



ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-99-15U

Ю. ГОЛОВАЧ

МАСИВНЕ ПЕРЕНОРМУВАННЯ ПРИ НЕЦІЛІЙ
ВИМІРНОСТІ ПРОСТОРУ

УДК: 530.145

PACS: 05.10.Cc, 11.10.Gh, 64.60.-i, 75.10.Nk

МАСИВНЕ ПЕРЕНОРМУВАННЯ ПРИ НЕЦІЛІЙ ВИМІРНОСТІ ПРОСТОРУ

Ю. Головач

Анотація. Обсуджується спосіб дослідження критичної поведінки при нецілій вимірності простору d . Обчислення проводяться на підставі рівнянь масивної теорії поля (рівнянь Каллена-Симанціка) при фіксованому нецілому d . Проведено огляд робіт, в яких отримані кількісні характеристики критичної поведінки декількох широко вживаних моделей статистичної фізики.

MASSIVE RENORMALIZATION IN NON-INTEGER DIMENSIONS

Yu. Holovatch

Abstract. A method to study critical behaviour in non-integer space dimension d is discussed. Calculations are performed on the base of the massive field theory equations (Callan-Symanzik equations) at fixed non-integer d . Quantitative characteristics of the critical behaviour of several popular models of statistical physics are reviewed.

Подається в Журнал фізичних досліджень
Submitted to Journal of Physical Studies

1. Вступ

Серед наукової спадщини Миколи Боголюбова чільне місце належить працям [1], в яких сформульовано метод ренормалізаційної групи (РГ). Виникнувши в 50-х роках у задачах квантової теорії поля [2,3,1], сьогодні РГ стала потужним загальним методом теоретичної і математичної фізики [4]. Зокрема, на РГ підході значною мірою ґрунтується сучасна теорія критичних явищ [5]. Метою цієї статті, присвяченої 90-річчю з дня народження М.М. Боголюбова, є сформулювати узагальнення одного із варіантів методу РГ на випадок нецілої вимірності простору і провести огляд робіт, у яких за допомогою такого підходу досліджувалась критична поведінка декількох часто вживаних моделей статистичної фізики.

На сьогодні існують різні формулювання методу РГ стосовно до його застосування у теорії критичних явищ. Важливою рисою, притаманною різним РГ підходам до аналізу критичних явищ є те, що теорія критичних явищ оперує певним колом понять, спільних для опису зовсім різних систем, в свою чергу, метод РГ дозволяє знайти їх кількісні характеристики. Це асимптотичні значення критичних показників та відношення амплітуд, що описують поведінку системи в околі критичної точки; рівняння для потоків РГ та ефективні показники, що характеризують наближення до критичної області; нерухомі точки, тощо. Визначення цих характеристик та передбачення можливості критичних явищ у різних системах і становить предмет теорії. Причому, в той час як розташування критичних точок, особливості наближення до критичної області, її розмір є специфічними для кожної окремо взятої системи і визначаються її *мікроскопічними* параметрами, поведінка в близькому околі критичної точки є *універсальною*. У ранніх теоріях критичних явищ універсальність трактувалась як однаковість поведінки в околі критичної точки в усіх системах, незалежність її ні від яких параметрів. Сучасне розуміння універсальності передбачає, що поведінка в близькому околі критичної точки залежить від певних *глобальних* характеристик систем. Останні, стосовно спільності або відмінності цих характеристик, можуть бути поділені на певні *класи універсальності*. До таких характеристик належать вимірність простору, вимірність параметра впорядкування, симетрія параметра впорядкування. Зокрема, предметом аналізу, проведеного в цій статті, будуть декілька моделей, що належать до різних класів універсальності (різна вимірність параметра впорядкування і різна симетрія). Ми розглянемо метод досліджень, що дозволить отримати кількісні характеристики критичної

поведінки цих моделей при довільному (нецілому) значенні вимірності простору, яка є глобальною змінною і чинить кардинальний вплив на критичну поведінку.

Стаття організована так: в наступному розділі ми коротко зупинимось на основних причинах, що викликають зацікавлення у дослідженні критичної поведінки при нецілій вимірності простору d та сформулюємо умови перенормування масивної теорії поля при нецілому d . Далі ми проведемо огляд робіт, у яких запропонований шлях досліджень реалізовано для декількох популярних моделей статистичної фізики: моделі Ізинґа (розділ 3), m -векторної моделі (розділ 4) та невпорядкованої m -векторної моделі із замороженим безладом (розділ 5). Загальні висновки та обговорення отриманих результатів приведені в розділі 6.

2. Рівняння Каллена-Симанціка для довільної вимірності простору

Роботи, результати яких викладені нижче, були спричинені недавнім інтересом до дослідження фазових переходів другого роду у випадку, коли вимірність простору d є нецілою. Поняття нецілої вимірності простору вже давно стало звичним у теорії критичних явищ. Є ціла низка причин для запровадження цієї концепції: з одного боку, розгляд вимірності простору (або її відхилення від якогось фіксованого значення) як неперервної змінної і параметра розкладу теорії збурень дозволяє отримати результати і для цілого значення d . Тут можна згадати не лише знаменитий $\varepsilon = 4 - d$ розклад [6], застосування якого у теорії критичних явищ спричинилося до обчислення надійних значень критичних показників багатьох тривимірних ($d = 3$) моделей [5], але і $\varepsilon = d - 1$ розклад, запропонований для моделі майже плоскої поверхні розділу (near planar interface model) [7–9], моделі краплини (droplet model) [10], $\sqrt{\varepsilon}$ -розклад для слабо розведеної моделі Ізинґа [11,12], тощо. З іншого боку, неперервна зміна просторової вимірності шляхом аналітичного продовження гіперкубічних ґраток на нецілі d використовується для того, щоб пов'язати результати, отримані для певного фіксованого d з точними результатами (якщо вони існують) або з результатами, отриманими іншими методами і, таким чином, перевірити надійність того чи іншого способу обчислень. Більше того, у деяких модельних системах спостерігається можливість виникнення нового типу явищ, починаючи з певної (нецілої) вимірності простору, що приводить до потреби визначення цієї маргінальної вимірності. Таким чином, у самостійну задачу пе-

ретворюється дослідження критичної поведінки модельних систем при нецілому d . Так, наприклад, для моделі Ізинґа такі дослідження проводилися за допомогою різноманітних підходів [13–19] (детальніше про це див. у наступному розділі).

У більшості із згаданих вище робіт аналітичне продовження за вимірністю простору d має чисто формальний характер. Свого часу це спричинило інтерес до порівняння значень критичних показників, отриманих таким шляхом, із значеннями критичних показників відповідних спінових систем розташованих у вузлах самоподібних фрактальних ґраток [20], де неціла фрактальна вимірність має безпосередню геометричну інтерпретацію [21]. Проте, опис фракталу включає ще декілька характеристик, що можуть змінюватися одна незалежно від іншої. У додаток до фрактальної вимірності, це: топологічна вимірність, раміфікація, зв'язність, лакуарність [21]. Виявляється, що критичні показники суттєво залежать від цих параметрів [20,22] і лише у границі нульової лакуарності результати для спінових систем на фрактальних ґратках можна інтерполювати за допомогою аналітичного продовження до нецілих d . Питання відповідності критичної поведінки на фрактальних ґратках критичній поведінці на інтерполюваних гіперкубічних ґратках все ще залишається відкритим [23].

Як зараз добре відомо, дослідження критичних властивостей, що виникають в моделях статистичної фізики в околі точки фазового переходу другого роду можна проводити в термінах Евклідової теорії поля, лагранжіан якої певним чином відповідає гамільтоніану вихідної моделі статистичної фізики [5]. Так, критичну поведінку моделі Ізинґа в околі точки фазового переходу другого роду можна описати Евклідовою теорією поля з лагранжіаном:

$$\mathcal{L}(\phi) = \int d^d R \left\{ \frac{1}{2} [|\nabla\phi|^2 + m_0^2\phi^2] + \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4 \right\}, \quad (1)$$

де m_0^2 - лінійна функція температури, λ_0 - неперенормована (гола) константа взаємодії, $\phi = \phi(R)$ - однокомпонентне поле. Модель можна узагальнити, вводячи у (1) мультиплет m полів, що формує представлення групи $\mathcal{O}(m)$. У цьому випадку лагранжіан (1) набуває форми:

$$\mathcal{L}(\vec{\phi}) = \int d^d R \left\{ \frac{1}{2} [|\nabla\vec{\phi}|^2 + m_0^2|\vec{\phi}|^2] + \frac{\lambda_0}{4!} |\vec{\phi}|^4 \right\}, \quad (2)$$

де $\vec{\phi} = \vec{\phi}(R)$ - векторне поле $\vec{\phi} = (\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(m)})$. Відповідний спіновий гамільтоніан містить скалярний добуток m -компонентних

векторів $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}$ і є гамільтоніаном m -векторної моделі. Критична поведінка m -векторної моделі із слабким "замороженим" безладом (weakly diluted quenched m-vector model), коли "спіни" $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}$ випадково розподілені у вузлах ґратки і зафіксовані в певній конфігурації, може бути описана в термінах лагранжіану, що містить дві константи взаємодії [12]:

$$\mathcal{L}(\vec{\phi}) = \int d^d R \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n [|\nabla\vec{\phi}^{(\alpha)}|^2 + m_0^2|\vec{\phi}^{(\alpha)}|^2] + \frac{\lambda_{0,1}}{4!} \left(\sum_{\alpha=1}^n |\vec{\phi}^{(\alpha)}|^2 \right)^2 + \frac{\lambda_{0,2}}{4!} \sum_{\alpha=1}^n \left(|\vec{\phi}^{(\alpha)}|^2 \right)^2 \right\}, \quad (3)$$

у реплічній границі $n \rightarrow 0$. Тут $\lambda_{0,1} > 0$, $\lambda_{0,2} < 0$ - голі константи взаємодії а кожна компонента $\vec{\phi}^{(\alpha)}$ є вектором $\vec{\phi}^{(\alpha)} = (\phi^{(\alpha,1)}, \phi^{(\alpha,2)}, \dots, \phi^{(\alpha,m)})$.

Для дослідження особливостей критичної поведінки використовується метод теоретико-польової РГ, відомий у різних варіантах. Одним із них є ренормалізація одночастинково незвідних вершинних функцій при нульових зовнішніх імпульсах і ненульовій масі, що приводить до рівнянь масивної теорії поля - рівнянь Каллена-Симанціка. Такий шлях дослідження критичної поведінки запропонував Дж. Парізі [24]. При цьому аналізуються безпосередньо дво- або тривимірні теорії ($d = 2$, $d = 3$) і, таким чином, не застосовується ε -розклад. Слідуючи ідеї Дж. Парізі, ми розглянули [31,32] умови нормування масивної теорії поля теж при фіксованій вимірності простору d . Однак, маючи метою дослідити критичну поведінку модельних систем при довільному нецілому d , ми зберегли залежність від вимірності простору, як від параметру. Одночастинково незвідна (1PI - one particle irreducible) вершинна функція $\Gamma^{(L,N)}(p_1, \dots, p_L; k_1, \dots, k_N; m_0^2; \{\lambda_0\}; \Lambda_0; d)$ може бути означена як [33]:

$$\delta \left(\sum p_i + \sum k_j \right) \Gamma^{(L,N)}(\{p\}; \{k\}; m_0^2; \{\lambda_0\}; \Lambda_0; d) = \int^{\Lambda_0} e^{i(p_i r_i + k_j R_j)} d^d r_1 \dots d^d r_L d^d R_1 \dots d^d R_N \times \langle \phi^2(r_1) \dots \phi^2(r_L) \phi(R_1) \dots \phi(R_N) \rangle_{1PI}^{\mathcal{L}} \quad (4)$$

В (4) $\{p\}, \{k\}$ - сукупність зовнішніх імпульсів, Λ_0 - імпульс обрізання, а усереднення проводиться з відповідним лагранжіаном (напр.

(1) - (3)). В асимптотичній границі $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ неперенормовані вершинні функції є розбіжними. Перехід від теорії, залежної від голих змінних, до перенормованої теорії можна здійснити за допомогою контрольованого перегруповання рядів для вершинних функцій. Як уже зазначалось вище, таке перенормування можна здійснити за допомогою декількох асимптотично еквівалентних процедур. Ми обираємо умови нормування при нульових зовнішніх імпульсах і відмінній від нуля масі в границі $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ [5]:

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(0,2)}(k, -k; m^2, \{\lambda\}; d)|_{k=0} &= m^2, \\ \frac{d}{dk^2} \Gamma_R^{(0,2)}(k, -k; m^2, \{\lambda\}; d)|_{k=0} &= 1, \\ \Gamma_{R,\lambda_j}^{(0,4)}(\{k\}; m^2, \{\lambda\}; d)|_{\{k\}=0} &= m^{4-d} \lambda_j, \\ \Gamma_R^{(1,2)}(p; k, -k; m^2, \{\lambda\}; d)|_{p=k=0} &= 1, \end{aligned} \quad (5)$$

де m і $\{\lambda\}$ [33] – перенормовані маса і константи взаємодії: $m = Z_3 m_1 = Z_3 \Gamma^{(0,2)}(0; m_0, \{\lambda_{0,i}\})$, $\lambda_i = m^{d-4} Z_3^2 Z_{1,\lambda_i}^{-1} \lambda_{0,i}$. В (5) і нижче ми явно вказуємо на залежність перенормованих вершинних функцій $\Gamma_R^{L,N}$ від вимірності простору d . З умов 5 можна отримати розклади для констант перенормування поля (Z_3), вершин $\lambda_{0,i}$ (Z_{1,λ_i}) і двоточкової вершинної функції із вставленим ϕ^2 (Z_2). Асимптотично близько до критичної точки перенормовані вершинні функції $\Gamma_R^{(N,L)}(\{p\}; \{k\}; m^2, \{\lambda\}; d)$ задовільняють однорідне рівняння Каллена-Симанціка [5]:

$$\left\{ m \frac{\partial}{\partial m} + \sum_i \beta_{\lambda_i}(\{\lambda\}) \frac{\partial}{\partial \lambda_i} - \left(\frac{N}{2} - L \right) \gamma_\phi(\{\lambda\}) + \right. \quad (6)$$

$$\left. L \bar{\gamma}_{\phi^2}(\{\lambda\}) \right\} \Gamma_R^{(N,L)}(\{p\}; \{k\}; m^2, \{\lambda\}; d) = 0,$$

із коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_i}(\{\lambda\}) &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial \ln m} \Big|_0, \\ \gamma_\phi \equiv \gamma_3 &= \frac{\partial Z_3}{\partial \ln m} \Big|_0, \\ \bar{\gamma}_{\phi^2} \equiv \gamma_2 &= - \frac{\partial Z_2}{\partial \ln m} \Big|_0, \end{aligned} \quad (7)$$

де індекс 0 означає диференціювання при фіксованих голих параметрах. У стійкій нерухомій точці $\{\lambda^*\}$, координати якої визначаються нулем β -функцій:

$$\beta_{\lambda_i}(\{\lambda^*\}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8)$$

функція γ_ϕ визначає величину критичного показника парної кореляційної функції η :

$$\eta = \gamma_\phi(\{\lambda^*\}), \quad (9)$$

а критичний показник кореляційної довжини ν визначається як

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(\{\lambda^*\}) = 2 - \nu^{-1} - \eta. \quad (10)$$

Дослідження критичної поведінки при нецілій вимірності простору, результати яких викладені у наступних розділах статті базуються на розгляді рівнянь Каллена-Симанціка (6) (чи умов нормування масивної теорії поля (5)) безпосередньо при довільному, нецілому значенні d [31,32].

Застосовуючи умови нормування масивної теорії поля до одночастинково незвідних вершинних функцій $\Gamma^{(L,M)}$, можна отримати вирази для перенормованих вершинних функцій $\Gamma_R^{(L,M)}$, у вигляді рядів теорії збурень за перенормованими константами взаємодії λ_i . Зображаючи члени ряду у вигляді фейманівських діаграм, легко зауважити, що певному порядку теорії збурень за λ_i відповідає певна кількість петель у діаграмі (рівна кількості інтегрувань за внутрішніми імпульсами). Числові значення петлевих інтегралів (loop integrals) залежать лише від вимірності простору і є однаковими для задач різної симетрії. Вони необхідні для отримання величин коефіцієнтів ряду теорії збурень за λ_i . У випадку вимірності простору $d = 2$, $d = 3$ значення петлевих інтегралів протабульовані у [28]. І, фактично, кожна робота, присвячена дослідженню критичної поведінки дво- чи тривимірних систем за допомогою рівнянь масивної теорії поля містить поклик на результати Бейкера, Мейрона і Нікеля [28]. Застосовуючи техніку фейманівської параметризації та прямого інтегрування ми отримали вирази для дво- та три- петлевих інтегралів, що залежать від d як від параметра, і протабулювали їх чисельні значення [29], що стало основою для дослідження критичної поведінки у просторі нецілої вимірності. Зазначимо, що кратність двопетлевих інтегралів є $2 \times d$ а трипетлевих - $3 \times d$ (тобто перша змінюється від 0 до 8, а друга - від 0 до 12 коли d змінюється від 0 до 4). В той час як у випадку цілої вимірності простору відомі способи, що дають можливість скористатися внутрішньою симетрією інтегралів [39], у випадку нецілого d не всі вони в принципі є застосовними.

Отримані вирази для петлевих інтегралів а також їх чисельні значення дозволяють досліджувати критичну поведінку різних модельних систем при довільному значенні вимірності простору. У

наступних розділах ми реалізуємо це завдання для моделей (1) - (3). Вихідними для наших досліджень будуть вирази для β - та γ -функцій моделей (1)–(3) отримані у схемі масивного перенормування у трипетловому наближенні, записані як функції залежних від вимірності простору петлевих інтегралів. Так, для m -векторної моделі (2) РГ функції є такими [40]:

$$\beta(u) = -(4-d) \left[u - u^2 + \beta^{(2)} u^3 + \beta^{(3)} u^4 \right], \quad (11)$$

$$\gamma_\phi = -(4-d) \frac{2(m+2)}{(m+8)^2} u^2 [2i_2 + (4i_2 - 3i_8)u], \quad (12)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2} = (4-d) \frac{m+2}{m+8} u \left[1 + \gamma^{(2)} u + \gamma^{(3)} u^2 \right]. \quad (13)$$

Тут u – перенормована константа взаємодії [34], i_ℓ – залежні від вимірності петлеві інтеграли (їх числові значення при різних d приведені в [29]) а індекси ⁽²⁾ і ⁽³⁾ вказують на дво- і трипетлову частини відповідних функцій:

$$\begin{aligned} \beta^{(2)} &= \frac{8}{(m+8)^2} [(m+2)i_2 + (5m+22)(i_1 - 1/2)], \\ \beta^{(3)} &= \frac{1}{(m+8)^3} [(-32m^2 - 488m - 1424) + 4(31m^2 + \\ &430m + 1240)i_1 + (m+2)(m+8)(8+3d)i_2 - \\ &-12(m+2)(m+8)i_3 - 48(m^2 + 20m + 60)i_4 - \\ &-24(2m^2 + 21m + 58)i_5 - 6(3m^2 + 22m + 56)i_6 - \\ &-24(5m+22)i_7 - 12(m+2)(m+8)i_8], \\ \gamma^{(2)} &= \frac{1}{(m+8)} (1 - 2i_1), \\ \gamma^{(3)} &= \frac{1}{(m+8)^2} [10(m+8) - (44m+280)i_1 + \\ &(8-3d)(m+2)i_2 + 12(m+2)i_3 + 24(m+8)i_4 + \\ &6(m+8)i_5 + 18(m+2)i_6]. \end{aligned}$$

Ми не будемо приводити тут відповідні вирази для РГ функцій розведеної m -векторної моделі, отримані в дво- [31] та трипетловому наближенні [35]. Зауважимо лише, що поряд із явною залежністю від вимірності простору d , РГ функції залежать від d через петлеві інтеграли $i_1 - i_8$. Підставляючи значення інтегралів вигляді відповідного ε -розкладу можна розвинути техніку ε -розкладу для того щоб дослідити критичну поведінку, генеровану лагранжіанами (1)–(3).

У цьому випадку ми відтворимо добре відомі результати. З іншого боку, будучи зацікавленим у дослідженні критичної поведінки при нецілому d можна скористатися отриманими в [29] значеннями петлевих інтегралів безпосередньо при довільному d . Як зараз добре відомо (див., наприклад, [30,41,5]), ряди для ренормгрупових функцій є асимптотичними [36] і для того, щоб отримати на їх основі надійну інформацію, слід застосувати процедуру пересумовування. Зупинімося на таких обчисленнях детальніше.

3. Модель Ізинґа

Свої дослідження особливостей критичної поведінки при нецілій вимірності простору розпочнемо із детального аналізу моделі Ізинґа. На відміну від інших моделей, що будуть розглянуті нижче, модель Ізинґа при довільному значенні d була предметом ґрунтовного аналізу. Тому основне завдання, яке ми ставимо перед собою в цьому розділі, полягає в тому, щоб, застосувавши метод масивної ренормалізації при довільному фіксованому значенні вимірності простору до дослідження моделі Ізинґа, перевірити його надійність і достовірність отриманих результатів. Мабуть, першою роботою, в якій досліджувалась критична поведінка моделі Ізинґа при нецілій вимірності простору була робота Майкла Фішера [13]. Проте предметом досліджень була критична температура, а не критичні показники. Серед різних підходів, що використовувались для отримання критичних показників моделі Ізинґа при нецілому d , слід назвати ренормалізаційне перетворення Каданова, за допомогою якого були отримані значення температурного і магнітного критичних показників для всіх цілих значень $z = 2^d$ між $z = 2$ і $z = 16$ – це, природньо, привело до знаходження значень критичних показників для деяких нецілих d [14]. Пізніше критичні показники моделі Ізинґа при нецілій вимірності простору обчислювалися [15] на підставі пересумовування рядів ε -розкладу, записаних з точністю до ε^5 . Ренормгруповий підхід у дійсному просторі [20,16] і високотемпературні розклади [17] також застосовувалися для розгляду цієї задачі. За допомогою варіаційного методу, застосованого до високотемпературних рядів [18] вивчалась вільна енергія d -вимірної моделі Ізинґа. Акуратні значення критичних показників моделі Ізинґа при низьких вимірностях простору $1 \leq d \leq 2$ були отримані [19] на підставі застосування методу скінченномірної скейлінгу (finite size scaling) до даних, отриманих за допомогою методу трансфер-матриці. Причому трансфер-матриця була записана у спосіб, який дозволяв її інтерполяцію до нецілих

вимірностей.

Як уже згадувалось, використання рівнянь масивної теорії поля при фіксованих вимірностях простору $d = 2$, $d = 3$ завдяки піонерським роботам Джорджіо Парізі [24] стало одним із стандартних підходів у сучасній теорії критичних явищ. Мабуть, до появи наших робіт це був єдиний із широко вживаних методів аналізу критичної поведінки, котрий ще не використовувався при нецілому d . Вихідними виразами для аналізу є β - та γ -функції (11)–(13). Причому, цікавлячись критичною поведінкою моделі Ізинґа, ми розглянемо випадок скалярного поля ($m = 1$). Як ми вже зазначали, у зв'язку із асимптотичною природою рядів для ренормгрупових функцій, слід застосовувати певну процедуру пересумовування для отримання достовірної інформації на їх підставі. Результати отримані в масивній схемі за допомогою пересумовування методом Паде-Бореля приведені у [40]. Як зазначалось уже в [40], метод Паде-Бореля добре працює коли вимірність простору не є дуже низькою. Однією із можливих причин є те, що параметр розкладу – значення константи взаємодії в нерухомій точці – зростає із зменшенням d . Зокрема, отримані в [40] результати потребують покращення в ділянці d поблизу нижньої критичної вимірності. Покажемо один із можливих способів, як це можна зробити [40].

Як і в [40], оберемо процедуру пересумовування Паде-Бореля. Схема пересумовування є такою. Для функції $f(u)$ (це може бути γ - або β -функція чи їх частина) заданої у вигляді скінченної кількості доданків у розкладі Тейлора:

$$f(u) = \sum_{j=0}^L f^{(j)} u^j, \quad (14)$$

записується борелівський образ:

$$F(ut) = \sum_{j=0}^L \frac{f^{(j)}}{j!} (ut)^j. \quad (15)$$

Тоді (15) представляється у вигляді Паде-апроксиманти $F^P(ut)$ і пересумована функція запишеться у формі:

$$f^R(u) = \int_0^\infty dt e^{-t} F^P(ut). \quad (16)$$

Реалізуємо процедуру, в результаті якої вирази (11)–(13) при $m = 1$ привели б до значень критичних показників, що співпадали б із точ-

ними значеннями у випадках, коли вони відомі: тобто при вимірностях простору $d = 1$ ($\nu = \gamma = \infty$, $\eta = 1$) і $d = 2$ ($\nu = 1$, $\gamma = 1.75$, $\eta = 0.25$). Для цього оберемо найвищий (наступний після останнього відомого) член ряду теорії збурень вільним параметром і змінюватимемо його так, щоб отримати необхідний результат. У випадку ε -розкладу таку процедуру було запропоновано в [37]. Зауважимо, однак, суттєву відмінність у застосуванні такої схеми в рамках ε -розкладу і у ренормгруповому підході при фіксованій вимірності простору. Вимірність d , яка входить у параметр розкладу в техніці ε -розкладу, не міститься в коефіцієнтах жодного з рядів. Таким чином, обравши коефіцієнт вищого порядку $f^{(j+1)}$ як вільний параметр у ряді для певної функції $f(\varepsilon)$ (наприклад, для будь-якого критичного показника)

$$f(\varepsilon) \simeq \sum_{j=0}^L f^{(j)} \varepsilon^j + f^{(j+1)} \varepsilon^{j+1},$$

можна забезпечити співпадіння результатів лише для однієї обраної вимірності d (в [37] це $d = 2$). На відміну від цього, у схемі, що базується на застосуванні рівнянь ренормалізаційної групи при фіксованій вимірності простору, коефіцієнти рядів за перенормованою константою взаємодії u є залежними від вимірності:

$$f(u) \simeq \sum_{j=0}^L f^{(j)}(d) u^j + f^{(j+1)}(d) u^{j+1}.$$

Тоді обраний вираз може містити інформацію про точні результати для декількох значень d (обираючи відповідні значення $f^{(j+1)}(d)$, наприклад, для цілих $d = 1, 2, \dots$). Для проміжних значень d функцію $f^{(j+1)}(d)$ можна апроксимувати гладкою кривою. Звичайно, що надійність отриманих у такий спосіб результатів значною мірою залежить від того, наскільки гладкою є поведінка функції, яку ми апроксимуємо [38].

Отримані за допомогою описаної процедури пересумовування критичні показники ν , η як функції вимірності d [38] приведені в таблиці 1 для деяких конкретних значень вимірності простору у порівнянні з даними інших підходів: [15] – із пересумовування ε -розкладу, [18] – за допомогою варіаційного підходу, застосованого до високотемпературних розкладів, [19] – застосуванням методу скінченномірною скеїлінґу до даних, отриманих за допомогою методу трансфер-матриці.

На рисунку 1 ми порівнюємо наші результати для критичного показника ν із результатами $\varepsilon' = d - 1$ розкладу для моделі майже плоскої поверхні поділу (у ділянці низьких значень d), з даними, отриманими за допомогою перетворення Каданова [14] і за допомогою аналізу фізичної гілки розв'язків точного рівняння ренормалізаційної групи [26]. Значення критичного показника ν для моделі майже плоскої поверхні поділу:

$$\nu = (\varepsilon')^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{7(\varepsilon')^2}{8} \quad (17)$$

показане в першому, другому [7], третьому [8] і четвертому [9] порядках теорії збурень.

Рисунок 2 дає порівняння наших даних для критичного показника η із результатами, отриманими за допомогою перетворення Каданова [14] і за допомогою аналізу фізичної гілки розв'язків точного рівняння ренормалізаційної групи [26] а також із значенням η для моделі краплини, що записується як [10]:

$$d + \eta = 8\pi^{-1}(\varepsilon')^{-(2+\varepsilon')/2} [1 + O(\varepsilon')] e^{(-1-2C-2/\varepsilon')}, \quad (18)$$

де $C \simeq 0.577$ – стала Ойлера.

Як видно з таблиці 1, наші результати дуже добре узгоджуються із результатами роботи [15], отриманими на підставі пересумованого ε -розкладу із використанням точної інформації при $d = 2$. Це легко зрозуміти, особливо якщо взяти до уваги, що таке ж узгодження має місце для цілих вимірностей $d = 2, d = 3$ (див., наприклад, [30,41]). В ділянці вимірностей $1 < d < 2$ наші результати можна порівняти із значенням критичного показника ν моделі майже плоскої поверхні поділу [7], порахованим за допомогою $\varepsilon' = d - 1$ розкладу [7–9]. Існує низка аргументів в підтримку твердження про те, що критична точка цієї моделі ідентична критичній точці ізінгівської системи. Тепер вважається, що це твердження справедливе принаймні в сенсі $\varepsilon' = d - 1$ розкладу. Як видно із рисунку 1, така ідентифікація дійсно може мати місце. Зазначимо, що криві для критичного показника ν проходять через точне значення $\nu(d = 2) = 1$, якщо ряд (17) розглядається в одно- або в трипетлевому наближенні. Результати ренормгрупового підходу при фіксованій вимірності простору узгоджуються із результатами, отриманими для моделі краплини [10] в ділянці низьких значень d , як це видно з рисунку 2. Результати, отримані для деяких нецілих d за допомогою перетворення Каданова [14] (відкладені на рисунку 1 зірочками) також добре узгоджуються із нашими даними. Ми використали співвідношення скейлінгу для

того, щоб отримати показник η із ν і δ , приведених в [14]. Ці значення η також зображені зірочками на рисунку 2. Видно, що схема [14] приводить до завищених значень η в ділянці $d > 2.5$. Дані, отримані на основі аналізу фізичної гілки розв'язку точних рівнянь ренормалізаційної групи [26] також узгоджуються з нашими результатами. Найкраще узгодження має місце в ділянці d поблизу $d = 3$, де, як це було зазначено в [26], такий підхід є найбільш ефективний.

Акуратні і надійні значення критичних показників для нецілого d отримуються в ділянці $1 < d < 2$ на підставі застосування методу скінченомірного скейлінгу до даних, отриманих за допомогою методу трансфер-матриці [19] (див. колонки 8,9 таблиці 1). В ділянці $d > 1.5$ наші результати добре узгоджуються із цими даними, але для нижчих значень d узгодження є гірше. В протизага до цього, у ділянці малих d наші результати узгоджуються із даними, отриманими за допомогою варіаційного підходу до аналізу високотемпературних рядів [18] (колонки 6,7 таблиці 1) і знаходяться поза межами точності цієї роботи для ν при $d > 1.875$ а для η при $d > 1.5$.

Із аналізу, проведеного у цьому розділі, робимо висновок, що запропонований метод перенормування, так само як і процедура пересумовування є надійними способами дослідження критичної поведінки при нецілому значенні d і нижче ми застосуємо їх до аналізу регулярної та структурно-непорядковані m -векторної моделі.

4. m -векторна модель

Нагадаймо, що згідно теореми Мерміна-Вагнера-Гогенберга [42], для m -векторної моделі нижня критична вимірність $d_c = 2$ при $m \geq 2$. Слідуючи результатам розділу 3, з метою вдосконалення процедури пересумовування введемо у вирази для пересумованих функцій вільні параметри, вибираючи їх значення з умови, щоб ці вирази приводили до відомих точних результатів для критичної поведінки при $d = 2$ ($\nu = \gamma = \infty$).

Вихідними виразами для аналізу є вирази для β - і γ -функцій m -векторної моделі (11) – (13) приведені в розділі 2. Так само, як це робилося в розділі 3, введемо в ці вирази доданки вищого порядку, як вільні параметри і змінюватимемо їх з метою забезпечення правильної асимптотики при $d = 2$ [42].

Таблиця 2 містить наші результати для критичного показника кореляційної довжини ν і критичного показника магнітної сприйнятливості γ . Ці результати отримані у трипетлевому наближенні за допомогою пересумовування Паде-Бореля вводячи додаткові па-

раметри у процедуру пересумовування у ділянці $2 < d < 3$ і без додаткових параметрів для $d > 3$. Наші результати, отримані із залученням додаткової інформації про розташування сингулярності в точці $d = 2$ узгоджуються із ренормгруповим результатом роботи [25], де було виявлено сингулярну поведінку критичних показників.

На рисунку 3 ми відклали значення критичного показника m -векторної моделі ν як функцію d для $m = 2, 3, 4, \infty$ [43]. У випадку $m = \infty$ ми відтворюємо точний результат для сферичної моделі [44] $\nu = (d - 2)^{-1}$.

Зазначимо, що, на відміну від моделі Ізинга, дані про критичну поведінку m -векторної моделі при довільному нецілому значенні вимірності d майже відсутні і результати, представлені в цьому розділі, дають на сьогодні найповніший опис такої задачі.

5. Заморожена слабо розведена m -векторна модель

Перейдемо тепер до аналізу розведеної m -векторної моделі, введеної в розділі 2 (див. формулу (3)), при довільній вимірності простору. Ренормгрупові функції цієї моделі отримані нами в дво- [31] та трипетлевому наближенні [35] при довільній вимірності простору і є поліномами за степенями перенормованих констант взаємодії λ_1, λ_2 . Через громіздкість відповідних виразів ми не записуватимемо їх тут у явному вигляді. Знову, для обчислення значень критичних показників на основі відомих β - і γ -функцій необхідно застосувати процедуру пересумовування. Нижче ми застосуємо процедуру пересумовування функцій двох змінних, що базується на простому узагальненні методу Паде-Бореля для однієї змінної [47]. Така процедура застосовувалась для дослідження різних моделей при цілій вимірності простору. Вихідним виразом є обрізаний степеневий розклад:

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i,j;i+j \leq L} c_{ij} \lambda_1^i \lambda_2^j. \quad (19)$$

Для такого поліному записується борелівський образ:

$$F(\lambda_1 t, \lambda_2 t) = \sum_{i,j;i+j \leq L} \frac{c_{ij}}{(i+j)!} (\lambda_1 t)^i (\lambda_2 t)^j. \quad (20)$$

Тоді борелівський образ $F(x, y)$ екстраполюється раціональною апроксимантою $F^A(x, y)$ і пересумована функція $f^R(\lambda_1, \lambda_2)$ представляється у вигляді інтегралу:

$$f^R(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^\infty F^A(\lambda_1 t, \lambda_2 t) e^{-t} dt. \quad (21)$$

Зупинімося на результатах, отриманих за допомогою такого підходу [31,35]. Як уже зазначалося вище, критична поведінка розведеної m -векторної моделі задається лагранжіаном (3) в границі $n \rightarrow 0$. В цьому випадку нас цікавить ділянка перенормованих констант взаємодії $\lambda_1 \geq 0$ і $\lambda_2 \leq 0$. Нерухомі точки визначаються розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_1}(\lambda_1^*, \lambda_2^*) &= \lambda_1^* f_{\lambda_1}(\lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0, \\ \beta_{\lambda_2}(\lambda_1^*, \lambda_2^*) &= \lambda_2^* f_{\lambda_2}(\lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Як видно із (22), гаусова нерухома точка $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0$ існує завжди. Для виявлення нетривіальних нерухомих точок, взагалі кажучи, необхідно застосовувати пересумовування. Приведені нижче результати отримані на підставі застосування схеми пересумовування (19)–(21) у дво- [31] та трипетлевому [35] наближенні.

Нерухома точка є стійкою і визначає критичну поведінку системи, якщо власні значення матриці стійкості $B = \partial \beta_{\lambda_i}(\lambda_1, \lambda_2) / \partial \lambda_j |_{\lambda_1^*, \lambda_2^*}$ є додатні (або мають додатню дійсну частину, коли вони комплексні). Відомо, що для достатньо великих значень m , $m > m_c$, ізотропна нерухома точка ($\lambda_1^* \neq 0, \lambda_2^* = 0$) є стійкою і критична поведінка розведеної системи співпадає з критичною поведінкою відповідної чистої системи. Коли кількість компонент параметра впорядкування зменшується, починаючи з маргінального значення m_c , ізотропна нерухома точка стає нестійкою і відбувається перехід (кросовер) до змішаної нерухомої точки ($\lambda_1^* \neq 0, \lambda_2^* \neq 0$). Ця нерухома точка описує нову ‘випадкову’ (random) критичну поведінку. Така картина узгоджується із критерієм Гарріса [45].

У двопетлевому наближенні маємо $m_c \simeq 2.01$ для $d = 3$ і $m_c \simeq 1.19$ для $d = 2$. Обчислення у вищих порядках теорії збурень приводять до результату $m_c < 2$ для $d = 3$. Найкраща теоретична оцінка для m_c у тривимірній теорії $m_c \simeq 1.945 \pm 0.002$ [46]. На рисунку 4 ми приводимо результати обчислення значень m_c в ділянці $2 < d < 4$ у дво- та трипетлевому наближенні. Для $d = 4$ маємо $m_c = 4$, результат другого порядку ϵ -розкладу $m_c = 4 - 4\epsilon$ [12]. Для $d = 3$ і $d = 2$ ми відтворюємо у двопетлевому наближенні результати [47]. Із рисунку 4 видно, що у ділянці вимірностей $3 < d < 4$ при розведенні виникає новий тип критичної поведінки і для цілих значень $m = 2, m = 3$.

Повернімося до найцікавішого випадку $m = 1$, коли нова критична поведінка спостерігається у всій ділянці $2 < d < 4$. Таблиця 3 містить значення критичних показників ν, γ та критичного показника питомої теплоємності α d -вимірних випадкових ізингівсь-

ких систем, отримані у дво- [31] і трипетлевого [35] наближеннях. Значення критичного показника кореляційної довжини як функція вимірності простору показано на рис. 5 у порівнянні з результатами інших підходів.

Як видно із таблиці, використання двопетлевого наближення приводить до певного обмеження згори на значення d . Для великих значень вимірності простору $d \geq 3.5$ появляється полюс в раціональних апроксимантах, що входять в інтегральні представлення β -функцій і відповідні інтеграли стають розбіжними. Перехід до трипетлевого наближення дозволяє розглянути всю ділянку вимірностей $2 < d < 4$.

Результати, отримані у ділянці $2.8 < d < 4$ методом масштабних полів [27] зображені зірочками на рисунку 5. Обмеження зліва на значення вимірностей простору спричинене тим, що обрізана система рівнянь для масштабних полів [27] не працює для вимірностей простору менших від $d = 2.8$. На рисунку також показаний найбільш точний на сьогодні результат тривимірної теорії у чотирипетлевого наближенні [49]. Слід зазначити, що у випадку розведеної моделі Ізинга не можна отримати надійних числових значень критичних показників для $d < 4$ за допомогою ε -розкладу. Виродженість рівнянь ренормалізаційної групи на однопетлевого рівні спричиняє те, що параметром розкладу у цьому випадку є $\sqrt{\varepsilon}$ [11,12]. Ряд $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу відомий для критичних показників в п'ятипетлевого наближенні [51,52]. Асимптотичні властивості ряду $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу невідомі і це не дозволяє використовувати його для отримання надійних числових значень критичних показників достатньо далеко від $d = 4$ [52,53]. Тим не менше, ми спробували обчислити значення критичного показника ν на підставі пересумованого за Паде-Борелем $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу [31,53]. Результати зображені на рисунку 5 ромбиками. Видно, що вони мають сенс лише поблизу $d = 4$.

Згідно критерію Гарріса [45] двовимірна розведена модель Ізинга характеризується тим самим набором критичних показників, що і чиста модель. Справедливість такого твердження для критичних показників доведена наявними точними результатами та результатами симуляцій Монте Карло (див., наприклад, один із найбільш вичерпних оглядів [50]). Наші результати у дво- і трипетлевого наближеннях для двовимірної теорії $\nu = 1.012$ і $\nu = 0.966$ різняться від онзагерівського розв'язку $\nu = 1$ на величини порядку кількох процентів. У тривимірній теорії найбільш точне значення критичного показника ν отримане з пересумованого чотирипетлевого наближення $\nu = 0.6701$ [49] добре узгоджується із даними таблиці 3

у дво- і трипетлевого наближеннях: $\nu = 0.678$, $\nu = 0.671$. Відносна точність визначення критичного показника парної кореляційної функції η нижча (порівн. дані таблиці 3 при $d = 2$ із онзагерівським $\eta(d = 2) = 1/4$ і при $d = 3$ із чотирипетлевым результатом $\eta(d = 3) = 0.0343$).

Із приведених даних видно, що точність отриманих результатів залежить від d і у випадку критичного показника кореляційної довжини зростає від величини порядку кількох процентів при $d = 2$ до долей процента при $d = 3$. Така ситуація (подібно як і у теорях з однією константою взаємодії, розглянутих вище) спричинена різницею у значеннях чисельних коефіцієнтів, що входять у ряди теорії збурень. Це, в свою чергу, спричинює зростання значення параметра розкладу – координати нерухомої точки. Тим не менше, отримані нами значення критичних показників розведеної моделі Ізинга при довільному d є на сьогодні найточнішими у порівнянні із даними, отриманими за допомогою інших підходів.

6. Висновки

У цій статті ми розглянули застосування методу теоретико-польової ренормалізаційної групи для дослідження критичної поведінки при нецілій вимірності простору. Приведені в роботі результати об'єднують спільний спосіб обчислень: масивне перенормування при нецілій вимірності простору [31,32]. Основною технічною трудностю, котра виникає при реалізації програми обчислень при фіксованому d , є необхідність визначення числових значень петлевих інтегралів. При $d = 2$ і $d = 3$ ці значення були знайдені Б. Нікелем, Д. Мейроном і Г. Бейкером (мол.) [28], при нецілих значеннях $0 \leq d \leq 4$ дво- та трипетлеві інтеграли отримані в [29]. В розділах 3 і 4 приведені обчислені в такій схемі значення критичних показників моделі Ізинга [38] та m -векторної моделі [43] при значеннях d між верхньою та нижньою критичними вимірностями. При цьому β - та γ -функції моделей отримані в трипетлевого наближенні для довільної вимірності простору [40]. Разом із отриманими в [29] числовими значеннями петлевих інтегралів ці вирази дозволяють провести аналіз критичної поведінки згаданих моделей при довільній вимірності простору. Для отримання надійних значень критичних показників в ділянці d поблизу нижньої критичної вимірності необхідно вдосконалити процедуру пересумовування асимптотичних рядів для ренормгрупових функцій. Тут з цією метою ми доповнили процедуру пересумовування трипетлевого ряду за Паде-Борелем пересумовуванням чотирипет-

левого ряду обираючи чотирипетлевий член за вільний параметр [40,43]. Цей вільний параметр визначається із відомих точних результатів для характеристик критичної поведінки моделей, що нас цікавлять. Однією із переваг нашого підходу є те, що він дозволяє розглянути всю ділянку вимірностей $1 < d < 4$ для моделі Ізинґа і $2 < d < 4$ для m -векторної моделі.

Більшість із робіт про дослідження критичної поведінки при довільному нецілому значенні d базуються на аналітичному продовженні за d , що має формальний характер (це не стосується, звичайно, критичної поведінки на фрактальних ґратках). Зокрема, наш підхід, так само як техніка ϵ -розкладу базується на аналітичному продовженні петлевих інтегралів $\int d\vec{k} \sim \int k^{d-1} dk$. В роботі [54] навіть піддавався сумніву той факт, що виконуючи таке аналітичне продовження можна описати ферромагнітне впорядкування для нецілих d . Таким чином, добре співпадіння наших даних для моделі Ізинґа із даними отриманими іншими методами (у ділянках d , де ці методи застосовні) є ще одним непрямым свідченням взаємної відповідності між ‘просторовими вимірностями’, що виникають в різних схемах.

Слід також зазначити, що в той час як для моделі Ізинґа і m -векторної моделі запропонований нами метод дослідження є одним із можливих способів аналізу критичної поведінки, у випадку розведеної моделі Ізинґа перенормування при фіксованому d є єдиним у теоретико-польовій ренормгруповій схемі, що дозволяє отримати надійні значення критичних показників при довільній вимірності простору.

На закінчення хочу подякувати моїм колегам: Миколі Шпоту, Тарасові Крохмальському, Тарасові Одушкіну, Тарасові Яворському та Андрієві Стосику за співпрацю у виконанні різних етапів представлених тут досліджень.

Література

1. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Доклады АН СССР **103**, 203 (1955); *ibid* **103**, 391 (1955); Nuovo.Cim. **3**, 845 (1956).
2. E. C. G. Stueckelberg, A. Petermann, Helv. Phys. Acta **25**, 499 (1953).
3. M. Gell-Mann, F. E. Low, Phys. Rev. **95**, 1300 (1954).
4. Див., наприклад, D.V. Shirkov, in: *Renormalization Group*, Eds. D. Shirkov, D. Kazakov, and A. Vladimirov (World Scientific, Sin-

- gapore, 1988) p.1; D.V. Shirkov, in: *Renormalization Group'91*, Eds. D.V. Shirkov and V.B. Priezzhev (World Scientific, Singapore, 1992) p.1.
5. Див., наприклад, E. Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, in *Phase transitions and critical phenomena* **6**, Eds. C.Domb and M.S.Green (Academic Press, New York, 1976) p.125; D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1984); J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena* (Oxford University Press, Oxford, 1989).
 6. K. G. Wilson, M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28** 240 (1972).
 7. D. J. Wallace, R. K. P. Zia, Phys. Rev. Lett. **43** 808 (1979).
 8. D. Forster, A. Gabriunas, Phys. Rev. A. **23**, 2627 (1981).
 9. D. Forster, A. Gabriunas, Phys. Rev. A. **24**, 598 (1981).
 10. A. D. Bruce A.D., D. J. Wallace, Phys. Rev. Lett. **47**, 1743 (1981).
 11. Д. Е. Хмельницкий, Журн. Эксп. Теор. Физ. **68**, 1960 (1975).
 12. G. Grinstein, A. Luther, Phys. Rev. B **13**, 1329 (1976).
 13. M. E. Fisher, D. S. Gaunt, Phys. Rev. **133**, A224 (1964).
 14. S. L. Katz, M. Droz, J. D. Gunton, Phys. Rev. B **15**, 1597 (1977).
 15. J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, J. Phys. (Paris) **48**, 19 (1987).
 16. B. Bonnier, Y. Leroyer, C. Meyers, Phys. Rev. B **37**, 5205 (1988).
 17. B. Bonnier, Y. Leroyer, C. Meyers, Phys. Rev. B **40**, 8961 (1989).
 18. B. Bonnier, M. Hontebeyrie, J. Phys. (Paris) **11**, 5205 (1991).
 19. M. A. Novotny, Europhys. Lett. **17**, 297 (1992); M. A. Novotny, Phys. Rev. B **46**, 2939 (1992).
 20. Y. Gefen, B. Mandelbrot, A. Aharony, Phys. Rev. Lett. **45**, 855 (1980).
 21. B. B. Mandelbrot, *Fractals: form, chance, and dimension* (W.H. Freeman and Co, New York, 1977); *The fractal geometry of nature* (W.H.Freeman and Co, New York, 1983).
 22. Y. Wu, B. Hu, Phys. Rev. A **35**, 1404 (1987).
 23. B. Hu, Phys. Rev. B **33**, 6503 (1986).
 24. G. Parisi G. in: *Proceedings of the Cargrèse Summer School*, 1973; J. Stat. Phys. **23**, 49 (1980).
 25. J. L. Cardy, H. W. Hamber, Phys. Rev. Lett. **45**, 499 (1980).
 26. А. Э. Филиппов, А. В. Радиевский, Журн. Эксп. Теор. Физ. **102**, 1899 (1992); S. A. Breus, A. E. Filippov, Physica A **192**, 486 (1992).
 27. K. E. Newman, E. K. Riedel, Phys. Rev. B **25**, 264 (1982).
 28. B. G. Nickel, D. I. Meiron, G. A. Baker, Jr., *Univ. of Guelph Report* (Guelph, 1977).

29. Yu. Holovatch, T. Krokmal'skii, Journ. Math. Phys. **35**, 3866 (1994).
30. J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, Phys. Rev. B **21**, 3976 (1980); R. Guida, J. Zinn-Justin, J. Phys. A **31**, 8103 (1998).
31. Yu. Holovatch, M. Shpot, J. Stat. Phys. **66**, 867 (1992); Вопросы Атомн. Науки и Техники. **24**, 48 1992; in *Renormalization Group'91*, Eds. D.V. Shirkov and V.B. Priezzhev (World Scientific, Singapore, 1992) p.45.
32. Yu. Holovatch, in: *Lecture Notes in Physics* **477** (Springer Verlag, Berlin, 1996) p.224; Cond. Matt. Phys. (Lviv) **3**, 33 (1994).
33. Тут і нижче $\{\lambda_0\}$, $\{\lambda\}$ означає весь набір констант взаємодії, що входять у лагранжіан. Так, для лагранжіана (1) $\{\lambda_0\} = \lambda_0$ а для лагранжіана (3) $\{\lambda_0\} = \lambda_{0,1}, \lambda_{0,2}$. $\Gamma_{\lambda_i}^{(4)}$ означає частину чотиричастинкової функції, що відповідає своєю симетрією константи λ_i .
34. Тут ми перейшли до нової перенормованої змінної u і β -функції β_u щоб ввести зручний чисельний масштаб у якому перші два коефіцієнти функції β_u рівні -1 і 1.
35. Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, Cond. Matt. Phys. (Lviv) **11**, 87 (1997); J. Stat. Phys., **92**, 785 (1998); in *Proc. 11th Sem. Phase Transitions and Crit. Phenomena* (W.Trzebiatowski Inst. of Low Temp. and Struct. Research, Wroclaw, 1998) p. 146.
36. G. H. Hardy, *Divergent Series* (Oxford University, Oxford, 1948).
37. L. Schäfer, C. von Ferber, U. Lehr, B. Duplantier, Nucl. Phys. B. **374**, 473 (1992).
38. Yu. Holovatch, Теор. Мат. Физ. **96**, 482 (1993).
39. B. G. Nickel, J. Math. Phys. **19**, 542 (1977).
40. Yu. Holovatch, Int. Journ. Mod. Phys. A. **8**, 5329 (1993); *Saclay preprint SphT/92-123*.
41. G. A. Baker, Jr., B. G. Nickel, D. I. Meiron, Phys. Rev. B **17**, 1365 (1978).
42. N. D. Mermin, P. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966); P. Hohenberg, Phys. Rev. **158**, 383 (1967).
43. Yu. Holovatch, Ferroelectrics **192**, 55 (1997).
44. M. Кас, Т. N. Berlin, Phys. Rev. **86**, 821 (1952).
45. A. B. Harris, J. Phys. C **7**, 1671 (1974).
46. C. Bervillier, Phys. Rev. B **34**, 8141 (1986).
47. G. Jug, Phys. Rev. B **27**, 609 (1983).
48. С. Жауаракаш, Н. J. Katz, Phys. Rev. B **16**, 3987 (1977); Б. Н. Шалаев, Журн. Эксп. Теор. Физ. **73**, 2301 (1977).
49. I. O. Mayer, A. I. Sokolov, B. N. Shalaev, Ferroelectrics **95**, 93

- (1989); I. O. Mayer, J. Phys. A **22**, 2815 (1989).
50. B. N. Shalaev, Phys. Rep. **237**, 129 (1994).
51. B. N. Shalaev, S. A. Antonenko, A. I. Sokolov, Phys. Lett. A **230**, 105 (1997)
52. R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, Письма в Журн. Эксп. Теор. Физ. **69**, 698 (1999); [JETP Lett. **69**, 747 (1999)].
53. R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, Журн. Фіз. Досл. **2**, 213 (1998).
54. G. A. Baker Jr., L. P. Benofy, J. Stat. Phys. **29**, 699 (1982).

РИСУНКИ І ТАБЛИЦІ

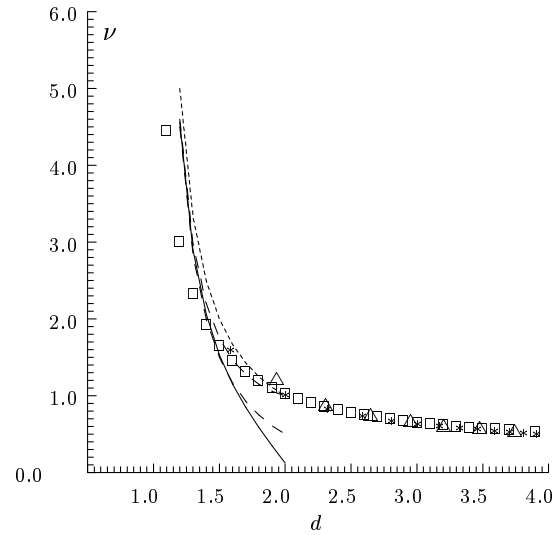


Рис. 1. Критичний показник кореляційної довжини ν як функція вимірності d . Квадратиками показані наші результати, отримані за допомогою ренормгрупового підходу при фіксованій вимірності простору із врахуванням точних даних [38], зірочки показують результати [14], трикутники показують дані робіт [26]. Лініями зображені результати $\varepsilon' = d - 1$ розкладу для моделі майже плоскої поверхні поділу. Згори вниз: одно- [7], три- [8], дво- [7] і чотипетлеве [9] наближення.

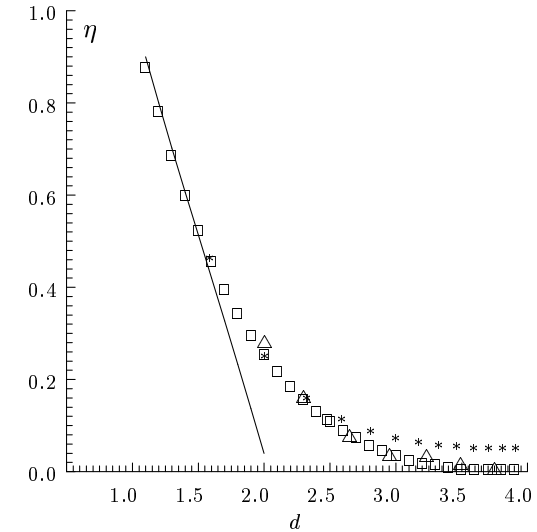


Рис. 2. Критичний показник парної кореляційної функції η як функція вимірності d . Квадратиками показані наші результати, отримані за допомогою ренормгрупового підходу при фіксованій вимірності простору із врахуванням точних даних [38], зірочки показують результати [14], трикутники показують дані робіт [26]. Лінія отримана із розв'язку для моделі краплини [10].

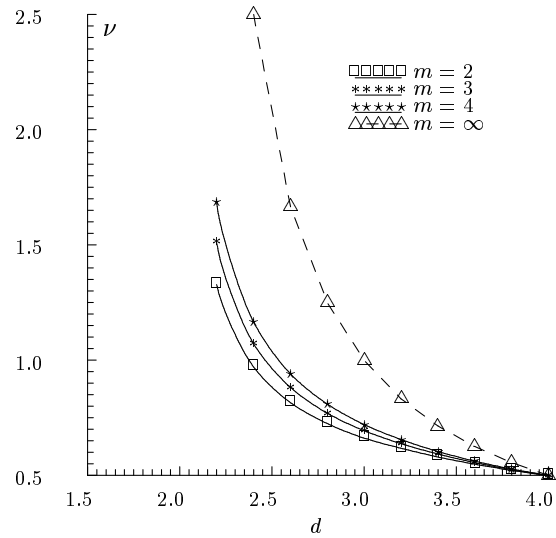


Рис. 3. Критичний показник парної кореляційної функції ν як функція вимірності d для $m = 2, 3, 4, \infty$ [43].

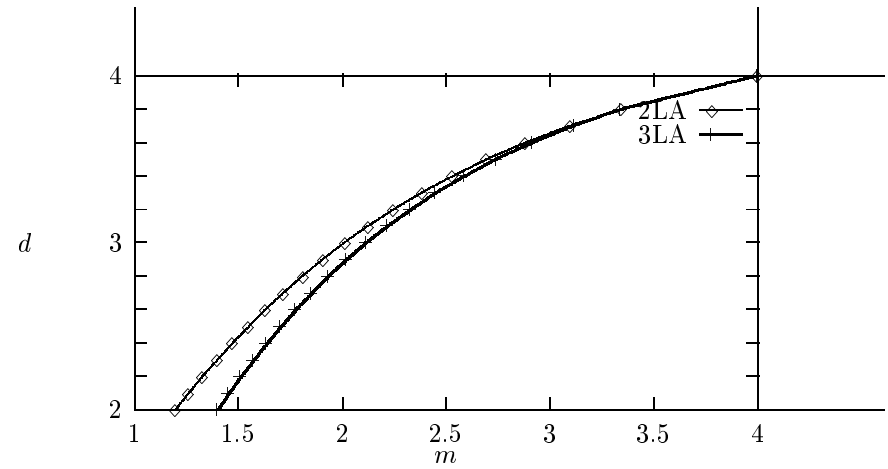


Рис. 4. Значення маргінальної вимірності спіну m_c як функція вимірності простору у дво- [31] (квадратики) і трипетлевого [35] (хрестики) наближеннях.

Табл. 1. Критичні показники ν, η отримані у ренормгруповому підході при фіксованій вимірності [38] (стовпчики 2,3) у порівнянні з даними, отриманими за допомогою інших підходів (див. текст).

d	Дані з роботи [15]		Дані з роботи [18]		Дані з роботи [19]			
	ν	η	ν	η	ν	η		
1.250	2.593	.728	1.5-4.5	.30-1.00	1.7-3.4	.758-.83	3.6832-3.7750	.7532-.7544
1.375	1.983	.616	1.6-2.6	.30-0.80	1.6-2.9	.635-.679	2.3535-2.3747	.6362-.6398
1.500	1.627	.519	1.45-1.85	.35-0.65	1.49-1.84	.567-.631	1.7547-1.7596	.5312-.5328
1.650	1.353	.420	1.30-1.44	.30-0.50	1.27-1.38	.450-.507	1.3780-1.3795	.4226-.4238
1.750	1.223	.363	1.20-1.26	.30-0.40	1.18-1.26	.396-.425	1.2234-1.2255	.3630-.3634
1.875	1.098	.303	1.09-1.11	.27-0.33	1.11-1.13	.312-.322	1.0902-1.0906	.3006-.3010
2.000	1.000	.250	1.0	.25				.247-.253

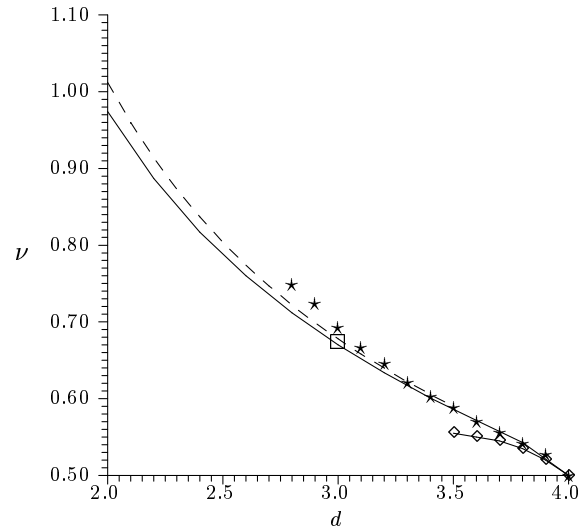


Рис. 5. Значення критичного показника кореляційної довжини слабо розведеної замороженої моделі Ізинґа як функція вимірності простору. Штрихова крива – ренормгруповий підхід при фіксованій вимірності простору, пересумоване двопетлеве наближення [31], суцільна крива – ренормгруповий підхід при фіксованій вимірності простору, пересумоване трипетлеве наближення [35]. Зірочки – результати, отримані методом масштабних полів [27], ромбики – пересумований [31] $\varepsilon^{1/2}$ -розклад [48]. Квадратиком зображений найточніший із відомих аналітичних результатів для тривимірної теорії [49].

Табл. 2. Значення критичних показників ν , γ як функції d для $m = 2, 3, 4$ [43].

d	$m = 2$		$m = 3$		$m = 4$	
	ν	γ	ν	γ	ν	γ
2.0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2.1	1.850	3.510	2.149	4.067	2.443	4.624
2.2	1.329	2.540	1.512	2.884	1.687	3.219
2.3	1.103	2.122	1.235	2.372	1.358	2.610
2.4	.971	1.878	1.072	2.072	1.166	2.253
2.5	.881	1.713	.962	1.869	1.036	2.013
2.6	.816	1.593	.882	1.721	.941	1.837
2.7	.765	1.500	.820	1.606	.868	1.701
2.8	.725	1.425	.770	1.513	.810	1.592
2.9	.691	1.363	.729	1.437	.762	1.502
3.0	.662	1.310	.694	1.371	.721	1.426
3.1	.639	1.266	.665	1.317	.687	1.361
3.2	.618	1.226	.638	1.267	.656	1.303
3.3	.598	1.190	.615	1.223	.629	1.251
3.4	.580	1.156	.593	1.182	.604	1.204
3.5	.564	1.124	.574	1.144	.582	1.161
3.6	.549	1.095	.556	1.110	.562	1.123
3.7	.535	1.069	.540	1.079	.544	1.087
3.8	.522	1.044	.525	1.050	.528	1.056
3.9	.511	1.022	.512	1.025	.514	1.027

Табл. 3. Значення критичних показників ν , η , α як функції d для слабо розведеної замороженої моделі Ізинґа. Двопетлеве (колонки 2,3,4) [31] і трипетлеве (колонки 5,6,7) [35] наближення.

d	ν	η	α	ν	η	α
2.0	1.012	.198	-0.024	0.966	0.097	0.067
2.1	0.960	.167	-0.016	0.923	0.084	0.062
2.2	0.914	.141	-0.011	0.884	0.073	0.056
2.3	0.873	.119	-0.007	0.848	0.064	0.049
2.4	0.837	.100	-0.009	0.816	0.055	0.041
2.5	0.804	.083	-0.010	0.787	0.047	0.033
2.6	0.774	.069	-0.012	0.760	0.040	0.025
2.7	0.747	.057	-0.017	0.735	0.034	0.016
2.8	0.722	.047	-0.022	0.712	0.028	0.007
2.9	0.699	.038	-0.027	0.691	0.023	-0.002
3.0	0.678	.031	-0.034	0.671	0.019	-0.012
3.1	0.658	.024	-0.040	0.652	0.015	-0.021
3.2	0.640	.019	-0.048	0.634	0.012	-0.030
3.3	0.622	.014	-0.053	0.618	0.009	-0.038
3.4	0.606	.010	-0.060	0.602	0.006	-0.046
3.5				0.587	0.004	-0.054
3.6				0.572	0.002	-0.061
3.7				0.558	0.001	-0.066
3.8				0.544	0.000	-0.066

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Юрій Васильович Головач

МАСИВНЕ ПЕРЕНОРМУВАННЯ ПРИ НЕЦІЛІЙ ВИМІРНОСТІ ПРОСТОРУ

Роботу отримано 30 вересня 1999 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу статистичної теорії
конденсованого стану

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені