

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-20-06U

О.Р. Баран

ЕФЕКТ ПОТОКУ ЕНЕРГІЇ У ОДНОВИМІРНІЙ
СПІН-1/2 XX МОДЕЛІ МАГНЕТОЕЛЕКТРИКА.
МЕТОД МНОЖНИКА ЛАГРАНЖА

УДК: 548:573.611.4

PACS: 75.10.Jm

Ефект потоку енергії у одновимірній спіні-1/2 XX моделі магнетоелектрика. Метод множника Лагранжа

О.Р. Баран

Анотація. Для дослідження нерівноважних стаціонарних станів з потоком енергії одновимірної спіні-1/2 XX моделі магнетоелектрика з механізмом Касаури-Нагаоси-Балацького при температурах близьких до нуля використано метод множника Лагранжа. З допомогою перетворення Йордана-Вігнера задача зводиться до гамільтоніану невзаємодіючих безспінових ферміонів і може бути розв'язаною точно. Побудовано ряд фазових діаграм та розраховано залежності намагніченості та електричної поляризації від магнітного та електричного полів, а також і від потоку енергії, і від поля, яке генерує цей потік.

Energy current effect in the one-dimensional spin-1/2 XX model of the magnetoelectric. Lagrange multiplier method

O.R. Baran

Abstract. The Lagrange multiplier method is used for the investigation of a nonequilibrium steady state with the energy current in the one-dimensional spin-1/2 XX model of a magnetoelectric with the Katsura-Nagaosa-Balatsky mechanism at temperatures close to absolute zero. Within the Jordan-Wigner transformation the Hamiltonian is reduced to a free-fermion form, and can be solved exactly. We construct the phase diagrams and obtain the dependencies of magnetization and electric polarization on the magnetic and electric fields as well as on the energy current and the field, which drives this current.

Подається в Журнал фізичних досліджень
Submitted to Journal of Physical Studies

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Остап Романович Баран

ЕФЕКТ ПОТОКУ ЕНЕРГІЇ У ОДНОВИМІРНІЙ СПІН-1/2 XX МОДЕЛІ
МАГНЕТОЕЛЕКТРИКА. МЕТОД МНОЖНИКА ЛАГРАНЖА

Роботу отримано 27 листопада 2020 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом теорії модельних спінових систем

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

1. Вступ

В сучасній статистичній фізиці значна увага приділяється теоретичному вивченню нерівноважних стаціонарних процесів різної природи у різноманітних системах та моделях. Зокрема особливості нерівноважних стаціонарних станів (НРСС) досліджувались у рідинах та флюїдах [1, 2]; системі частинок різної маси у одновимірному боксі, які взаємодіють лише через еластичне зіткнення [3]; нерівноважній спін-бозонній моделі (скінченна система невзаємодіючих спінів, яка під'єднана до бозонних резервуарів з різними температурами) [4, 5]; моделях ґраткового газу [1, 6–8]; системі електрон-дірка-фотон [9]; скінченній квантовій системі взаємодіючих частинок під'єднаних до електродів, які є одночасно і термостатами [10]; квантовій дротині [11]; моделі зв'язаних гармонічних осциляторів, крайні із яких під'єднані до термостатів із різними температурами [5]; системі, у якій квантова точка поміщена між металом і надпровідником або феромагнітними контактами з протилежними поляризаціями [12]; XX ланцюжку у поперечному полі під'єднаному до квантоких резервуарів невзаємодіючих спінів, які мають різну температуру [13]; спінових моделях із взаємодіями між найближчими сусідами та з потоком енергії [14–27] або спіновим струмом [15, 21, 28–30]; спрощеній моделі системи невзаємодіючих електронів {одновимірний ланцюжок ферміонів, який складається із трьох частин (центральної та двох металічних термостатів), кожна із яких знаходиться у рівноважному стані та описується великими канонічними ансамблями із різними температурами та хімічними потенціалами і окрім того враховується зв'язок центральної системи із термостатами} [5]. Слід зауважити, що основною особливістю НРСС є наявність постійного потоку якоїсь фізичної величини (енергії, магнітного моменту, заряду тощо).

Для одновимірних квантових систем існує декілька методів дослідження НРСС. Зокрема в роботах [23–25] нерівноважну систему з потоком енергії, який індукований різними температурами T_1 та T_2 двох частин ланцюжка, інтерпретували з допомогою ефективного гамільтоніану як стаціонарну систему (якщо обидві T_i є ненульовими), або ж як систему, що знаходиться у основному стані (якщо якась одне $T_i = 0$). В роботах [11, 14–20] використовували метод множника Лагранжа, у якому стан стимульований потоком може бути наближено згенерований як основний стан ефективного гамільтоніану $\mathcal{H} - \lambda \mathcal{J}$ (до гамільтоніану \mathcal{H} системи, яка розглядається, додається член пропорційний до оператора потоку \mathcal{J}). Цей метод ґрунтується на тому, що коли потік є інтегралом руху $[\mathcal{H}, \mathcal{J}] = 0$, тоді стаціонарний стан

можна описати в межах узагальненого ансамблю Гібса [31, 32]. Слід наголосити, що для систем у нерівноважному стаціонарному стані, у яких потік енергії індукований термостатами із різними температурами, метод множника Лагранжа доцільно реалізовувати лише коли ці температури є низькими і коли їх різниця є малою [16].

Зупинимося коротко на основних результатах дослідження властивостей НРСС у одновимірних спінових моделях з потоком енергії. В роботах [14, 15] основна увага зосереджена на дослідженні парних кореляційних функцій у одновимірній моделі Ізінга та XX моделі, причому обидві в поперечному полі. Встановлено, що в станах, коли має місце потік енергії, кореляції загасають із відстанню між вузлами за степеневим законом. У [15] також показано, що у НРСС загасання xx парної кореляційної функції відбувається швидше, аніж у стані, коли потік енергії є відсутнім. В роботі [16] встановлено, що у одновимірній XX моделі з включенням потоку енергії відбувається перерозподіл інтенсивності xx динамічного структурного фактора при низьких частотах від краю зони Бріллюена в напрямку до її центра. Нагадаємо, що зроблені висновки у [14–16] стосуються лише випадку дуже низьких температур, оскільки дослідження проводились на основі методу множника Лагранжа. У роботах [24, 25], використовується метод, у якому немає обмежень на температури частин ланцюжка. В [24] показано, що у XX моделі у поперечному полі при низьких температурах xx кореляційна функція загасає із відстанню за степеневим законом. При високих ж температурах ця кореляційна функція загасає експоненційно на великих відстанях і степеневе на малих. У [25] вивчається ефект Казимира у квантовому спіновому ланцюжку з двома магнітними домішками у НРСС. Встановлено, що сила Казимира загасає експоненційно зі збільшенням відстані між цими домішками.

Окремо згадаємо також про роботи [33–36], у яких розглядають системи із потоком енергії з використанням методу множника Лагранжа, проте які не мають прямого відношення до дослідження нерівноважних стаціонарних процесів. Так у [33] вивчаються властивості основного стану трикубітної одновимірної XX моделі в поперечному полі при наявності потоку енергії. У [34] досліджують квантову заплутаність двох кубітів, які взаємодіють із XU ланцюжком з потоком енергії. У [35] вивчають, як впливає наявність потоку енергії на переміщення квантового стану у XX моделі в однорідному поперечному полі. Ця робота, так само як і дві попередні, має стосунок до квантових комп'ютерів. У [36] розглядають одновимірну узагальнену модель компаса, у якій потік енергії є інтегралом руху лише

у часткових випадках. Вивчається вплив на фізичні характеристики тричастинкових взаємодій, а також взаємодії Дзялошинського-Морія.

У своєму дослідженні в рамках методу множника Лагранжа ми вивчимо вплив потоку енергії а також поля, яке генерує цей потік, на характеристики основного стану одновимірної спін-1/2 ізотропної XU моделі магнетоелектрика в електричному та в поперечному магнітному полях. Пов'язаність локалізованих спінів (магнітних моментів) із електричною поляризацією зв'язка у розглянутій моделі описується механізмом Кацури-Нагаоши-Балацького [37, 38] (див. також огляд [39]), в якому поляризація виникає внаслідок зміщення йона ліганда, який знаходиться поміж двома магнітними йонами, причому між цими магнітними частинками має місце надобмінна взаємодія. Цей механізм ґрунтується на твердженні, що поляризація на зв'язку між двома магнітними йонами пропорційна до спінового струму між ними, який у операторній формі для ряду спінових моделей має вигляд взаємодії Дзялошинського-Морія. У зв'язку з цим такі моделі магнетоелектрика ще часто називають моделями магнітного потоку або інверсної взаємодії Дзялошинського-Морія. Основна увага у нашій праці буде зосереджена на аналізі фазових діаграм та залежностей електричної поляризації ланцюжка від полів та потоку енергії.

2. Одновимірна спін-1/2 XX модель магнетоелектрика

Будемо розглядати одновимірну спін-1/2 ізотропну XU модель магнетоелектрика в електричному полі перпендикулярному до осі z та в поперечному магнітному полі ($\mathbf{h} = (0, 0, h)$), у якій пов'язаність локалізованих спінів із електричною поляризованістю зв'язка, що з'єднує ці спіни, описується механізмом Кацури-Нагаоши-Балацького [37]. Вибрана таким чином конфігурація полів забезпечує інтегровність задачі. Гамільтоніан досліджуваного нами магнетоелектрика має вигляд [40–42]:

$$\mathcal{H}^{\text{ME}} = J \sum_{j=1}^N \left(S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y \right) - h \sum_{j=1}^N S_j^z - \sum_{j=1}^N \mathbf{E} \cdot \mathbf{p}_{j,j+1}. \quad (2.1)$$

Тут h – зовнішнє поперечне магнітне поле; J – надобмінна взаємодія; \mathbf{E} – зовнішнє електричне поле, що лежить в $x - y$ площині; $\mathbf{p}_{j,j+1} = \gamma \mathbf{e}_{j,j+1} \times \mathbf{S}_j \times \mathbf{S}_{j+1}$ – електрична поляризація зв'язка, що з'єднує

спіні \mathbf{S}_j та \mathbf{S}_{j+1} , де $\mathbf{e}_{j,j+1}$ – одиничний вектор орієнтований від j -го до $(j+1)$ -го вузла, а γ – коефіцієнт, який пов'язує електричну поляризацію із оператором спінового потоку. Зауважимо також, що осі x, y, z простору та спінового простору співпадають, а ланцюжок лежить вздовж осі x .

Оскільки у нашій задачі електричне поле перпендикулярне до осі z , й окрім того $\mathbf{e}_{j,j+1} = (1, 0, 0)$, то гамільтоніан (2.1) можна переписати у такому простому вигляді:

$$\mathcal{H}^{\text{ME}} = \sum_{j=1}^N \left[J \left(S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y \right) - h S_j^z - \gamma E \left(S_j^y S_{j+1}^x - S_j^x S_{j+1}^y \right) \right]. \quad (2.2)$$

Тут записаний явно оператор y компоненти електричної поляризації зв'язка $p_{j,j+1} \equiv \gamma(S_j^y S_{j+1}^x - S_j^x S_{j+1}^y)$, а E є y компонентою електричного поля. Слід зауважити, що в гамільтоніані (2.2) відсутня x компонента поля \mathbf{E} . Це пов'язано з тим, що відповідна x компонента поляризації зв'язка $\mathbf{p}_{j,j+1}$ дорівнює нулеві через умову $\mathbf{e}_{j,j+1} = (1, 0, 0)$. Тому можна було з самого початку, як і в роботі [41], обмежитися випадком, коли електричне поле напрямлене вздовж осі y ($\mathbf{E} = (0, E, 0)$).

3. Нерівноважні стаціонарні стани

Для вивчення нерівноважних станів магнетоелектрика (2.2) із стаціонарним потоком енергії можна застосувати метод множника Лагранжа λ для квантових систем [14–20]. При нульовій температурі такий стаціонарний стан відповідає стану з найменшою енергією для моделі (2.2) із заданим потоком енергії. Таким чином, потрібно розрахувати основний стан такого ефективного гамільтоніану:

$$\mathcal{H}^{\mathcal{E}} = \mathcal{H}^{\text{ME}} - \lambda \mathcal{J}^{\mathcal{E}}. \quad (3.1)$$

Тут $\mathcal{J}^{\mathcal{E}}$ – макроскопічний потік енергії, а множник Лагранжа λ є ефективним полем, яке керує цим потоком.

Локальні потоки енергії $J_j^{\mathcal{E}}$, сума яких дає макроскопічний потік ($\mathcal{J}^{\mathcal{E}} = \sum_{j=1}^N J_j^{\mathcal{E}}$), отримуються із рівнянь неперервності [14, 43–45]

$$\frac{dH_j^{\text{ME}}}{dt} = i[\mathcal{H}^{\text{ME}}, H_j^{\text{ME}}] = -\text{div} J_j^{\mathcal{E}} = J_{j-1}^{\mathcal{E}} - J_j^{\mathcal{E}}, \quad (3.2)$$

де H_j^{ME} – оператор локальної енергії, причому ми поклали $\hbar = 1$. У даній задачі цей оператор може бути вибраний так:

$$H_j^{\text{ME}} = J \left(S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y \right) - h S_j^z - \gamma E \left(S_j^y S_{j+1}^x - S_j^x S_{j+1}^y \right). \quad (3.3)$$

Зауважимо, по-перше, що це не єдиний спосіб вибору оператора локальної енергії, який забезпечує виконання рівняння неперервності (3.2), а також, по-друге, що вибір H_j^{ME} , якщо він коректний (забезпечує виконання (3.2)), не впливає на кінцевий результат для макроскопічного потоку енергії.

На основі (3.2) та (3.3) отримуємо оператор локального потоку енергії:

$$\begin{aligned} J_j^{\mathcal{E}} = & -h\gamma E (S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y) - hJ (S_j^y S_{j+1}^x - S_j^x S_{j+1}^y) \\ & - 2J\gamma E (S_j^x S_{j+1}^x S_{j+2}^x + S_j^y S_{j+1}^y S_{j+2}^y) \\ & + (J^2 - \gamma^2 E^2) (S_j^x S_{j+1}^z S_{j+2}^x - S_j^y S_{j+1}^z S_{j+2}^y). \end{aligned} \quad (3.4)$$

4. Перетворення Йордана-Вігнера

Застосуємо для ефективного гамільтоніану (3.1) одновимірне перетворення Йордана-Вігнера [46, 47] для операторів $S_j^{\pm} = S_j^x \pm iS_j^y$, яке у випадку спіна $S = 1/2$ має такий простий вигляд

$$S_j^+ = \prod_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}_i c_j^{\dagger}, \quad S_j^- = \prod_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}_i c_j. \quad (4.1)$$

Тут $\mathcal{P}_i = (1 - 2n_i) = -2S_i^z$ – проєкційний оператор, c_i^{\dagger} та c_i – оператори народження та знищення безспінових ферміонів, а $n_i = c_i^{\dagger} c_i = S_i^+ S_i^-$ – оператор кількості ферміонів. Зрозуміло, що $\{c_i, c_j^{\dagger}\} = \delta_{i,j}$, $\{c_i^{\dagger}, c_j^{\dagger}\} = \{c_i, c_j\} = 0$.

У результаті такої ферміонізації (4.1) приходимо до задачі невзаємодіючих безспінових ферміонів:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\mathcal{E}} = & \sum_{j=1}^N \left[-h \left(c_j^{\dagger} c_j - \frac{1}{2} \right) + \frac{\tilde{J}}{2} \left(c_j^{\dagger} c_{j+1} + c_{j+1}^{\dagger} c_j \right) \right. \\ & + \frac{i\tilde{E}}{2} \left(c_j^{\dagger} c_{j+1} - c_{j+1}^{\dagger} c_j \right) - \frac{\tilde{K}}{4} \left(c_{j-1}^{\dagger} c_{j+1} + c_{j+1}^{\dagger} c_{j-1} \right) \\ & \left. - \frac{i\tilde{R}}{4} \left(c_{j-1}^{\dagger} c_{j+1} - c_{j+1}^{\dagger} c_{j-1} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

де $\tilde{J} = J + \lambda h \gamma E$, $\tilde{E} = \gamma E - \lambda h J$, $\tilde{K} = 2\lambda J \gamma E$, $\tilde{R} = \lambda(\gamma^2 E^2 - J^2)$. Зауважимо, що даний гамільтоніан (4.2) має структуру, аналогічну до задачі, розглянутої в роботі [41].

Після переходу до імпульсного простору

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikj} c_k; & c_j^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-ikj} c_k^\dagger; \\ k &= \frac{2\pi}{N} l; & l &= -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

отримаємо гамільтоніан у діагональному вигляді:

$$\mathcal{H}^\mathcal{E} = \sum_{-\pi \leq k < \pi} \Lambda_k \left(n_k - \frac{1}{2} \right). \quad (4.4)$$

Тут k належить першій зоні Бріллюена, $n_k = c_k^\dagger c_k$, а спектр визначається таким чином:

$$\Lambda_k = -h + \tilde{J} \cos k - \tilde{E} \sin k - \frac{\tilde{K}}{2} \cos(2k) + \frac{\tilde{R}}{2} \sin(2k). \quad (4.5)$$

У термодинамічній границі на основі (4.4) отримаємо вільну енергію з розрахунку на вузол:

$$f = -\frac{k_B T}{N} \ln \left[\text{Tr} \exp \left(-\frac{\mathcal{H}^\mathcal{E}}{k_B T} \right) \right] = -\frac{k_B T}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \ln \left[2 \cosh \frac{\Lambda_k}{2k_B T} \right]. \quad (4.6)$$

Надалі обмежимося випадком $T \rightarrow 0$. На основі (4.6) легко розрахувати енергію основного стану та потік енергії з розрахунку на один вузол:

$$e_0 = \lim_{T \rightarrow 0} f = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk |\Lambda_k|, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}^\mathcal{E} \rangle &= \frac{\langle \mathcal{J}^\mathcal{E} \rangle}{N} = -\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \left[h\gamma E \cos k + hJ \sin k \right. \\ &\quad \left. - J\gamma E \cos(2k) + \frac{\gamma^2 E^2 - J^2}{2} \sin(2k) \right] \text{sgn}(\Lambda_k). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Намагніченість та електричну поляризацію (з розрахунку на один вузол) при нульовій температурі можна отримати зокрема таким чином [оскільки у основному стані $\langle n_k \rangle = 0$ (1) при додатному (від'ємному) значенні Λ_k ; дивись (4.4)]:

$$m \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle S_j^z \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \left(\langle n_k \rangle - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \text{sgn}(\Lambda_k),$$

$$\begin{aligned} p &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle p_{j,j+1} \rangle = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \langle n_k \rangle \sin k \\ &= -\frac{\gamma}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \text{sgn}(\Lambda_k) \sin k. \end{aligned} \quad (4.9)$$

5. Результати числових досліджень

У даному розділі зупинимося на дослідженні залежностей намагніченості та електричної поляризації (ми поклали $\gamma = 1$) від магнітного й електричного полів, а також від потоку енергії при $T \rightarrow 0$. Оскільки:

- поля h та E можна масштабувати абсолютним значенням взаємодії $|J|$, потік енергії з розрахунку на вузол $\langle \mathcal{J}^\mathcal{E} \rangle = \frac{1}{N} \langle \mathcal{J}^\mathcal{E} \rangle$ – значенням J^2 , множник Лагранжа λ – значенням $1/|J|$;
- $\langle \mathcal{J}^\mathcal{E} \rangle$ є парною функцією обох полів та взаємодії, намагніченість – парною функцією E та J і непарною функцією h , а для поляризації при фіксованому потоці енергії мають місце властивості $p(J, h, E) = p(-J, -h, E) = -p(J, -h, -E)$,

то без втрати загальності покладемо $J = 1$ та можемо обмежуватись додатними магнітними полями $h \geq 0$ при довільному E , або ж навпаки – додатними електричними полями $E \geq 0$ при довільному h .

Аналогічно, як і у роботі [15], будемо розрізняти три різні фази безщільної спінової рідини: I – немагнітна ($m = 0$) фаза з чотирма точками Фермі; II та III – магнітовпорядковані ($m \neq 0$) фази з чотирма та двома точками Фермі відповідно. Квантові фазові переходи між цими фазами можуть бути лише другого роду. Нагадаємо (див. наприклад [48–50]), що точками Фермі k_F є значення квазіімпульсу, при яких спектр елементарних збуджень (4.5) дорівнює нулю. Більш детально різницю між магнітовпорядкованими фазами II та III буде висвітлено при аналізі польових залежностей намагніченості та електричної поляризації, а також у додатку.

На Рис. 1–3 представлено фазові діаграми в площинах $(|h|, \langle \mathcal{J}^\mathcal{E} \rangle)$, $(|E|, \langle \mathcal{J}^\mathcal{E} \rangle)$ та $(|E|, |h|)$ відповідно. Рисунок 1 демонструє, як змінюються $(|h|, \langle \mathcal{J}^\mathcal{E} \rangle)$ діаграми зі зміною електричного поля. Вони є якісно однаковими при будь-яких значеннях E і мають топологію аналогічну до приведеної і проаналізованої в роботі [15] для XX -моделі в поперечному магнітному полі. На цих фазових діаграмах наявні

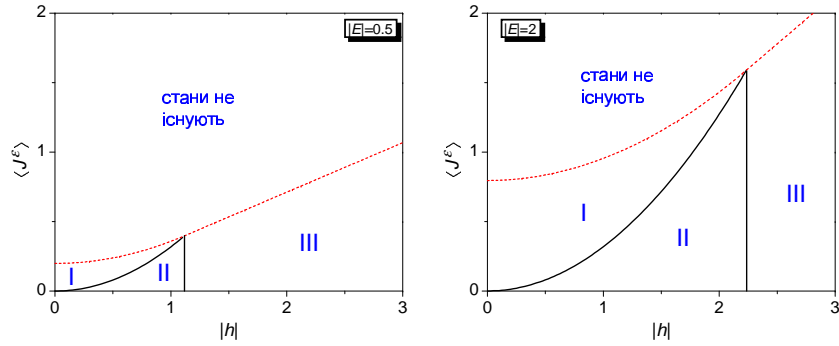


Рис. 1. Фазові діаграми в площині модуль магнітного поля – потік енергії при різних значеннях модуля електричного поля ($|E| = 0.5, 2$). Тут також наведено криві, які відповідають максимально досяжному потоку енергії $\langle J_{max}^{\mathcal{E}} \rangle$, вище яких не існує станів. Діаграму при $E = 0$ можна подивитись у роботі [15], де видно, що перехід між магнітовпорядкованими фазами II та III відбувається при $|h_c^{II \rightarrow III}| = 1$.

усі три фази. Границя між фазами II та III є вертикальним відрізком. Окрім ліній, які відповідають фазовим переходам $I \rightarrow II$ та $II \rightarrow III$, і які сходяться у свого роду «потрійній точці» (ТР), на фазових діаграмах наявні криві максимально досяжного потоку енергії $\langle J_{max}^{\mathcal{E}}(|h|, |E|) \rangle$ (див. також [15]). Вище цих кривих не існує станів (стани із потоком енергії більшим від $\langle J_{max}^{\mathcal{E}} \rangle$ при заданих магнітних та електричних полях не можуть бути реалізованими, що буде продемонстровано у додатку). Слід зауважити, що «потрійна точка» у даній задачі не є класичною потрійною точкою, оскільки лежить на кривій, що окреслює область, де стани не існують.

Для фазових діаграм у площині $(|E|, \langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ існують три різні топології (див. Рис. 2). Так, на діаграмах при $|h| < 1$ лінія (границя) між фазами I та II не перетинається із лінією максимально досяжного потоку, а при $|h| = 1$ ці лінії сходяться в точці $E = 0, \langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 1/\pi$. При $|h| > 1$ на фазових діаграмах, на відміну від розглянутих вище випадків $|h| \leq 1$, наявними є фаза III та «потрійна точка». Ця ТР зі збільшенням $|h|$ зміщується у напрямку більших $|E|$ та $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$. Слід зауважити, що лінії, які відповідають фазовим переходам між фазами II та I (III) є горизонтальними (вертикальними).

Фазові діаграми у площині $(|E|, |h|)$ можуть мати чотири різні топології (див. Рис. 3). При $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle < 1/\pi$ лінії, які розділяють фази I, II та III, не перетинаються, причому лише при $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle < 1/(2\pi)$

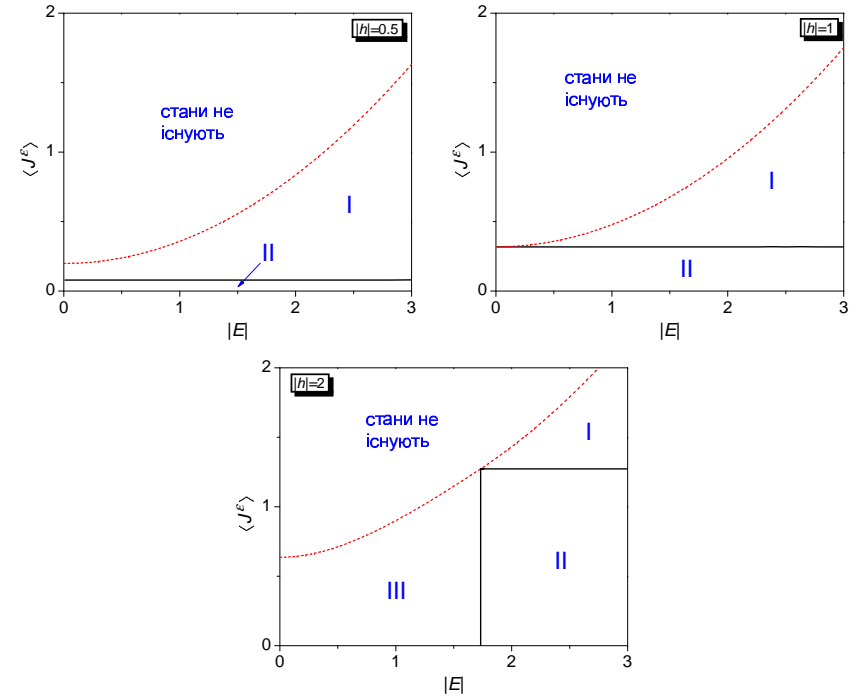


Рис. 2. Фазові діаграми в площині модуль електричного поля – потік енергії при різних значеннях модуля магнітного поля ($|h| = 0.5, 1, 2$). Тут також наведено криві, які відповідають максимально досяжному потоку енергії $\langle J_{max}^{\mathcal{E}} \rangle$, вище яких не існує станів.

на діаграмах немає областей, де не існують стани. У випадку ж $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 1/\pi$ вже існує «потрійна точка» з координатами $(E_{ТР} = 0, |h_{ТР}| = 1)$. Із збільшенням потоку енергії ця «потрійна точка» зміщується в напрямку збільшення як $|E|$, так і $|h|$ (див. Рис. 3 для $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 1/\pi$ та 0.5). Слід зауважити, що координати точки переходу $(E_c^{II \rightarrow III}, h_c^{II \rightarrow III})$ між фазами II та III не залежать від $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ за виключенням того, що при $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle > 1/\pi$ лінія переходів між згаданими фазами бере початок з «потрійної точки». Іншими словами, лінія, яка відповідає фазовим переходам $II \rightarrow III$ при $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.5$, накладається на відповідні лінії при $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.05, 0.2$ та $1/\pi$ (що можна побачити на Рис. 3).

Розглянемо тепер, як поведуть себе намагніченість m та електрична поляризація p зі зміною параметрів моделі h, E та $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$. На Рис.

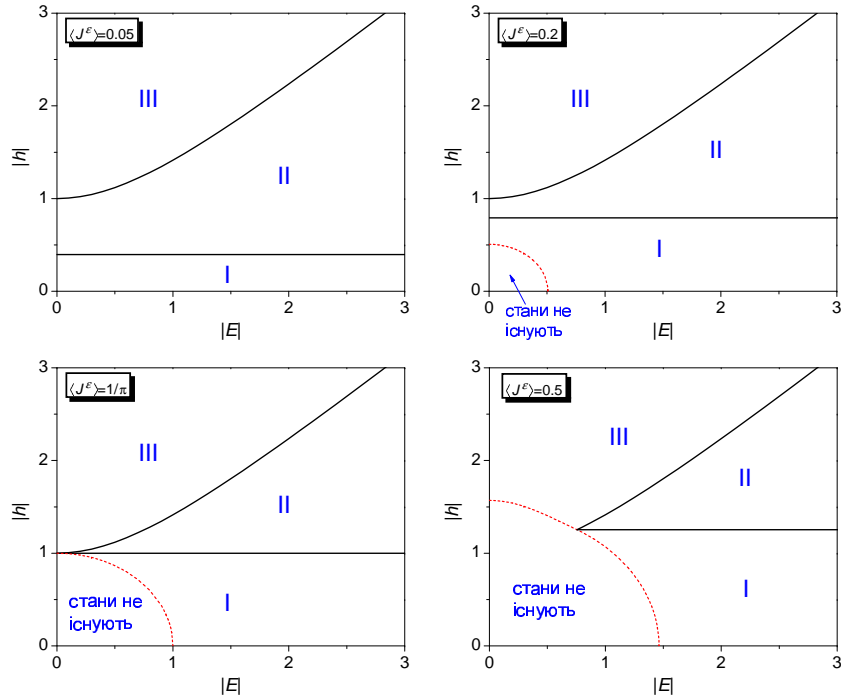


Рис. 3. Фазові діаграми в площині модуль електричного поля – модуль магнітного поля при різних значеннях потоку енергії ($\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.05, 0.2, 1/\pi, 0.5$). Тут також наведено лінії, в кожній точці яких максимально досяжний потік енергії $\langle J_{max}^{\mathcal{E}} \rangle$ дорівнює відповідним заданим потокам $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.2, 1/\pi, 0.5$. Нижче цих ліній не існує станів.

4 – 6 наявні майже усі можливі з точки зору якісної різниці залежності m та p від магнітного та електричного полів, а також від потоку енергії. Слід зразу зауважити, що у своєму дослідженні ми не розглядали випадки, коли хоча б один із параметрів $|h|$, $|E|$ або $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ є безмежно великим. З рисунків добре видно, що у точках фазових переходів і намагніченість, і електрична поляризація мають злами. Лише злами $p(h)$ при переході між фазами II та III у випадках електричних полів близьких до нуля є слабо вираженими (див. Рис 4).

При достатньо малих значеннях потоку енергії (наприклад $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.05$; див. Рис. 1, 3 та 4) в системі зі зміною h має місце каскад чотирьох фазових переходів III \rightarrow II \rightarrow I \rightarrow II \rightarrow III при будь-яких

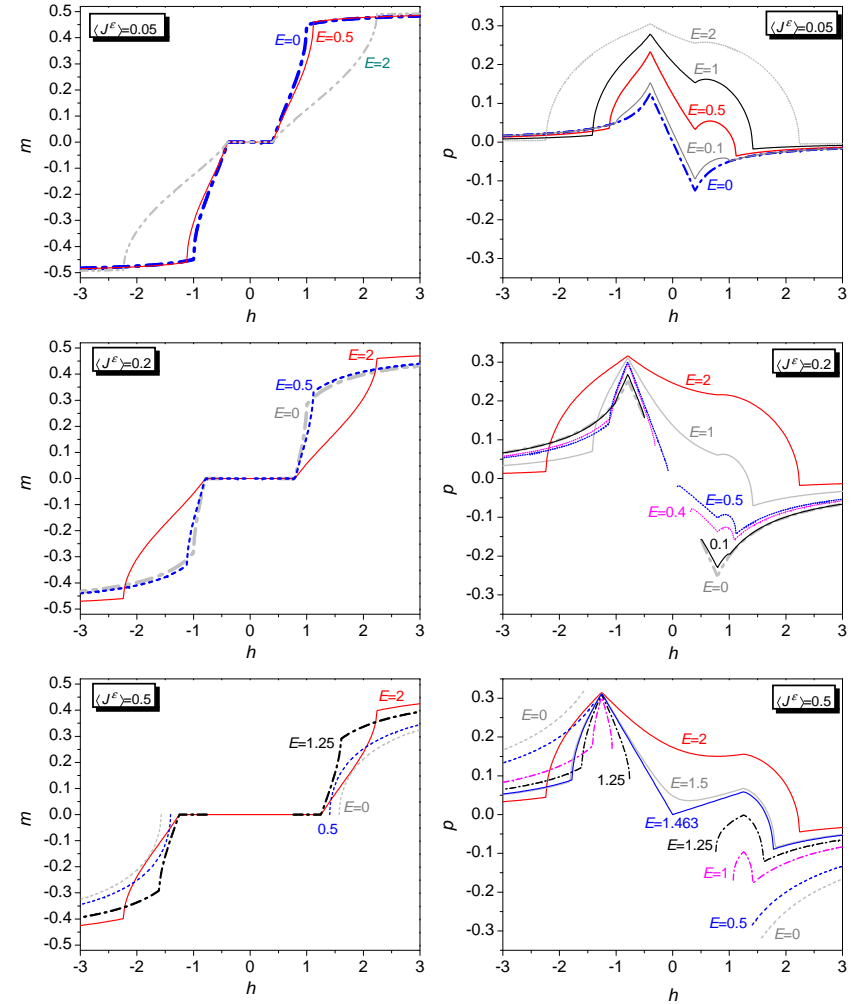


Рис. 4. Залежності намагніченості m та електричної поляризації p від магнітного поля при різних значеннях потоку енергії та електричного поля. Верхні, середні та нижні рисунки відповідають $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.05, 0.2$ та 0.5 відповідно.

E , причому поведінка $p(h)$ у фазі II є кардинально різною у випадках додатних та від'ємних h . Так, при додатних значеннях магнітного поля електрична поляризація у фазі II може бути немонотонною функцією h з одним максимумом, або монотонно зростаючою (у ви-

падку, коли електричне поле є близьким до нуля). А от при $h < 0$ у фазі II $p(h)$ може бути лише монотонно зростаючою функцією при будь-яких значеннях електричного поля. Слід також зауважити, що при $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.05$ у магнітоневпорядкованій фазі I електрична поляризація може бути лише спадною функцією h .

При $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.2$ (див. Рис. 1, 3 та 4) на відміну від випадку $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.05$ при малих полях h та E задане значення потоку енергії ($\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.2$) не може бути досягнутим (як вже говорилось вище), тобто є область, де не існує станів. Тому зі збільшенням h в системі має місце каскад чотирьох фазових переходів $\text{III} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{I} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{III}$ лише при $E > 0.5066$, а при менших значеннях електричного поля маємо два каскади по два переходи $\text{III} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{I}$ та $\text{I} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{III}$. У фазі II залежності $p(h)$ при різних E є аналогічними до відповідних залежностей для $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.05$: електрична поляризація у фазі II при додатних h може бути зростаючою, або ж немонотонною функцією магнітного поля, в той час як при $h < 0$ вона може бути лише монотонно зростаючою. У фазі I поведінка $p(h)$ у випадку $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.2$ відрізняється від відповідної поведінки при $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.05$. Так, лише при великих та дуже малих значеннях електричного поля електрична поляризація є спадною функцією h у цій магнітоневпорядкованій фазі. А от, наприклад, при $E = 0.1, 0.4, 0.5$ вона є спадною функцією магнітного поля у немагнітній фазі лише при $h < 0$, тоді як при $h > 0$ $p(h)$ є немонотонною функцією із одним максимумом.

У випадку великих значень потоку енергії, наприклад $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.5$ (див. Рис. 1, 3 та 4), зі збільшенням h в системі відбувається каскад чотирьох фазових переходів $\text{III} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{I} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{III}$ при $E > 1.4634$, два каскади переходів $\text{III} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{I}$ та $\text{I} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{III}$ при $E_{\text{ТР}} < E < 1.4634$ ($E_{\text{ТР}} = 0.7555$), а при $E < E_{\text{ТР}}$ система може знаходитись лише у фазі III. Електрична поляризація у фазі II при від'ємних h є монотонно зростаючою функцією магнітного поля при довільних E (аналогічно, як у описаних вище випадках $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.05$ та 0.2). В той же час, на відміну від випадків $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.05$ та 0.2 , при великих значеннях потоку енергії поляризація $p(h)$ у фазі II при $h > 0$ може бути лише монотонно спадною функцією. У магнітоневпорядкованій фазі I поведінка поляризації при $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.5$ також відрізняється від відповідної поведінки як при $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.05$, так і при $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.2$. Зокрема, при $E = 2, 1.5, 1.463$ поляризація $p(h)$ є немонотонною функцією з одним мінімумом, а при $E = 1.25, 1$ вона є монотонно спадною (зростаючою) у областях I при h меншому (більшому) від нуля.

Усе, що було сказано вище про залежності поляризації від магнітного поля у немагнітній I та магнітовпорядкованій II фазах стосується лише випадків скінчених $E \geq 0$. А те, як буде себе поводити $p(h)$ при скінчених від'ємних E можна бачити із властивості $p(J, h, E) = -p(J, -h, -E)$, яка має місце при фіксованому потоці енергії.

У магнітовпорядкованій ж фазі III, на відміну від фаз I та II, залежність поляризації від магнітного поля при будь-яких скінчених значеннях потоку енергії $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ та електричного поля E (байдуже від його знаку) є однозначною: $p(h)$ – монотонно зростаюча функція як при додатних h , так і при від'ємних. Слід відзначити, що лише у цій магнітній фазі III електрична поляризація є парною функцією електричного поля ($p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, J, h, E) = p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, J, h, -E)$). Це можна побачити на Рис. 4, пам'ятаючи про властивість $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, J, h, E) = -p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, J, -h, -E)$. Але більш наочно це буде видно далі при аналізі залежностей p від E (Рис. 5).

Варто звернути також увагу на те, що при заданих електричному полі та потоці енергії на границях області, де не існують стани, $p(h) = -p(-h)$. Це можна побачити на Рис. 4 для $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.2$ при $E = 0, 0.1, 0.4, 0.5$ та для $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.5$ при $E = 0, 0.5, 1, 1.25$. У випадку, коли система знаходиться у фазі III ($\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.5, E = 0$ та 0.5), це можна пояснити зокрема властивістю $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, J, h, E) = -p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, J, -h, -E)$ та тим, що у цій фазі III поляризація є парною функцією електричного поля.

Залежності намагніченості від магнітного поля при будь-яких $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ є достатньо тривіальними. У магнітовпорядкованих фазах II та III $m(h)$ є зростаючою функцією. Притому, при магнітних полях близьких до $\pm h_c^{\text{II} \rightarrow \text{III}}$, при яких відбуваються переходи між цими магнітовпорядкованими фазами, похідні $\partial m / \partial h$ у фазі II є суттєво більшими аніж у фазі III. Цікавими є залежності намагніченості у випадку великих $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ при значеннях електричного поля, коли система може перебувати лише у фазі III (див. Рис. 4; $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.5, E = 0$ та 0.5). При великих $|h|$ із його збільшенням намагніченість поступово прямує до насиченого значення. Поблизу ж границь області, де не існує станів, $m(h)$ різко зростає із ростом h , причому на границях цієї області вона прямує до нуля. Забігаючи наперед відзначимо, що те, що на границях області із неіснуючими станами $m \rightarrow 0$ можна окрім того бачити на Рис. 5 для $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.5$ при $h = 1.3, 1.5$, а також на Рис. 6 для $|E| = 0.5$ при $|h| = 1.5, 2$ та для $|E| = 2$ при $|h| = 2.5, 3$.

Поведінка $m(E)$ та $p(E)$ у різних фазах та різних фазових переходах продемонстрована на Рис. 5 (див. також рисунки 2 і 3). У немагнітній фазі I та у магнітовпорядкованій фазі II електрична поляризація зростає зі збільшенням електричного поля як при від'ємних, так і при додатних E (причому $p \rightarrow \pm 1/\pi$ при $E \rightarrow \pm\infty$ і скінченних всіх решта параметрах моделі). В той же час у фазі III $p(E)$ є спадною функцією при $E < 0$, тоді як при $E > 0$ – зростаючою (оскільки поляризація у фазі III є парною функцією E). Із сказаного вище зрозуміло, що у точці фазового переходу $\text{II} \rightarrow \text{III}$ при від'ємних значеннях електричного поля $p(E)$ має злам і максимум, а у точці переходу $\text{III} \rightarrow \text{II}$ при додатних полях E поляризація має злам, проте не має екстремуму. Цікавим є факт, що при заданих магнітному полі та потоці енергії на границях області неіснуючих станів $p(E) = p(-E)$ не лише, коли система перебуває у фазі III (де поляризація є парною функцією E), а й у фазі I (див. Рис. 5 для $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.05$ при $h = 1.3, 1.5$ та $h = 0, 1$).

Тепер дуже коротко про намагніченість $m(E)$. Оскільки вона є парною функцією електричного поля, то обмежимося при аналізі лише значеннями $E \geq 0$. У фазі II m спадає зі збільшенням E , а у фазі III – навпаки, зростає. Притому, при значеннях електричного поля близьких до $\pm E_c^{\text{II} \rightarrow \text{III}}$, при яких відбуваються переходи між цими магнітовпорядкованих фазами, абсолютне значення похідної $\partial m / \partial E$ у фазі II є суттєво більшим аніж у фазі III.

Усе сказане вище про залежності намагніченості та поляризації від електричного поля стосується лише випадків скінченних $h \geq 0$. А те, як буде себе поводити $m(E)$ та $p(E)$ при скінченних від'ємних h можна бачити із властивостей $m(J, h, E) = -m(\pm J, -h, \pm E)$ та $p(J, h, E) = -p(J, -h, -E)$, які мають місце при фіксованому потоці енергії.

На сам кінець розглянемо залежності намагніченості $m(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ та електричної поляризації $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ при скінченних h та E (див. Рис. 6, а також Рис. 1 та 2). При достатньо великих значеннях модуля магнітного поля (наприклад, при $|h| > 1.118$ для $|E| = 0.5$, та при $|h| > 2.236$ для $|E| = 2$) система перебуває у магнітовпорядкованій фазі III на всьому проміжку $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle \in [0, \langle J_{max}^{\mathcal{E}} \rangle]$, де існують стани. При менших ж значеннях $|h|$ із збільшенням потоку енергії при $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle < \langle J_{max}^{\mathcal{E}} \rangle$ відбувається фазовий перехід з магнітовпорядкованої фази II у магнітонепорядковану I. У фазах II та III $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ є практично лінійною функцією, причому при додатних магнітних полях – спадною, а при від'ємних – зростаючою. У цих магнітовпорядкованих фазах при фіксованому електричному полі має місце та-

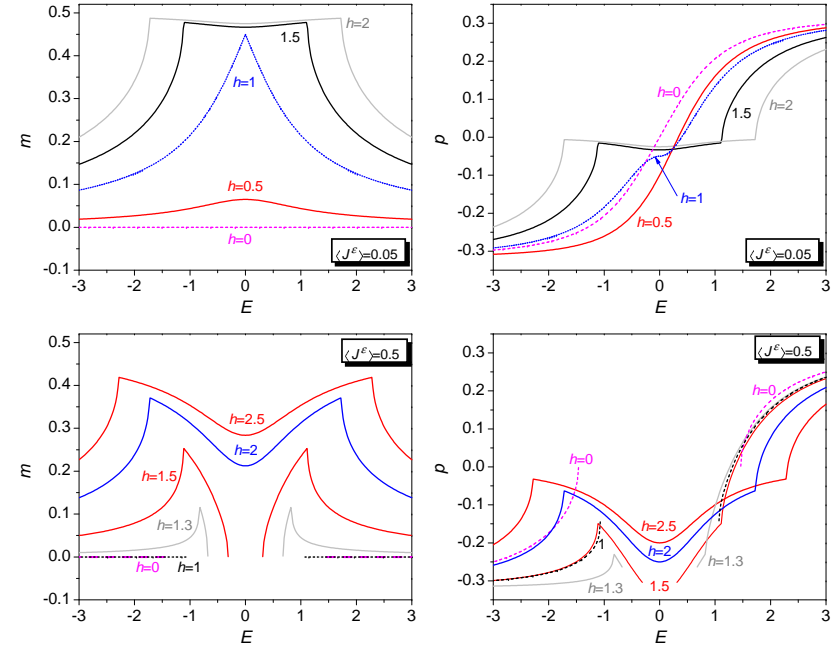


Рис. 5. Залежності намагніченості m та електричної поляризації p від електричного поля при різних значеннях потоку енергії та магнітного поля. Верхні та нижні рисунки відповідають $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0.05$ та 0.5 відповідно.

ка властивість для поляризації: $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, h) = -p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, -h) + 2p(0, |h|)$, причому $p(0, h) = p(0, -h)$ є більшим від нуля (дорівнює нулю) у фазі II (III). У немагнітній фазі I поляризація є спадною функцією потоку енергії як при додатних, так і при від'ємних h .

Усе, що було сказано про залежності поляризації $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ стосується лише випадків скінченних $E \geq 0$. Як же себе буде поводити поляризація при скінченних від'ємних E можна бачити із властивості $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, J, h, E) = -p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, J, -h, -E)$.

Намагніченість $m(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ у магнітовпорядкованих фазах є, природно, спадною (зростаючою) функцією при додатних (від'ємних) значеннях магнітного поля. Слід зауважити, що в околі фазового переходу $\text{II} \rightarrow \text{I}$ у магнітовпорядкованій фазі II похідна $\partial m / \partial \langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ є скінченною величиною. У магнітовпорядкованій ж фазі III при $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle \rightarrow \langle J_{max}^{\mathcal{E}} \rangle$ зі збільшенням потоку енергії $m(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ досить різко спадає або зростає в залежності від знаку h .

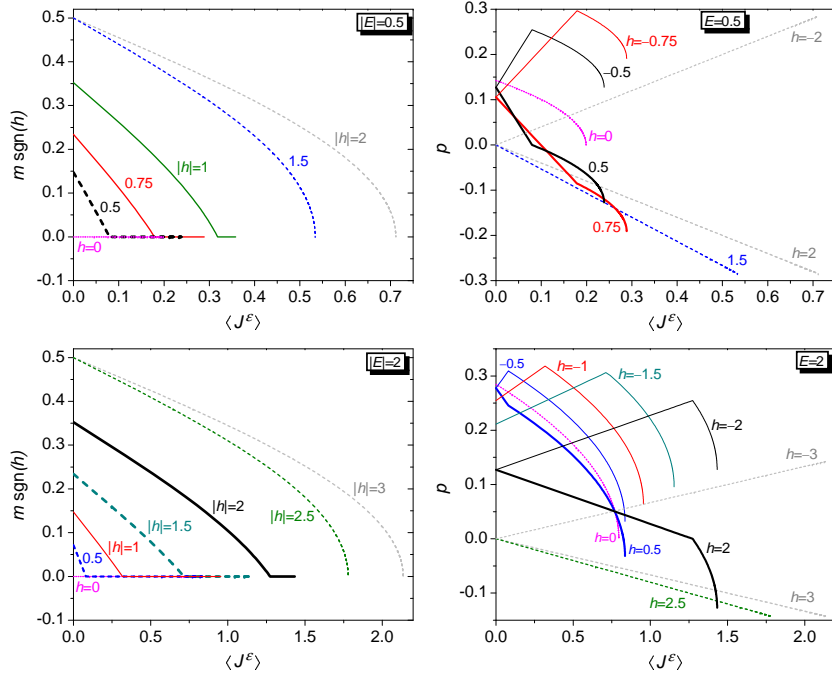


Рис. 6. Залежності намагніченості m та електричної поляризації p від потоку енергії при різних значеннях магнітного та електричного полів. Верхні рисунки для m та p відповідають випадкам $|E| = 0.5$ та $E = 0.5$, а нижні, аналогічно, випадкам $|E| = 2$ та $E = 2$.

Висновки

В роботі було отримано точні результати для ряду характеристик спін-1/2 XX моделі магнетоелектрика із стаціонарним потоком енергії, для врахування якого застосовано метод множника Лагранжа для квантових систем у випадку безмежно низьких температур. Побудовано фазові діаграми у площинах магнітне поле – потік енергії $(h, \langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$, електричне поле – потік енергії $(E, \langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$, а також у площині (E, h) . Проаналізовано залежності намагніченості m та електричної поляризації p від полів та потоку енергії. Коротко перелічимо основні висновки, які можна зробити із проведеного дослідження при скінченних додатних $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$, J та як додатних, так і від’ємних скінченних h , E .

* Фазові діаграми в $(h, \langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ площині мають однакову топологію

при будь-яких значеннях електричного поля. В той же час на $(E, \langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ діаграмах магнітовпорядкована фаза з двома точками Фермі наявна при великих абсолютних значеннях магнітного поля і відсутня при малих його значеннях. На (E, h) фазових діаграмах область, де не існують стани, наявна лише при достатньо великих значеннях потоку енергії. Окрім того, при малих $(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ лінії, які відповідають фазовим переходам між різними фазами не перетинаються, а при великих значеннях потоку сходяться в одну точку, яка лежить на границі, нижче якої не існує станів.

- * У фазах з чотирма точками Фермі (як магнітоневпорядкованій I, так і магнітовпорядкованій II) поляризація може бути зростаючою, спадною або ж немонотонною (з одним екстремумом) функцією магнітного поля. В той же час у магнітовпорядкованій фазі III з двома точками Фермі p із ростом h може лише зростати, причому у цій фазі поляризація не залежить від напрямку електричного поля $[p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, J, h, E) = p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, J, h, -E)]$.
- * При заданих E та $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ у магнітовпорядкованій фазі з чотирма точками Фермі $m(h)$ зростає суттєво швидше ніж у магнітній фазі з двома точками Фермі.
- * Поляризація у фазах I та II є зростаючою функцією електричного поля. У фазі ж III $p(E)$ зі збільшенням електричного поля зростає при $hE > 0$ та спадає при $hE < 0$.
- * Намагніченість $m(E)$ у фазі II спадає (зростає) при $hE > 0$ ($hE < 0$). А у фазі III навпаки: m є зростаючою (спадною) функцією поля E при додатному (від’ємному) значенню добутку полів.
- * У немагнітній фазі I поляризація є спадною функцією потоку енергії при $E > 0$, а при від’ємному E – зростаючою. У магнітовпорядкованих ж фазах II та III $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ є практично лінійною функцією, причому спадною при додатному h та зростаючою при $h < 0$.
- * Залежність $m(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ у магнітовпорядкованій фазі II є досить близькою до лінійної. Похідна $\partial m / \partial \langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ у фазі II в околі переходу II \rightarrow I є скінченною величиною, а у фазі III в околі області, де не існує станів, є безмежно великою.

Якою буде ситуація при від’ємній надобмінній взаємодії можна бачити із властивостей $p(-J, h, E) = p(J, -h, E) = -p(J, h, -E)$ та $m(J) = m(-J)$. Зокрема, $p(h)$ у фазах I та II може бути як монотонною, так і немонотонною функцією (так само, як і при додатному J), а от у фазі III p із ростом h може лише спадати (на відміну від випадку $J > 0$, коли $p(h)$ є зростаючою функцією). $p(E)$ у фазах I

та II може бути лише зростаючою функцією (аналогічно, як і при додатному J), а у фазі III p зі збільшенням електричного поля спадає при $hE > 0$ та зростає при $hE < 0$ (навпаки аніж при $J > 0$). $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ у фазі I є спадною при $E > 0$ та зростаючою при $E < 0$ (так само, як і при додатному J), а от у магнітовпорядкованих фазах II та III $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ зростає при $h > 0$ та спадає при $h < 0$ (навпаки аніж при $J > 0$).

ПОДЯКА: висловлюю подяку Т. М. Верхоляку за допомогу та корисні дискусії.

Додаток

Зупинимось коротко на результатах дослідження залежностей намагніченості, електричної поляризації та потоку енергії від полів h , E , λ (магнітного, електричного та того, що керує потоком енергії) при значенні надобмінної взаємодії $|J| = 1$. Ці результати демонструють деякі відмінності між магнітовпорядкованими фазами II та III (з чотирма та двома точками Фермі відповідно) додатково до тих, які можна бачити, коли незалежними змінними є магнітне поле, електричне поле та потік енергії. Також вони дозволяють зрозуміти наявності областей, у яких не існує фаз. Окрім того нагадаємо, що у деяких роботах по дослідженню нерівноважних стаціонарних станів (наприклад [14,17]) у якості одного із параметрів моделі розглядають не потік енергії, а якраз поле, яке генерує цей потік.

Фазові діаграми в площині магнітне поле – поле, яке керує потоком енергії, мають однакову топологію при будь-яких значеннях електричного поля. На таких фазових діаграмах наявні п'ять фаз (див. Рис. 7). Три із них з ненульовим потоком енергії ($\langle J^{\mathcal{E}} \rangle > 0$):

- I – магнітонеупорядкована ($m = 0$) фаза з чотирма точками Фермі;
- II – магнітовпорядкована фаза з чотирма точками Фермі;
- III – магнітовпорядкована фаза з двома точками Фермі.

А дві інші – із відсутнім потоком ($\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0$):

- IV – магнітовпорядкована фаза з двома точками Фермі;
- V – фаза з щільною у спектрі, в якій намагніченість досягає насиченого значення ($|m| = 1/2$) і, відповідно, з нульовою поляризацією ($p = 0$).

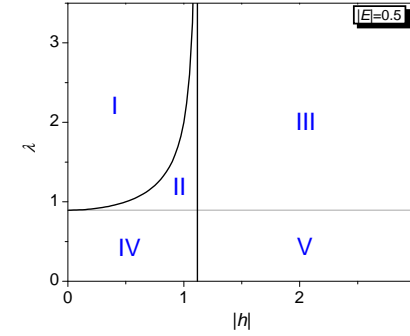


Рис. 7. Фазова діаграма в площині $|h| - \lambda$ при $|E| = 0.5$.

Про перші три фази вже говорилося при аналізі результатів, коли незалежними змінними були $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$, h та E . Фази ж IV та V можуть реалізуватися лише, коли незалежними змінними є λ , h та E .

Фазові діаграми в площині електричне поле – поле, яке керує потоком енергії, можуть мати три різні топології (див. Рис. 8). При $|h| \leq 1$ на них наявні три фази I, II та IV, в той час, як при $|h| > 1$ – усі п'ять фаз.

На рисунках 9–11 представлені усі якісно різні польові залежності намагніченості m , електричної поляризації p та потоку енергії $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$. При дослідженні $p(h)$ та $p(\lambda)$ ми обмежились лише додатними значеннями E , а при дослідженні $p(E)$ – лише додатними значеннями h . Окрім того ми також обмежились додатною надобмінною взаємодією ($J = 1$). При цьому не втрачається загальність, оскільки має місце властивість $p(\lambda, J, h, E) = p(\lambda, -J, -h, E) = -p(\lambda, J, -h, -E)$. Слід зауважити, що для намагніченості і потоку енергії вищезгадані обмеження не робилися.

Спочатку коротко зупинимось на представлених на Рис. 9 залежностях від магнітного поля у випадку $|E| = 0.5$ (див. також Рис. 7). При $\lambda < 0.894$ в системі має місце каскад двох фазових переходів $V \rightarrow IV \rightarrow V$, а при більших λ (наприклад $\lambda = 0.9, 1, 2$) – каскад чотирьох переходів $III \rightarrow II \rightarrow I \rightarrow II \rightarrow III$.

Тепер розглянемо приведені на Рис. 10 залежності від електричного поля (див. також Рис. 8). Спочатку випадок $|h| = 0.5$. При $\lambda = 0$ система перебуває при будь-яких E у фазі IV, а при $\lambda > 1.155$ – у магнітонеупорядкованій фазі I. При $0 < \lambda < 1$ зі зміною E відбувається каскад чотирьох переходів $I \rightarrow II \rightarrow IV \rightarrow II \rightarrow I$, а при $1 < \lambda < 1.155$ – каскад двох переходів $I \rightarrow II \rightarrow I$. У випадку ж $|h| = 2$ не існує значень λ , при яких відсутні фазові переходи зі зміною E

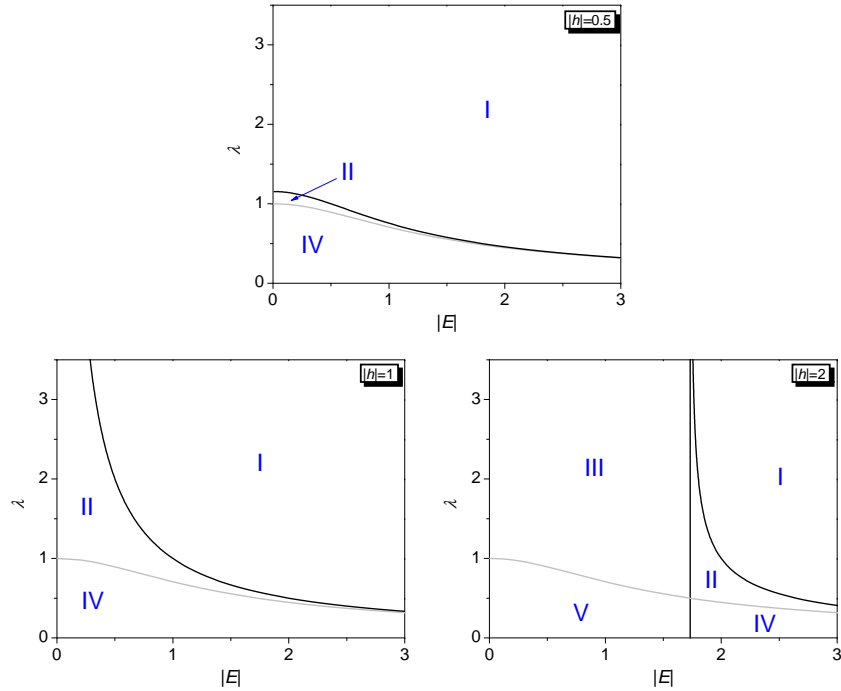


Рис. 8. Фазова діаграма в площині $|E| - \lambda$ при $|h| = 0.5, 1, 2$.

(як це є для $|h| < 1$). Так при $\lambda = 0$ має місце каскад двох переходів $IV \rightarrow V \rightarrow IV$, при $0 < \lambda < 0.5$ та $0.5 < \lambda < 1$ – шести переходів $I \rightarrow II \rightarrow IV \rightarrow V \rightarrow IV \rightarrow II \rightarrow I$ та $I \rightarrow II \rightarrow III \rightarrow V \rightarrow III \rightarrow II \rightarrow I$ відповідно, а при $\lambda > 1$ – чотирьох переходів $I \rightarrow II \rightarrow III \rightarrow II \rightarrow I$. Цікавим є факт, що при відмінних від нуля λ поляризація при $|E| \rightarrow \infty$ є безмежно малою. Нічого подібного не спостерігається, коли незалежною змінною є потік енергії, а не поле, яке ним керує. При $E \rightarrow \pm\infty$ та $\lambda = 0$ отримуємо $p \rightarrow \pm 1/\pi$.

Наостанок коротко про залежності m , p та $\langle J^E \rangle$ від генеруючого потік енергії поля λ . У випадку $|E| = 0.5$ (див. Рис. 11, 7) при $|h| < 1.118$ у системі з ростом λ має місце каскад фазовий перехід $IV \rightarrow II \rightarrow I$, а при більших $|h|$ – перехід $V \rightarrow III$, причому $m \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

З приведених результатів можна бачити, що намагніченість і поляризація у фазі III не залежать від h , а у фазі IV, природно, від λ . В той же час поляризація залежить від усіх трьох полів (λ , h та

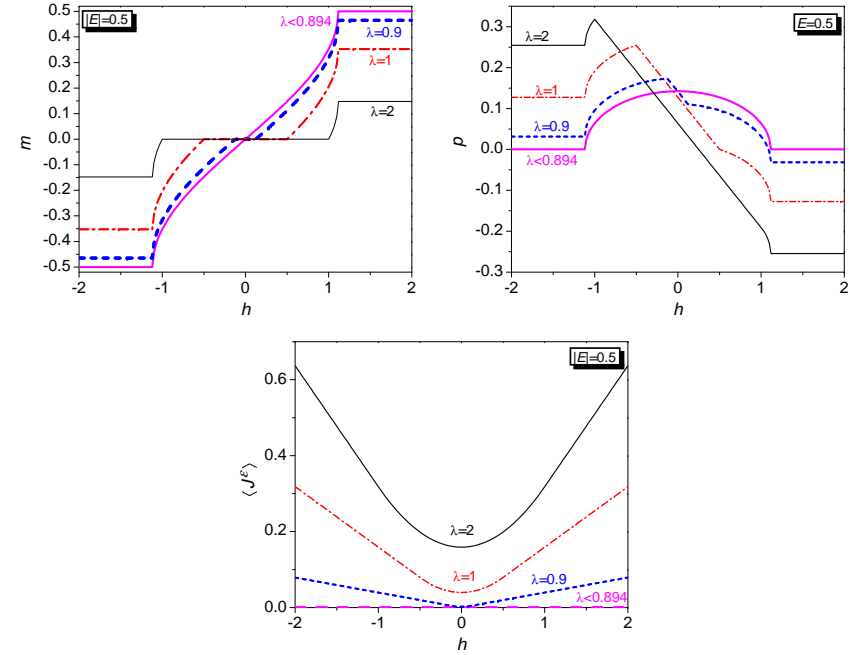


Рис. 9. Залежності намагніченості m , електричної поляризації p та потоку енергії $\langle J^E \rangle$ від магнітного поля h при $E = 0.5$ (або $E = \pm 0.5$) та різних значеннях λ .

E) у магнітонеполяризованій фазі I та магнітовпорядкованій фазі II. Намагніченість ж, природно, залежить від λ , h та E лише у фазі II. Відзначимо, що така відмінність між магнітовпорядкованими фазами II та III з точки зору залежності від h не має місця, коли в якості незалежних змінних виступають $\langle J^E \rangle$, h та E .

Сказане вище можна коротко підсумувати у таблиці:

I	4 точки Фермі	$\langle J^E \rangle > 0$	$m = 0$	$p = p(\lambda, h, E)$
II	4 точки Фермі	$\langle J^E \rangle > 0$	$m = m(\lambda, h, E)$	$p = p(\lambda, h, E)$
III	2 точки Фермі	$\langle J^E \rangle > 0$	$m = m(\lambda, E)$	$p = p(\lambda, E)$
IV	2 точки Фермі	$\langle J^E \rangle = 0$	$m = m(h, E)$	$p = p(h, E)$
V	нема точок Фермі	$\langle J^E \rangle = 0$	$m = 1/2$	$p = 0$

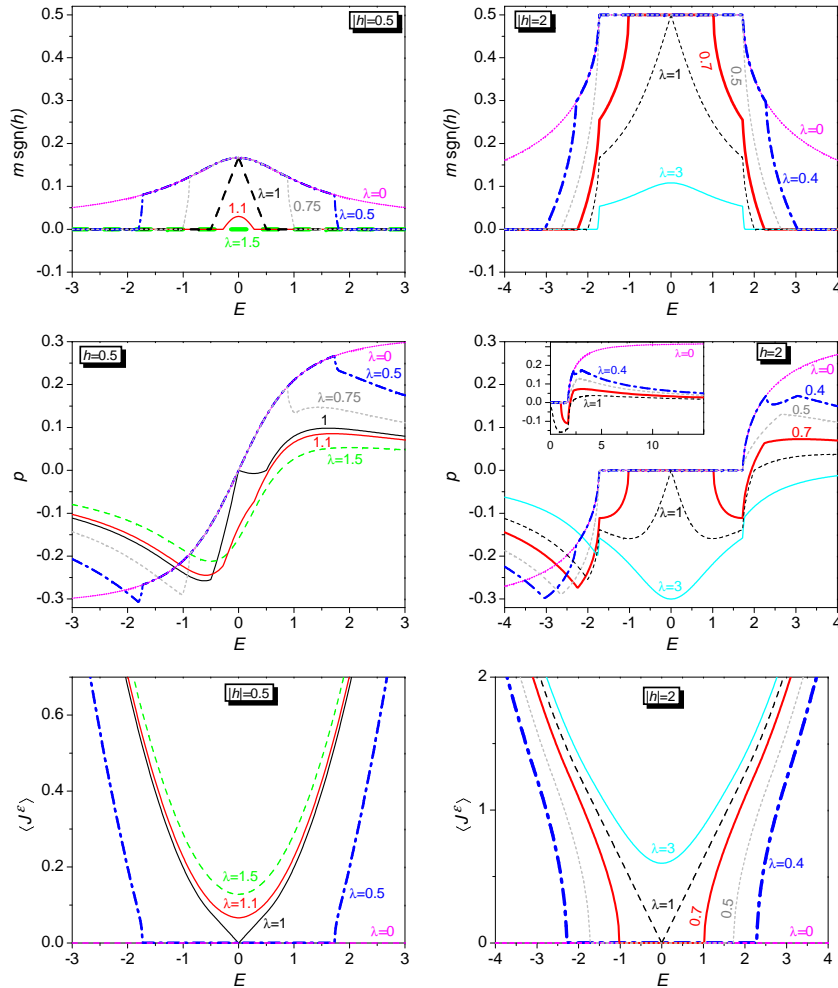


Рис. 10. Залежності намагніченості m , електричної поляризації p та потоку енергії $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ від електричного поля E при $h = 0.5, 2$ (або $h = \pm 0.5, \pm 2$) та різних значеннях λ .

Слід звернути увагу на важливу властивість потоку енергії. Із його залежностей від поля, яке ним керує (див. Рис. 11) видно, що $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ виходить на насичене значення $\langle J^{\mathcal{E}}_{max} \rangle = \langle J^{\mathcal{E}}(\lambda \rightarrow \infty) \rangle$. Це пояснює наявність областей, де стани не існують, коли незалежною змінною є не λ , а $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$.

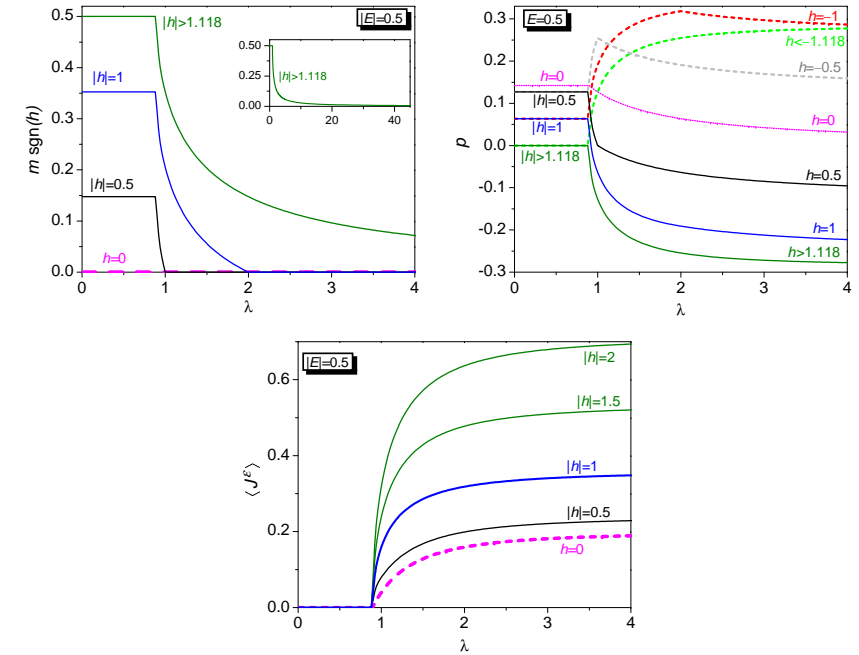


Рис. 11. Залежності намагніченості m , електричної поляризації p та потоку енергії $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ від керуючого потоком енергії поля λ при $E = 0.5$ (або $E = \pm 0.5$) та різних значеннях h .

Література

1. B. Schmittmann and R. K. P. Zia. *Statistical Mechanics of Driven Diffusive System*, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Vol. 17, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic Press, 1995, 220 p.)
2. R. Schmitz. Fluctuations in nonequilibrium fluids. // *Physics Reports (Review Section of Physics Letters)* vol. 171, No 1, 1-58 (1988).
3. A. Dhar. Heat conduction in a one-dimensional gas of elastically colliding particles of unequal masses. // *Phys. Rev. Lett.* vol. 86, 3554-3557 (2001).
4. C.-Y. Hsieh, J. Liu, C. Duan, and J. Cao. A Nonequilibrium Variational Polaron Theory to Study Quantum Heat Transport. // *J. Phys. Chem. C*, vol. 123, 17196-17204 (2019).
5. S. Saryal, H. M. Friedman, D. Segal, and B. K. Agarwalla.

- Thermodynamic uncertainty relation in thermal transport. // *Phys. Rev. E* vol. 100, 042101 (2019).
6. S. Katz, J. L. Lebowitz, and H. Spohn. Phase transitions in stationary nonequilibrium states of model lattice systems. // *Phys. Rev. B* vol. 28, 1655-1658 (1983).
 7. S. Katz, J. L. Lebowitz, and H. Spohn. Nonequilibrium steady states of stochastic lattice gas models of fast ionic conductors. // *J. Stat. Phys.* vol. 34, 497-537 (1984).
 8. H. K. Lee and Y. Okabe. Nonequilibrium reweighting on the driven diffusive lattice gas. // *J. Phys. A: Math. Gen.* vol. 38, L241-L248 (2005).
 9. K. W. Becker, H. Fehske, and V. N. Phan. Projector-based renormalization approach to electron-hole-photon systems in their nonequilibrium steady state. // *Phys. Rev. B* vol. 99, 035304 (2019).
 10. H. Ness. Nonequilibrium density matrix in quantum open systems: Generalization for simultaneous heat and charge steady-state transport. // *Phys. Rev. E* vol. 90, 062119 (2014).
 11. D. S. Kosov. Lagrange multiplier based transport theory for quantum wires. // *J. Chem. Phys.* vol. 120, 7165-7168 (2004).
 12. G. Rastelli and W. Belzig. Ground state cooling of nanomechanical resonators by electron transport. // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* vol. 227, 1885-1895 (2019).
 13. D. Karevski and T. Platini. Quantum nonequilibrium steady states induced by repeated interactions. // *Phys. Rev. Lett.* vol. 102, 207207 (2009).
 14. T. Antal, Z. Rácz, L. Sasvári. Nonequilibrium steady state in a quantum system: One-dimensional transverse Ising model with energy current. // *Phys. Rev. Lett.* vol. 78, 167-170 (1997).
 15. T. Antal, Z. Rácz, A. Rákos, G. M. Schütz. Isotropic transverse XY chain with energy and magnetization currents. // *Phys. Rev. E* vol. 57, 5184-5189 (1998).
 16. Z. Rácz. Presence of Energy Flux in Quantum Spin Chains: An Experimental Signature. // *J. Stat. Phys.* vol. 101, 273-281 (2000).
 17. V. Eisler, Z. Rácz, F. van Wijland. Magnetization distribution in the transverse Ising chain with energy flux. // *Phys. Rev. E* vol. 67, 056129 (2003).
 18. V. Eisler, Z. Zimborás. Entanglement in the XX spin chain with an energy current. // *Phys. Rev. A* vol. 71, 042318 (2005).
 19. J. Hide. A Steady State Entanglement Witness. // *arXiv:1102.0220*
 20. D. Karevski and R. J. Harris. Defect production in quench from a current-carrying non-equilibrium state. // *J. Stat. Mech.: Theory*

- Exp.*, 033204 (2016).
21. T. Antal, Z. Rácz, A. Rákos, G. M. Schütz. Transport in the XX chain at zero temperature: Emergence of flat magnetization profiles. // *Phys. Rev. E* vol. 59, 4912-4918 (1999).
 22. C. Mejía-Monasterio, T. Prosen, G. Casati. Fourier's law in a quantum spin chain and the onset of quantum chaos. // *Europhys. Lett.* vol. 72, 520-526 (2005).
 23. W. H. Aschbacher and C.-A. Pillet. Non-equilibrium steady states of the XY chain. // *J. Stat. Phys.* vol. 112, 1153-1175 (2003).
 24. Y. Ogata. Nonequilibrium properties in the transverse XX chain. // *Phys. Rev. E* vol. 66, 016135 (2002).
 25. D. L. González-Cabrera, Z. Rácz, and F. van Wijland. Casimir effect in the nonequilibrium steady state of a quantum spin chain. // *Phys. Rev. A* vol. 81, 052512 (2010).
 26. M. O. Lavrentovich. Steady-state properties of coupled hot and cold Ising chains. // *J. Phys. A: Math. Theor.* vol. 45, 085002 (2012).
 27. X. Xu, K. Choo, V. Balachandran, D. Poletti. Transport and energetic properties of a ring of interacting spins coupled to heat baths. // *Entropy*, vol. 21, 228 (2019)
 28. M. Brenes, E. Mascarenhas, M. Rigol, J. Goold. High-temperature coherent transport in the XXZ chain in the presence of an impurity. // *Phys. Rev. B* vol. 98, 235128 (2018).
 29. J. L. Lancaster, J. P. Godoy. Persistence of power-law correlations in nonequilibrium steady states of gapped quantum spin chains. // *Phys. Rev. Research* vol. 1, 033104 (2019).
 30. V. Popkov, T. Prosen, L. Zadnik. Exact nonequilibrium steady state of open XXZ/XYZ spin-1/2 chain with Dirichlet boundary conditions. // *Phys. Rev. Lett.* vol. 124, 160403 (2020).
 31. M. Rigol, V. Dunjko, V. Yurovsky, M. Olshanii. Relaxation in a Completely Integrable Many-Body Quantum System: An Ab Initio Study of the Dynamics of the Highly Excited States of 1D Lattice Hard-Core Bosons. // *Phys. Rev. Lett.* vol. 98, 050405 (2007).
 32. E. Ilievski, J. De Nardis, B. Wouters, J.-S. Caux, F. H. L. Essler, T. Prosen. Complete Generalized Gibbs Ensembles in an Interacting Theory. // *Phys. Rev. Lett.* vol. 115, 15720 (2015).
 33. D. Liu, Y. Zhang, Y. Liu, and G.-L. Long. Entanglement in the ground state of an isotropic three-qubit transverse XY chain with energy current. // *Chin. Phys. Lett.* vol. 24, 8-10 (2007).
 34. B.-Q. Liu, B. Shao, and J. Zou. Entanglement of two qubits coupled to an XY spin chain: Role of energy current. // *Phys. Rev. A* vol. 80, 062322 (2009).

35. Z.-M. Wang, B. Shao, P. Chang, J. Zou. Quantum state transfer in a Heisenberg XY chain with energy current. // *Physica A* vol. 387, 2197–2204 (2008).
36. Y.-C. Qiu, Q.-Q. Wu, and W.-L. You. Energy dynamics in a generalized compass chain. // *J. Phys.: Condens. Matter* vol. 28, 496001 (2016).
37. H. Katsura, N. Nagaosa, A. V. Balatsky. Spin current and magnetoelectric effect in noncollinear magnets. // *Phys. Rev. Lett.* vol. 95, 057205 (2005).
38. I. A. Sergienko, E. Dagotto. Role of the Dzyaloshinskii-Moriya interaction in multiferroic perovskites. // *Phys. Rev. B* vol. 73, 094434 (2006).
39. Y. Tokura, Sh. Seki, N. Nagaosa. Multiferroics of spin origin. // *Rep. Prog. Phys.* vol. 77, 076501 (2014).
40. M. Brockmann, A. Klümper, V. Ohanyan. Exact description of magnetoelectric effect in the spin-1/2 XXZ chain with Dzyaloshinskii-Moriya interaction. // *Phys. Rev. B* vol. 87, 054407 (2013).
41. O. Menchyshyn, V. Ohanyan, T. Verkholyak, T. Krokhnalskii, O. Derzhko. Magnetism-driven ferroelectricity in spin- $\frac{1}{2}$ XY chains. // *Phys. Rev. B* vol. 92, 184427 (2015).
42. O. Baran, V. Ohanyan, T. Verkholyak. Spin-1/2 XY chain magnetoelectric: Effect of zigzag geometry. // *Phys. Rev. B* vol. 98, 064415 (2018).
43. M. Michel, O. Hess, H. Wichterich, and J. Gemmer. Transport in open spin chains: A Monte Carlo wave-function approach. // *Phys. Rev. B* vol. 77, 104303 (2008).
44. L.-A. Wu and D. Segal. Energy flux operator, current conservation and the formal Fourier's law. // *J. Phys. A: Math. Theor.* vol. 42, 025302 (2009).
45. R. Steinigeweg, J. Gemmer, and W. Brenig. Spin and energy currents in integrable and nonintegrable spin- $\frac{1}{2}$ chains: A typicality approach to real-time autocorrelations. // *Phys. Rev. B* vol. 91, 104404 (2015).
46. E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis. Two Soluble Models of an Antiferromagnetic Chain. // *Ann. Phys. (N.Y.)* vol. 16, 407-466 (1961).
47. O. Derzhko. Jordan–Wigner fermionization for spin- $\frac{1}{2}$ systems in two dimensions: A brief review. // *J. Phys. Studies* vol. 5 No 1, 49-64 (2001).
48. M. Fabrizio. Superconductivity from doping a spin-liquid insulator: A simple one-dimensional example. // *Phys. Rev. B* vol. 54, 10054-10060 (1996).

49. I. Titvinidze G. I. Japaridze. Phase diagram of the spin $S = 1/2$ extended XY model. // *Eur. Phys. J. B* vol. 32, 383-393 (2003).
50. T. Krokhnalskii, T. Verkholyak, O. Baran, V. Ohanyan, and O. Derzhko. Spin- $\frac{1}{2}$ XX chain in a transverse field with regularly alternating g factors: Static and dynamic properties. // *Phys. Rev. B* vol. 102, 144403 (2020).

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN: Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences; ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services; INSPEC; "Referatyvnyj Zhurnal"; "Dzherelo".

EDITOR IN CHIEF: Ihor Yukhnovskii.

EDITORIAL BOARD: T. Arimitsu, *Tsukuba*; J.-P. Badiali, *Paris*; B. Berche, *Nancy*; T. Bryk (Associate Editor), *Lviv*; J.-M. Caillol, *Orsay*; C. von Ferber, *Coventry*; R. Folk, *Linz*; L.E. Gonzalez, *Valladolid*; D. Henderson, *Provo*; F. Hirata, *Okazaki*; Yu. Holovatch (Associate Editor), *Lviv*; M. Holovko (Associate Editor), *Lviv*; O. Ivankiv (Managing Editor), *Lviv*; Ja. Ilnytskyi (Assistant Editor), *Lviv*; N. Jakse, *Grenoble*; W. Janke, *Leipzig*; J. Jedrzejewski, *Wroclaw*; Yu. Kalyuzhnyi, *Lviv*; R. Kenna, *Coventry*; M. Korynevskii, *Lviv*; Yu. Kozitsky, *Lublin*; M. Kozlovskii, *Lviv*; O. Lavrentovich, *Kent*; M. Lebovka, *Kyiv*; R. Lemanski, *Wroclaw*; R. Levitskii, *Lviv*; V. Loktev, *Kyiv*; E. Lomba, *Madrid*; O. Makhanets, *Chernivtsi*; V. Morozov, *Moscow*; I. Mryglod (Associate Editor), *Lviv*; O. Patsahan (Assistant Editor), *Lviv*; O. Pizio, *Mexico*; N. Plakida, *Dubna*; G. Ruocco, *Rome*; A. Seitsonen, *Zürich*; S. Sharapov, *Kyiv*; Ya. Shchur, *Lviv*; A. Shvaika (Associate Editor), *Lviv*; S. Sokołowski, *Lublin*; I. Stasyuk (Associate Editor), *Lviv*; J. Strečka, *Košice*; S. Thurner, *Vienna*; M. Tokarchuk, *Lviv*; I. Vakarchuk, *Lviv*; V. Vlady, *Ljubljana*; A. Zagorodny, *Kyiv*

CONTACT INFORMATION:

Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2761978; Fax: +38(032)2761158
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua <http://www.icmp.lviv.ua>