для точок А, В $-1.049U_{bb}$, а для С $-1.6U_{bb}$.

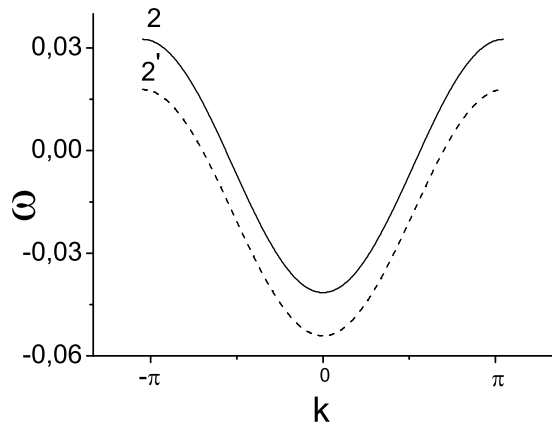


Рис. 6. Зсув кривих дисперсії для точки С $U_{bb} = 1; U_{bf} = 0.8$.

На (Рис. 6) показано зсув дисперсійної кривої для точки С у випадку використання формули (5.12) при розрахунку кривизни. Числами n позначені переходи $\lambda_{\bar{n}} - \lambda_n$, де хімічний потенціал ферміонів визначений з формули (2.10), на графіку енергетична крива зображена суцільною лінією. Числами n' ці ж переходи, де хімічний потенціал визначається з формули (5.12), на графіку зображується штриховою лінією. Як можна побачити, при визначенні хімічного потенціалу ферміонів з більш точного рівняння (5.12) він зазнає відхилення порівняно з наближенням (2.10), що впливає на зсув кривої дисперсії (при знаходженні ферміонного хімічного потенціалу з формули (5.12) він буде рівний: $\mu_f = 1.618U_{bb}$). Для точки А, при знаходженні хімпотенціалу з рівняння (5.8), вигляд дисперсійної кривої практично не змінився.

Побудуємо аналогічним чином, використовуючи функцію Гріна (4.9) в режимі фіксованого хімічного потенціалу ферміонів. $-W_f < t_k^f < W_f$. Як бачимо на графіках з (Рис. 6), при низькій температурі тільки одна лінія зазнає дисперсії, оскільки згідно з формули (4.9)– при низьких температурах для появи дисперсії потрібно щоб $\langle X^{nn} \rangle$ або $\langle X^{\bar{n}\bar{n}} \rangle$ були відмінні від нуля. На діаграмі основного стану (Рис. 2) точки А, В знаходяться в області «1» (де відмінні від нуля середнє значення оператора $\langle X^{\bar{1}\bar{1}} \rangle$), а точка С в області «2» (відмінні від нуля середнє значення оператора $\langle X^{22} \rangle$). Ферміонна концентрація для точок А і В рівна: $n_f = 1$, для точки С: $n_f = 0$

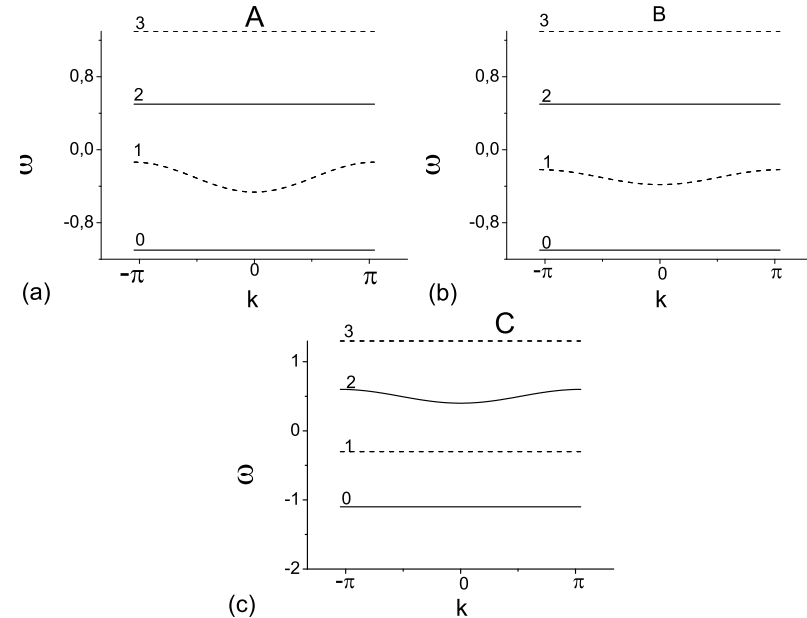


Рис. 7. Спектри фермі чатинок (хімпотенціал бозонів взятий в умовах зображених точками на фазовій діаграмі Рис. 4а) $T = 0.015$, $\mu_f = 1.1$. Для точки А $W_f = 0,163$. Для В $W_f = 0,115$. Для С $W_f = 0,102$.

7. Висновок

В цій роботі ми розглянули фазові переходи в моделі Бозе-Фермі-Габбарда при низькій температурі, використали формалізм операторів Габбарда, що діють на одновузлові стани. Розрахували бозонну функцію Гріна, в випадку локалізованих на вузлах ферміонів, та ферміонну функцію Гріна в випадку локалізованих на вузлах бозонів. Побудовано фазові діаграми (щодо областей існування надплинної фази та фази моттівського діелектрика) при низькій температурі в режимах фіксованої ферміонної концентрації на вузлі та режимі фіксованого хімічного потенціалу ферміонів. Для точок з фази моттівського діелектрика побудовано бозонні та ферміонні спектри відповідно до знайдених функцій Гріна. Використовуючи знайдену функцію Гріна фермі-частинок, при локалізованих на вузлах бозонів, обчислили середню концентрацію ферміонів на вузлі, що дало

змогу покращити розрахунок спектрів ферміонів в режимі фіксованої їхньої концентрації.

Література

1. J.P.R. Hubbard, Soc.Lond.A Mat., 1965, **285**, 542.
 2. G. l. Greiner, et. al., Nature 2002, **39**, 415.
 3. S.J.H. Petra, P. Sjolund, A. Kastberg, J. Opt. A8, 2006, **381-385**, 0512150.
 4. T. Paiva, R.Scalettar, M. Randeria, N. Trivedi, arXiv:0906.2141.
 5. Z. Lin, J. Zhang, Y. Jiang, arXiv:1112.4161.
 6. M. Iskin and J. K. Freericks, Phys.Rev. A, 2009, **80**, 053623.
 7. A. Albus, F. Illuminati, J. Eisert, Phys. Rev. A, 2003, **68**, 023606.
 8. H. Fehrmann, M. A. Baranov, B. Damski, M. Lewenstein, and L. Santos, Phys. Rev. Lett., 2004, **92**, 050401.
 9. M. Lewenstein, L. Santos, M. A. Baranov, H. Fehrmann, Phys. Rev. Lett., 2004, **92**, 050401.
 10. T. Tomoyose, J Phys. Soc. Jpn, 1997, **66**, 2383.
 11. G. D. Mahan, Phys. Rev. B., 1976,**14**, 780.
 12. I.V. Stasyuk, T.S. Mysakovych, V.O.Krasnov, Condens. Matter Phys., 2010, **13**, 13003.
-

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN: Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences; ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services; INSPEC; "Referatyvnyj Zhurnal"; "Dzherelo".

EDITOR IN CHIEF: Ihor Yukhnovskii.

EDITORIAL BOARD: T. Arimitsu, *Tsukuba*; J.-P. Badiali, *Paris*; B. Berche, *Nancy*; T. Bryk (Associate Editor), *Lviv*; J.-M. Caillol, *Orsay*; C. von Ferber, *Coventry*; R. Folk, *Linz*; L.E. Gonzalez, *Valladolid*; D. Henderson, *Provo*; F. Hirata, *Okazaki*; Yu. Holovatch (Associate Editor), *Lviv*; M. Holovko (Associate Editor), *Lviv*; O. Ivankiv (Managing Editor), *Lviv*; Ja. Ilnytskyi (Assistant Editor), *Lviv*; N. Jakse, *Grenoble*; W. Janke, *Leipzig*; J. Jedrzejewski, *Wroclaw*; Yu. Kalyuzhnyi, *Lviv*; R. Kenna, *Coventry*; M. Korynevskii, *Lviv*; Yu. Kozitsky, *Lublin*; M. Kozlovskii, *Lviv*; O. Lavrentovich, *Kent*; M. Lebovka, *Kyiv*; R. Lemanski, *Wroclaw*; R. Levitskii, *Lviv*; V. Loktev, *Kyiv*; E. Lomba, *Madrid*; O. Makhnety, *Chernivtsi*; V. Morozov, *Moscow*; I. Mryglod (Associate Editor), *Lviv*; O. Patsahan (Assistant Editor), *Lviv*; O. Pizio, *Mexico*; N. Plakida, *Dubna*; G. Ruocco, *Rome*; A. Seitsonen, *Zürich*; S. Sharapov, *Kyiv*; Ya. Shchur, *Lviv*; A. Shvaika (Associate Editor), *Lviv*; S. Sokolowski, *Lublin*; I. Stasyuk (Associate Editor), *Lviv*; J. Strečka, *Košice*; S. Thurner, *Vienna*; M. Tokarchuk, *Lviv*; I. Vakarchuk, *Lviv*; V. Vlachy, *Ljubljana*; A. Zagorodny, *Kyiv*

CONTACT INFORMATION:

Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2761978; Fax: +38(032)2761158
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua <http://www.icmp.lviv.ua>