

Інститут фізики конденсованих систем Національної академії наук України

Інститут фізики конденсованих систем Національної академії наук України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

ДУВІРЯК Аскольд Андрійович

УДК 530.12; 531.314: 530.145; 539.12

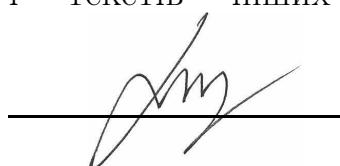
## ДИСЕРТАЦІЯ

### ЛАГРАНЖІАНИ З ЧАСОВОЮ НЕЛОКАЛЬНІСТЮ ТА РЕЛЯТИВІСТИЧНІ КВАНТОВІ ЗАДАЧІ КІЛЬКОХ ТІЛ

01.04.02 – теоретична фізика  
(104 – фізика та астрономія)  
10 – природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 А.А. Дувіряк

Науковий консультант ТРЕТЬЯК Володимир Іванович, д.ф.-м.н., с.н.с.

Львів – 2017

## АНОТАЦІЯ

*Дувірюк А.А.* Лагранжіані з часовою нелокальністю та релятивістичні квантові задачі кількох тіл. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика» (104 – Фізика та астрономія). – Інститут фізики конденсованих систем Національної академії наук України, Львів, 2017.

Робота присвячена проблемі квантування часо-нелокальної релятивістичної задачі 2-х і 3-х тіл в рамках формалізму інтегралів дії типу Фоккера та його теоретико-польового аналогу.

Отримано широкий клас двочастинкових релятивістичних систем із взаємодією польового типу шляхом заміни в інтегралах дії типу Фоккера симетричної функції Гріна рівняння Даламбера не запізнену чи випередну. Побудовано коваріантні лагранжів та гамільтонів описи таких часо-асиметричних систем. Приклади із взаємодією, що переноситься безмасовими полями довільного цілого спіну – скалярною, електромагнетною (векторною) і гравітаційною ( $s = 2$ ) – проінтеровани у квадратурах. Методом динамічної алгебри ці системи проквантовано, та отримано спектри зв'язаних; спінові ефекти враховано евристично.

Знайдено зв'язок фоккерівської дії Рівакоби-Вейсса з ефективною векторнопольовою теорією конфайнменту з вищими похідними. Квантуванням часо-асиметричної версії моделі отримано майже лінійні траекторії Редже з бажаним випадковим виродженням. Нахил траекторій залежить від аромату, але вживання скалярно-польового аналогу дії Рівакоби-Вейсса відновлює універсальність.

Розроблено метод майже колових орбіт для квантування часо-симетричних фоккерівських систем, інваріантних щодо групи Арістотеля. Цим охоплюються як релятивістичні, так і нерелятивістичні системи.

Розвинуто теоретико-польовий аналог фоккерівського формалізму. Лагранжіан взаємодіючих полів матерії переформульовано шляхом редукції полів-медіаторів взаємодії. Редукований лагранжіан містить нелокальні члени, в яких

струми матерії взаємодіють безпосередньо через функцію Гріна поля-медіатора. Квазірелятивістичним розкладом цей лагранжіан зведено до одно-часової форми, отримано гамільтоніан, прокvantовано, та виведено двочастинкове рівняння Дірака (2ЧРД) з потенціалами взаємодії різної лоренцової структури.

Цей підхід апробовано на частово редукованій спінорній електродинаміці. Отримано рівняння Брайта ти чисельний спектр ортопозитронію для різних значень константи взаємодії, аж до її критичного значення.

Запропоновано блок-матричне представлення та псевдо-пертурбативний метод розв'язування 2ЧРД, знайдено нові наближені та точно розв'язні приклади. Показано, що деякі з них можуть бути основою потенціальної моделі мезонів.

Розкладом за константою взаємодії і варіаційним методом отримано релятивістичні двочастинкові інтегральні рівняння з ядром, вираженим через пропагатор поля-медіатора. Схему апробовано на моделі Юкави, і застосовано до нестандартних випадків тахіонного поля-медіатора, поля з вищими похідними, і нелінійного узагальнення моделі Віка-Куткоскі. У найнижчому наближенні теорії  $\varphi^3$  по-парні кулонівські потенціали доповнюються 3-точковим кластерним потенціалом логарифмічного росту, що забезпечує конфайнмент 3-частинкової системи.

Останній приклад пов'язано із спінорною хромодинамікою. Для цього в її лагранжіані ітеративно зредуковано глюонне поле, і отримано вищі поправки до взаємодії 1-глюонного обміну. 1-ша поправка виражається через похідну від згаданого вище 3-точкового потенціалу. В 2-му наближенні з'являється 4-точкова поправка. Обидві взаємодії є кулоно-подібні на великих відстанях.

Представлений підхід призначений для опису таких кілька-частинкових систем, в яких релятивістична кінематика і запізнення взаємодії є істотними, але радіаційними ефектами можна знехтувати: важких йонів, легких ядер, важких та легких гадронів тощо. Підхід може спростити обчислення спектру таких систем, або забезпечити попередні результати у випадках, коли послідовний теоретико-польовий опис взаємодії (ще) не відомий.

Ключові слова: інтеграли дії типу Фоккера, часова нелокальність, потенціальні моделі, двочастинкові рівняння Дірака.

## ABSTRACT

*Duviryak A.A.* Lagrangians with time nonlocality and relativistic quantum few-body problems. – Qualifying scientific work on the manuscript.

Thesis for the Degree of Doctor of Sciences in Physics and mathematics on the speciality 01.04.02 “Theoretical Physics” (104 – Physics and Astronomy). – Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2017.

Thesis is devoted to a quantization problem of time-nonlocal 2- and 3-body relativistic systems within the Fokker action formalism and field-theoretical analogue.

A wide class of two-particle relativistic systems with field-type interactions is derived with Fokker-action integrals in which the symmetric Green function of Dalembert equation is replaced by the retarded or advanced one. Covariant Lagrangian and Hamiltonian descriptions of such time-asymmetric systems are built. Examples with interactions mediated by massless fields of arbitrary integer spin  $s$ , including scalar, electromagnetic (vector) and gravitation ( $s = 2$ ) interactions, are integrated in quadratures. A quantization and bound state spectra of these systems are achieved via the dynamical algebra method; spin effects are taken into account heuristically.

The Rivacoba-Weiss action of Fokker type is shown related to effective higher derivative vector field theory of quark binding. The time-asymmetric version of the model is quantized. It leads to close-to-linear Regge trajectories with desirable accidental degeneracy. Since slopes of trajectories are flavor-dependent, the scalar interaction counterpart of the Rivacoba-Weiss action is used to provide the universality.

The almost-circular-orbit (ACO) method has been elaborated for a quantization of time-symmetric Fokker-type systems which are invariant under the Aristotle group. Thereby both relativistic and nonrelativistic systems are embraced.

A field-theoretical analogue of the Fokker-action formalism is developed. The Lagrangian of matter fields with various Lorentz couplings is reformulated by solving partially the mediating field equations. The reduced Lagrangian contains nonlocal interaction terms in which the mediating-field symmetric Green functions is sandwi-

ched between the matter particle currents. A quasi-relativistic expansion of this Lagrangian leads to a single-time Hamiltonian which quantization yields a two-body Dirac equation (2BDE) with interaction potentials of various Lorentz structures.

This approach is approved on the partially reduced spinor electrodynamics: Breit equation is derived, and the non-perturbative orthopositronium spectrum is calculated numerically for different values of coupling constant, up to the critical value.

The block-matrix representation and pseudo-perturbative solving method for 2BDE are proposed and used to derive new approximately and exactly solvable examples. Few of them are shown appropriate as a base of potential models of mesons.

A coupling constant expansion and variational method yield relativistic two-body integral equations, the kernel of which is expressed via mediating-field propagator. The scheme is approved on the scalar Yukawa model, then applied to nonstandard cases of tachyon mediating field, higher-derivative mediator, and to a non-linear generalization of Wick-Cutkoski model. In lower-order approximations of  $\varphi^3$ -theory pair-wise Coulomb potentials appear complemented by 3-point cluster potential of logarithmic growth. This result may be related to the confinement problem.

Finally, the gluon gauge field is reduced iteratively in the Lagrangian of spinor chromodynamics. In such a way higher-order corrections to a one-gluon exchange interaction are derived. The 1st-order correction is described by a derivative of the cluster 3-point potential mentioned above. In the 2nd-order approximation a 4-point potential arises. Both interactions are Coulomb-like at large distances.

The presented approach is suitable for a description of those few-body systems, in which the relativistic kinematics and the retardation of interaction are essential but radiation effects are negligible: heavy ions, light nuclei, heavy and light hadrons etc. The approach can simplify a calculation of spectra of such systems, or it may provide preliminary results in those cases, where a consistent field-theoretical description of interaction is not (yet) known.

Keywords: Fokker-action integrals, time nonlocality, potential models, two-body Dirac equation.

## Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Duviryak A. A., Tretyak V. I. Classical relativistic two-body dynamics on the light cone // *Condens. Matter Phys.* 1993. № 1. P. 92–107.
2. Duviryak A. Symmetries of the relativistic two-particle model with scalar-vector interaction // *J. Nonlinear Math. Phys.* 1996. Vol. 3, no. 3-4. P. 372–378.
3. Duviryak A. The time-asymmetric Fokker-type integrals and the relativistic Hamiltonian mechanics on the light cone // *Acta Phys. Pol. B*. 1997. Vol. 28, no. 5. P. 1087–1109.
4. Duviryak A. The two-body time-asymmetric relativistic models with field-type interaction // *Gen. Relat. Gravit.* 1998. Vol. 30, no. 8. P. 1147–1169.
5. Duviryak A., Shpytko V., Tretyak V. Isotropic forms of dynamics in the relativistic direct interaction theory // *Condens. Matter Phys.* 1998. Vol. 1, no. 3(15). P. 463–512.
6. Duviryak A. Fokker-type confinement models from effective Lagrangian in classical Yang-Mills theory // *Int. J. Mod. Phys. A*. 1999. Vol. 14, no. 28. P. 4519–4547.
7. Duviryak A. The two-particle time-asymmetric relativistic model with confinement interaction and quantization // *Int. J. Mod. Phys. A*. 2001. Vol. 16, no. 16. P. 2771–2788.
8. Duviryak A., Shpytko V. Relativistic two-particle mass spectra for time-asymmetric Fokker action // *Rep. Math. Phys.* 2001. Vol. 48, no. 1-2. P. 219–226.
9. Duviryak A., Darewych J. W. Exact few-particle eigenstates in partially reduced QED // *Phys. Rev. A*. 2002. Vol. 66, no. 3. 032102. – 20 p.
10. Duviryak A. Heuristic models of two-fermion relativistic systems with field-type interaction // *J. Phys. G*. 2002. Vol. 28, no. 11. P. 2795–2809.
11. Duviryak A., Darewych J. W. Variational Hamiltonian treatment of partially reduced Yukawa-like models // *J. Phys. A*. 2004. Vol. 37, no. 34. P. 8365–8381.
12. Duviryak A., Darewych J. W. Variational wave equations of two fermions interacting via scalar, pseudoscalar, vector, pseudovector and tensor fields // *Cent. Eur. J. Phys.* 2005. Vol. 3, no. 4. P. 467–483.
13. Duviryak A. Large-j expansion method for two-body Dirac equation // *Symmetry Integr. Geom.* 2006. Vol. 2. 029. – 12 p.
14. Дувіряк А. Застосування двочастинкового рівняння Дірака у спектроскопії мезонів // Журн. фіз. дослідів. 2006. Т. 10, № 4. С. 290–314.
15. Duviryak A. Solvable two-body Dirac equation as a potential model of light mesons // *Symmetry Integr. Geom.* 2008. Vol. 4. 048. – 19 p.
16. Дувіряк А. Потенціальна модель мезонів у формалізмі інтегралів дії типу Фоккера // *Фіз. зб. НТШ*. 2008. Т. 7. С. 533–541.
17. Darewych J. W., Duviryak A. Confinement interaction in nonlinear generalizations

- of the Wick-Cutkosky model // *J. Phys. A.* 2010. Vol. 43, no. 48. 485402. – 13 p.
18. *Duviryak A., Darewych J.* On confinement interactions in scalar generalizations of the dipole model // *J. Phys. Stud.* 2011. Vol. 15, no. 1. 1101. – 9 p.
  19. *Darewych J. W., Duviryak A.* Interparticle forces in QFTs with nonlinear mediating fields // *Few Body Syst.* 2011. Vol. 50, no. 1-4. P. 299–301.
  20. *Zagladko I., Duviryak A.* Partially reduced formulation of scalar Yukawa model: Poincaré-invariance and unitarity // *J. Phys. Stud.* 2012. Vol. 16, no. 3. 3101. – 10 p.
  21. *Darewych J. W., Duviryak A.* Analysis of inter-quark interactions in classical chromodynamics // *Cent. Eur. J. Phys.* 2013. Vol. 11, no. 3. P. 336–344.
  22. *Duviryak A.* Quantization of almost-circular orbits in the Fokker action formalism // *Eur. Phys. J. Plus.* 2014. Vol. 129, no. 12. 267. – 20 p.
  23. *Zagladko I., Duviryak A.* Bound states in the tachyon exchange potential // *Electron. J. Theor. Phys.* 2014. Vol. 11, no. 31. P. 141–148.
  24. *Duviryak A.* Regge trajectories in the framework of the relativistic action-at-a-distance theory // *J. Phys. Stud.* 2015. Vol. 19, no. 1/2. 1004. – 14 p.
  25. *Duviryak A., Shpytko V., Tretyak V.* Exactly solvable two-particle models in the isotropic forms of relativistic dynamics // Internat. Workshop “Hadrons-94”. Proc. Contributed papers / Ed. by G. Bugrij, L. Jenkovsky, E. Martynov. Uzhgorod, Ukraine, 7-11 September 1994. P. 353–362.
  26. *Duviryak A.* Classical mechanics of relativistic particle with colour // *Proc. Inst. of Math. NAS of Ukraine.* 2000. Vol. 30, Part 2. P. 473–480.
  27. Дувіряк А.А. Про точно розв'язувані релятивістські моделі двох частинок, пов'язані з класичною теорією поля // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 3-4 січня 2001. *Журн. фіз. дослідівс.* 2001. Т. 5, № 1. С. 103.
  28. *Duviryak A., Darewych J. W.* Variational wave equations for fermions interacting via scalar and vector fields // XVIII European Conference on Few-Body Problems in Physics. Book of Abstracts / Ed. by R. Krivec, B. Golli, M. Rosina, S. Širca. Bled, Slovenia, 8-14 September 2002. P. 103.
  29. *Duviryak A.* Heuristic models of two-fermion relativistic systems with field-type interaction // XVIII European Conference on Few-Body Problems in Physics. Book of Abstracts / Ed. by R. Krivec, B. Golli, M. Rosina, S. Širca. Bled, Slovenia, 8-14 September 2002. P. 207.
  30. *Duviryak A., Darewych J. W.* Variational wave equations for fermions interacting via scalar and vector fields // Few-Body Problems in Physics '02. Proceedings of the XVIII European Conference on Few-Body Problems in Physics / Ed. by R. Krivec, B. Golli, M. Rosina, S. Širca. Bled, Slovenia, 8-14 September 2002. *Few-Body Syst. Suppl.* 2002. V. 14. P. 217-218.
  31. *Duviryak A.* Heuristic model of two-quark relativistic system with scalar-vector

- interaction // Few-Body Problems in Physics '02. Proceedings of the XVIII European Conference on Few-Body Problems in Physics / Ed. by R. Krivec, B. Golli, M. Rosina, S. Širca. Bled, Slovenia, 8-14 September 2002. *Few-Body Syst. Suppl.* 2002. V. 14. P. 415-416.
32. Duviryak A. Heuristic wave equations for relativistic two-body systems // 17th Internat. IUPAP Conf. on Few-Body Problems in Physics. Book of Abstracts / Ed. by W. Glöckle, T. Pulis, W. Tornow. Durham, North Carolina, USA, 5-10 June 2003. P. 151–152.
  33. Duviryak A., Darewych J. W. Variational wave equations from partially reduced QFT // 17th Internat. IUPAP Conf. on Few-Body Problems in Physics. Book of Abstracts / Ed. by W. Glöckle, T. Pulis, W. Tornow. Durham, North Carolina, USA, 5-10 June 2003. P. 155.
  34. Duviryak A. Heuristic wave equations for relativistic two-body systems // Few-Body Problems in Physics: Proceedings of the Seventeenth International IUPAP Conference on Few-Body Problems in Physics (Few Body 17) / Ed. by W. Glöckle, W. Tornow. Durham, North Carolina, USA, 5-10 June 2003. P. S269–S271.
  35. Дувіряк А., Даревич Ю. Рівняння типу Брейта у формалізмі редукованої КТП // Тези доповідей наукової конференції “Сучасні проблеми квантової теорії” присвяченої 100-річчю від дня народження Зіновія Храпливого. Тернопіль, 15-16 березня 2004. С. 49–50.
  36. Дувіряк А. Метод 1/j-роздріблення для 2-частинкового рівняння Дірака // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 4-5 січня 2006. *Журн. фіз. дослідж.* 2006. Т. 10, № 1. С. 75.
  37. Duviryak A. 2-body Dirac equation and light meson spectra // 2nd Internat. Conf. on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics. Kharkov, Ukraine, 19-23 September 2006. P. 64.
  38. Дувіряк А. Коваріантна форма рівняння Брайта та його узагальнень // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 4-5 січня 2008. *Журн. фіз. дослідж.* 2008. Т. 12, № 1. С. 1998-5.
  39. Дувіряк А.А. Двочастинкове рівняння Дірака: методи, моделі та застосування у спектроскопії мезонів // Всеукраїнський семінар з теоретичної та математичної фізики ТМФ'2009. До 80-річчя професора А.В.Свідзинського. Матеріали. Луцьк, 27 лютого - 01 березня 2009. С. 38–42.
  40. Загладько І.М., Дувіряк А.А. Пуанкаре-інваріантність моделей типу Юкави у формалізмі частково редукованої теорії поля // Збірка тез X Всеукраїнської школи-семінару і конкурсу молодих вчених у галузі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини / ІФКС НАН України. Львів, 3-4 червня 2010. С. 40.
  41. Даревич Ю., Дувіряк А. Про утримуючі взаємодії в нелінійній моделі Віка-

- Куткоскі // Матеріали 5-ї Міжнар. конф. РНАОМ-2010. Луцьк, Шацькі озера, 1-5 червня 2010. С. 183–184.
42. *Duviryak A., Darewych J. W.* On the confinement interactions in partially reduced Yukawa-like models // 3<sup>rd</sup> Workshop on Current Problems in Physics. Abstracts. Lviv, Ukraine, 5-9 July 2010. *J. Phys. Stud.* 2010. V. 14, no. 3. P. 3998-1.
  43. *Darewych J. W., Duviryak A., Zagladko I.* Canonical description and Poincaré-invariance of nonlocal Yukawa-like models // 3rd Internat. Conf. on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics. Book of Abstracts. Kharkov, Ukraine, 29 August – 2 September 2011. P. 39.
  44. *Darewych J. W., Duviryak A.* Interquark interactions in a reformulated chromodynamics // Sci. Conf. “New Trends in Physics and Astrophysics” (dedicated to Prof. I. O. Vakarchuk on the occasion of his 65th birthday). Program and Abstracts. Lviv, 15-16 March 2012. P. 10.
  45. Загладъко І.М., Дувіряк А.А. Модель типу Юкави в теорії прямих взаємодій: проблеми Пуанкаре-інваріантності та унітарності матриці розсіяння // Матеріали всеукраїнської наукової конференції “Актуальні проблеми теоретичної, експериментальної та прикладної фізики”. Тернопіль, 20-11 вересня 2012. С. 143–144.
  46. Загладъко І.М., Дувіряк А.А. Розсіяння скалярних частинок з тахіонною взаємодією // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 3-4 січня 2013. *Журн. фіз. досліджен.* 2013. Т. 17, № 1. С. 1998-4.
  47. Загладъко І., Дувіряк А. Взаємодія скалярних частинок через тахіонне поле // *Фіз. зб. НТШ.* 2014. Т. 9. С. 121–137.
  48. *Duviryak A.* Almost-circular orbit method for quantization of the Fokker action integrals // 7<sup>th</sup> Workshop on Current Problems in Physics. Abstracts. Lviv, Ukraine, 8-9 July 2014. *J. Phys. Stud.* 2014. V. 18, no. 2/3. P. 2998-3.
  49. Дувіряк А.А. Про нефізичні розв'язки релятивістських рівнянь руху // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 12-13 січня 2015. *Журн. фіз. досліджен.* 2015. Т. 19, № 1/2. С. 1998-2.
  50. *Duviryak A.* Action-at-a-distance models for meson spectroscopy // 8<sup>th</sup> Workshop on Current Problems in Physics. Book of Abstracts. Zielona Góra, Poland, 19 – 22 October 2015. P. 7. <http://www.if.uz.zgora.pl/wcpp/wcpp15/abstracts.pdf>.

# ЗМІСТ

<b>Список скороченнь</b>	<b>15</b>
<b>Вступ</b>	<b>16</b>
<b>1 Огляд літератури</b>	<b>38</b>
1.1 Релятивістичні хвильові рівняння в задачі на зв'язані стани . . . . .	38
1.1.1 Рівняння Брайта та його узагальнення . . . . .	39
1.1.2 Р-ня Бете-Салпітера та квазіпотенціальні р-ня . . . . .	42
1.1.3 Метод Гупти . . . . .	44
1.1.4 Варіаційний гамільтонів метод КТП . . . . .	45
1.1.5 Двочастинкове рівняння Дірака . . . . .	47
1.1.6 Явно коваріантний канонічний підхід з в'язями . . . . .	49
1.1.7 Тривимірна релятивістична гамільтонова механіка . . . . .	52
1.2 Релятивістичні потенціальні моделі мезонів . . . . .	55
1.2.1 Статичні потенціали міжкваркової взаємодії . . . . .	55
1.2.2 Квазірелятивістичні поправки . . . . .	58
1.2.3 Спектри мас легких мезонів . . . . .	59
1.2.4 Струнні та осциляторні моделі . . . . .	62
1.2.5 1ЧРД-моделі . . . . .	65
1.2.6 2ЧРД-моделі . . . . .	66
1.2.7 Явно коваріантні моделі з в'язями . . . . .	68
1.2.8 Тривимірні гамільтонові моделі в різних формах релятивістичної динаміки . . . . .	70
1.2.9 Моделі типу Бете-Салпітера . . . . .	73

1.2.10	Варіаційні моделі гамільтонової КТП . . . . .	76
1.2.11	Короткий підсумок . . . . .	77
1.3	Інтеграли дії типу Фоккера та нелокальні лагранжіани . . . . .	79
1.3.1	Електродинаміка та рівняння руху . . . . .	79
1.3.2	Електродинаміка та інтеграл дії Фоккера . . . . .	83
1.3.3	Узагальнення на інші взаємодії польового типу . . . . .	86
1.3.4	Фоккерівські моделі гравітації . . . . .	89
1.3.5	Динаміка Фоккера і кількачастинкові в'язані стани . . . . .	93
1.3.6	Колові і майже колові орбіти систем Фоккера . . . . .	94
1.3.7	Гамільтонів опис систем типу Фоккера . . . . .	95
<b>2</b>	<b>Часо-асиметричні моделі польового типу</b>	<b>96</b>
2.1	Часо-асиметричні моделі та їх лагранжів і гамільтонів опис . . . . .	97
2.1.1	Модель Старушкевича-Рудда-Гілла та узагальнення . . . . .	98
2.1.2	Одно-часовий лагранжів опис . . . . .	99
2.1.3	Канонічний формалізм з в'язами . . . . .	102
2.1.4	Часо-асиметричні моделі з польовими взаємодіями . . . . .	104
2.1.5	Часо-асиметрична модель з гравітаційною взаємодією . . . . .	106
2.1.6	Перехід до тривимірного гамільтонового опису . . . . .	109
2.1.7	Редукція релятивістичної задачі двох тіл до квадратур . . . . .	112
2.2	Класична динаміка часо-асиметричних моделей із взаємодією по- льового типу . . . . .	114
2.2.1	Електромагнетна (векторна) і скалярна моделі . . . . .	114
2.2.2	Скалярно-векторна модель . . . . .	122
2.2.3	Моделі з тензорними взаємодіями вищих рангів . . . . .	125
2.3	Квантування часо-асиметричних моделей із взаємодією польового типу . . . . .	126
2.3.1	Часо-асиметричні моделі з польовою взаємодією і канонічна реалізація алгебри $\mathfrak{so}(2, 1)$ . . . . .	127
2.3.2	Квантування . . . . .	129

2.3.3	Спектри мас зв'язаних станів . . . . .	131
2.3.4	Зв'язок з квазі-потенціальними рівняннями. . . . .	134
2.3.5	Евристичне врахування спінових ефектів . . . . .	136
2.3.6	Базисні стани і теорія збурень 1-го порядку . . . . .	138
2.3.7	Точно розв'язна модель спектру з точністю до $\alpha^4$ . . . . .	141
2.4	Висновки . . . . .	143
<b>3</b>	<b>Потенціальна модель мезонів типу Фоккера</b>	<b>146</b>
3.1	Класична механіка релятивістичної кольорової частинки в полі Янга-Міллса . . . . .	149
3.1.1	Лагранжева динаміка частинки на головній в'язці . . . . .	149
3.1.2	Приклади . . . . .	152
3.1.3	Гамільтонів опис та квантування . . . . .	154
3.1.4	Система точкових частинок в теорії Янга-Міллса . . . . .	156
3.1.5	Абелеві потенціали у стандартній та нестандартній теоріях поля Янга-Міллса . . . . .	158
3.1.6	Потенціальні моделі типу Фоккера з ефективної класичної теорії Янга-Міллса . . . . .	160
3.2	Часо-асиметрична потенціальна модель . . . . .	161
3.2.1	Класична динаміка часо-асиметричної моделі . . . . .	162
3.2.2	Квазікласичні траєкторії Редже . . . . .	164
3.2.3	Спрощена модель ( $\alpha=0$ ) у точковій формі динаміки . . . . .	167
3.2.4	Квантування . . . . .	168
3.2.5	Аналіз хвильового рівняння . . . . .	170
3.2.6	Числові результати та дослідні дані . . . . .	174
3.3	Часо-симетрична потенціальна модель . . . . .	176
3.3.1	МКО-наближення у фоккерівській динаміці . . . . .	177
3.3.2	Модель Рівакоби-Вейсса в МКО-наближенні . . . . .	180
3.3.3	Дія Фоккера із скалярною утримною взаємодією . . . . .	182
3.3.4	Модель із скалярно-векторним конфайнментом . . . . .	184

3.3.5 Врахування взаємодії 1-глюонного обміну . . . . .	187
3.4 Висновки . . . . .	191
<b>4 МКО-квантування інтегралів типу Фоккера</b>	<b>193</b>
4.1 Арістотеле-інваріантні двочастинкові системи типу Фоккера . . . . .	194
4.1.1 Інтеграл дії та інтеграли руху . . . . .	194
4.1.2 Опис у системі відліку, що рівномірно обертається . . . . .	197
4.1.3 Розв'язки у виді колових орбіт . . . . .	198
4.1.4 Рівняння руху в лінійному наближенні . . . . .	201
4.1.5 Динаміка системи частинок рівних мас . . . . .	204
4.2 Гамільтонізація нелокальних лінійних систем . . . . .	206
4.2.1 Дійсні моди . . . . .	207
4.2.2 Комплексні моди . . . . .	210
4.2.3 Уявні моди . . . . .	211
4.3 Гамільтонів опис та квантування (не)релятивістичних систем типу Фоккера . . . . .	212
4.4 Висновок . . . . .	217
<b>5 Частково редукована теорія поля і двочастинкові рівняння Дірака</b>	<b>219</b>
5.1 Частково редукована спінорна електродинаміка . . . . .	220
5.1.1 Редукований лагранжіан та гамільтоніан . . . . .	220
5.1.2 Квантування, "порожній" вакуум та кількачастинкові стани . . . . .	222
5.1.3 Проблема калібрувальної інваріантності . . . . .	224
5.2 Інші частково редуковані теорії поля . . . . .	225
5.2.1 Побудова редукованих лагранжіанів системи взаємодіючих полів матерії . . . . .	225
5.2.2 Квазірелятивістичний розклад редукованого лагранжіану та побудова гамільтоніану . . . . .	227
5.2.3 Двоферміонні потенціали різних взаємодій . . . . .	230

5.3	Непертурбативне тлумачення 2ЧРД . . . . .	232
5.3.1	Загальна структура потенціалу . . . . .	234
5.3.2	Радіальна редукція 2ЧРД . . . . .	238
5.3.3	Редукція радіальної системи до р-нь 2-го порядку . . . . .	240
5.4	Непертурбативний аналіз рівняння Брайта . . . . .	243
5.5	Точно розв'язні моделі . . . . .	246
5.5.1	Узагальнені діраківські осцилятори . . . . .	247
5.5.2	Точні моделі спектрів легких мезонів . . . . .	250
5.6	Псевдо-пертурбативний метод $1/j$ -розкладів . . . . .	255
5.6.1	Метод $1/\ell$ для рівняння Тодорова . . . . .	255
5.6.2	Метод $1/j$ для 2ЧРД . . . . .	259
5.6.3	Псевдопертурбативні траєкторії Редже з 2ЧРД . . . . .	262
5.7	Висновки . . . . .	266
<b>6</b>	<b>Нестандартні та нелінійні моделі ЧРТП</b>	<b>272</b>
6.1	Варіаційне гамільтонове тлумачення частково редукованих моделей типу Юкави . . . . .	273
6.1.1	Скалярна модель Юкави у стандартному і частково редукованому формулуванні . . . . .	273
6.1.2	Збережні величини . . . . .	274
6.1.3	Гамільтонова структура нелокального лагранжіану . . . . .	276
6.1.4	Пертурбативна схема і 1-ше наближення . . . . .	278
6.1.5	Канонічне квантування і двочастинкові варіаційні стани . . . . .	282
6.2	Про стани, зв'язані тахіонним обміном . . . . .	285
6.2.1	Потенціал тахіонно-обмінної взаємодії . . . . .	286
6.2.2	Рівняння Шрединг'ера . . . . .	287
6.3	Частково редуковані моделі конфайнменту . . . . .	291
6.3.1	Теорія з вищими похідними та дипольна модель . . . . .	292
6.3.2	Нелінійна модель типу Віка-Куткоскі . . . . .	294
6.3.3	Квантування і тричастинкове хвильове рівняння . . . . .	295

6.3.4	Властивості та обчислення 3-точкового потенціалу . . . . .	299
6.3.5	Нелінійне узагальнення дипольної моделі . . . . .	303
6.4	Аналіз міжкваркової взаємодії у класичній хромодинаміці . . . . .	306
6.4.1	КХД-лагранжіан та рівняння поля . . . . .	308
6.4.2	Переформулювання . . . . .	309
6.4.3	Аналіз міжкваркових взаємодій в редукованій моделі і статичній границі . . . . .	311
6.4.4	Властивості і вирази 3- і 4-точкового потенціалів . . . . .	315
6.5	Висновки . . . . .	319
<b>Висновки</b>		<b>323</b>
<b>Список використаних джерел</b>		<b>327</b>
<b>Додатки</b>		<b>360</b>
A.	Матричне представлення та властивості біспінорних гармонік . . . . .	360
B.	Функція Гріна рівняння 4-го порядку . . . . .	361
C.	Неперервні drobi у часо-асиметричній потенціальній моделі . . . . .	363
D.	Обчислення $\mathcal{D}^\perp$ і $\lambda = \omega_r/\Omega$ в ЧС-моделі . . . . .	363
E.	Доведення твердження 4.2 . . . . .	366
F.	Динаміка часо-нелокального осцилятора . . . . .	368
G.	Апробація результатів дисертації . . . . .	373
H.	Список публікацій здобувача . . . . .	374

## Список скорочень

- БС – Бете–Салпітера (рівняння)
- БТ – Бакамджіана–Томаса (модель)
- ДГЛ – Домінічі–Гомеша–Лонгі (модель)
- ДВТК – Дро–Венсана–Тодорова–Комара (модель)
- ВТ – Владімірова–Туригіна (підхід)
- 1ЧРД – одночастинкове рівняння Дірака
- 2ЧРД – двочастинкове рівняння Дірака
- ЗТВ – загальна теорія відносності
- КТП – квантова теорія поля
- КХД – квантова хромодинаміка
- МКО – майже колові орбіти
- ОМР – область можливих рухів
- ПРОМ – проста релятивістична осциляторна модель
- РГМ – релятивістична гамільтонова механіка
- РТПВ – релятивістична теорія прямих взаємодій
- СРГ – Старушкевича–Рудда–Гілла (модель)
- УНК – унітарне незвідне представлення
- ЦМ – центр мас
- ЧА – часо-асиметрична (модель)
- ЧС – часо-симетрична (модель)
- ЧР – частково редуктований (лагранжіан)
- ЧРТП – частково редуктована теорія поля
- СJR – Чіковані–Єнковського–Пакканоні (потенціал)
- л.ч. – ліва частина
- п.ч. – права частина
- п. – пункт
- ф-я – функція
- р-ня – рівняння

# ВСТУП

## **Актуальність теми.**

Сьогодні широкий загал наукової спільноти поділяє переконання, що квантова теорія поля (КТП) є адекватною та достатньою основою сучасної фізичної картини світу. Таке переконання підтверджується і розвитком самої теорії, і експериментальними дослідженнями, зокрема недавнім відкриттям бозона Гігса. Однак разом із успіхами КТП у ній залишаються до кінця не розв'язаними старі проблеми. Однією з них є задача про зв'язані стани систем кількох частинок.

На відміну від квантової механіки, квантова теорія релятивістичних полів формулюється на просторі Фока, тобто є теорією нескінченно-багатьох частинок, і стани з кількома частинками не є, загалом, власними станами гамільтоніанів КТП. Тому для опису зв'язаних кількачастинкових станів у КТП розвинуто низку наближених підходів. *Рівняння Бете-Салпітера* (БС) [1, 2] чи його модифікації [3, 4] походять із пертурбативної КТП і для сильно зв'язаних систем не є строго обґрунтованими. Крім цього, рівняння БС має інші недоліки, такі як відома проблема відносного часу, існування нефізичних розв'язків, складність узагальнення на три- і більше-частинкові системи тощо. Для усунення цих недоліків запропоновано перетворення цього р-ня до більш фізично змістовних форм, таких як *рівняння Салпітера* [5], *Бланкенбеклера-Сугара* [6], *квазіпотенціальні рівняння* [7, 8]. Застосовані до атомів, позитронію та інших систем з електромагнетною взаємодією, ці підходи дають у нижчих наближеннях теорії збурень результати (спектри енергій, ширини розпадів), що узгоджуються між собою та з експериментом. Однак, поширення цих підходів на сильні та ядерні взаємодії є нетривіальним. Воно виявляє як неднозначності опису взаємодій в рамках того чи іншого підходу, так і фізичну нееквівалентність самих підходів. У випадку квантової хромодинаміки,

а тим більше стандартної моделі, виведення та структура рівняннь типу Бете-Салпітера сильно ускладнюються а їх пертурбативна природа обмежує область застосування.

Іншим підходом до проблеми про зв'язані стани є використання *варіаційного методу в КТП* [9, 10]. Такі обчислення не обов'язково є пертурбативними, однак у них часто застосовуються неконтрольовані наближення для усунення розбіжностей, спрощення рівнянь тощо. Це приводить до неоднозначності кінцевих результатів, втрати пуанкаре-інваріантності та інших недоліків.

Останнім часом швидко розвивається підхід, відомий як *калібрування теорія на ґратці*. Основне поле застосування цього підходу – квантова хромодинаміка та гадронні зв'язані стани, що мають непертурбативну природу. Ґраткові обчислення дозволяють отримувати результати із перших принципів, однак вимагають ефективних числових методів та великих обчислювальних потужностей. Найбільш успішними результатами цього підходу є розрахунок розподілу глюонного поля та потенціалів взаємодій у статичних конфігураціях кварків чи інших неабелевих джерел [11–13]. Щодо релятивістичних аспектів таких взаємодій, то їх дослідження у ґраткових обчисленнях практично не проводилося.

Отже, поряд із квантово-польовими методами опису зв'язаних станів релятивістичних систем частинок, необхідно мати альтернативний або комплементарний підхід до цієї проблеми. Розвитку можливого такого підходу – формалізму *інтегралів дії* типу *Фоккера*, та його застосуванню у квантовій задачі кількох тіл, присвячена дана дисертаційна робота.

Фоккерівські інтеграли відомі в *теорії дії на відстані*, або *релятивістичній теорії прямих взаємодій* (РТПВ), що являє собою сукупність концепцій, підходів та моделей для опису релятивістичних композитних систем, в яких не використовується поняття поля-носія взаємодій як незалежного об'єкту із власними ступенями вільності [14, 15].

Серед інших підходів РТПВ відомими є тривимірна *релятивістична лагранжева механіка з вищими похідними* [16, 17] і *релятивістична гамільтонова механіка* [18–21], явно коваріантний канонічний формалізм з в'язами [15, 22–25]

та пов'язаний із ним *формалізм синг'уллярних лагранжіанів* [26, 27] тощо. Усі ці підходи забезпечують наближено або точно пуанкарє-інваріантний опис систем скінченного (фіксованого) числа частинок. У класичному варіанті РТПВ використовується для опису макроскопічних систем із далекосяжними взаємодіями типу електромагнетної чи гравітаційної [17]. У гамільтонових підходах взаємодія вводиться феноменологічно, а її фізична інтерпретація є складнішою та менш очевидною. Однак ці підходи краще пристосовані до квантування або будуються *a priori* квантовими, і тому останнім часом застосовуються для моделювання мікрокопічних кілька-частинкових систем у тих випадках, коли теоретико-польові методи не працюють або погано працюють. Це стосується систем як з електромагнетною [28], так і з силою [29] та ядерною [30] взаємодіями.

На противагу до *a priori* гамільтонових підходів, формалізм *інтегралів дії* типу *Фоккера* є класичним підходом до РТПВ, що тісно пов'язаний з теоретико-польовими описами взаємодій частинок [31, 32]. Відомий вже майже століття [33–35], хоч в основному як основа електродинаміки Вілера-Фейнмана [36, 37], цей формалізм було узагальнено і на інші типи теоретико-польових релятивістичних взаємодій, включно з випадками скалярного поля та тензорних полів вищого рангу (тобто, спіну) [17, 38, 39], гравітації [40–43], утримної міжкваркової взаємодії [44–47] та ін. [38, 47].

З фізичного погляду, у фоккерівському описі знахтувано радіаційними ефектами, а взаємодія між частинками передається пів-сумою запізненого та випередного полів, що природно описується у термінах часо-симетричної функції Гріна. Такий спрощений опис взаємодії дозволяє розглядати систему частинок як замкнену пуанкарє-інваріантну систему, і задавати її динаміку у вигляді варіаційного принципу. Дія типу Фоккера містить не тільки вільночастинкові однократні інтеграли за параметром еволюції, але й подвійні, а часом і багатократні інтеграли, що описують взаємодію частинок у термінах функцій Гріна відповідних польових рівнянь.

Таким чином, формалізм інтегралів дії типу Фоккера слугує шляхом від класичної теорії поля до класичної релятивістичної динаміки системи точкових

частинок. Якщо цей шлях доповнити конструктивною процедурою квантування, то можна побудувати релятивістичну квантову механіку частинок із теоретико-польовою взаємодією. Цим було б реалізовано згаданий вище альтернативний погляд на проблему. Побудований таким чином опис мав би забезпечити добре наближення в області енергій, де процеси випромінювання (а квантою термінологією – процеси народження чи анігіляції частинок) відсутні або неістотні, але інші релятивістичні ефекти необхідно враховувати.

Донедавна проблема квантування фоккерівських систем кількох частинок залишалася відкритою через математичні труднощі. Варіаційна задача типу Фоккера описує динамічну систему з часовою нелокальністю: вона приводить до різницево- або інтегро-диференційних рівнянь руху, для яких задача Коші не є відповідною. Як наслідок, визначення фазового простору (тобто простору можливих станів), побудова гамільтонового опису та квантування такої системи є нетривіальними задачами.

Великі зусилля були затрачені на те, щоб розвинути процедуру гамільтонізації нелокальних у часі варіаційних задач, зокрема, інтегралів дії типу Фоккера. Тут варто згадати дві такі схеми, реалізовані наблизено: в одній вживаються квазірелятивістичні наближення [16], для іншої розвинено метод розкладів за константою взаємодії [48]. Отриманий таким чином локальний опис системи  $N$  точкових (безспінових) частинок будується на  $6N$ -вимірному фазовому просторі, як і в нерелятивістичній механіці, і перехід до квантової механіки можна здійснити стандартним чином.

Обидві наблизені схеми гамільтонізації мають певні недоліки та обмежену область застосування. У квазірелятивістичних наближеннях втacається точна пуанкаре-інваріантність, і вони застосовні у випадках, коли релятивістичні ефекти є малими. Розклади за константою взаємодії загалом незастосовні до опису зв'язаних станів, особливо у системах із сильним зв'язком.

Для квантового опису сильно зв'язаних двочастинкових систем типу Фоккера актуальним є розвиток інших наблизень і схем гамільтонізації та квантування. У даній дисертаційній роботі розвиваються дві такі можливості, обидві пов'язані

із точними розв'язками у формалізмі типу Фоккера.

Перша можливість пов'язана з ідеєю, на яку побіжно вказав іще Фоккер [35], яку пізніше детально опрацювали Старушкевич [49], Рудд і Гілл [50], та Кюнзле [51]. Вони розглянули таку двочастинкову взаємодію: на першу частинку діє запізнене електромагнетне поле другої частинки, на другу – випередне поле першої частинки. У такій моделі природньо виникає взаємно-однозначна відповідність між точками світових ліній частинок, а саме, між точками, розділеними ізотропним інтервалом. Ця відповідність дозволяє звести інтеграл Фоккера до одно-часової пуанкарє-інваріантної дії, тобто переформулювати модель у рамки лагранжевого, а далі й гамільтонового формалізму [51, 52], і врешті проінтегрувати модель стандартними методами [50, 51, 53].

Така ж взаємно-однозначна відповідність виникає і у фоккерівських інтегралах загальнішого вигляду, а саме в тих інтегралах, що містять запізнену чи випередну функцію Г'ріна рівняння Даламбера. Інтеграли дії такого вигляду породжують широкий клас двочастинкових систем, які можна назвати (згідно з [53, 54]) *часо-асиметричними*. Більшість з них допускають теоретико-польову інтерпретацію взаємодії, і можуть мати фізичне застосування. Спрощені версії таких систем у двовимірному просторі-часі  $\mathbb{M}_2$  розглядалися в літературі [49, 50, 55, 56], і виявили фізичну змістовність [57, 58]. Але реалістичніший 4-вимірний випадок потребує розвитку іншого підходу.

У дисертаційній роботі запропоновано теоретичну схему, що дозволяє вивчення класичної динаміки та квантування часо-асиметричних систем в  $\mathbb{M}_4$ . Ключовими ланками у цій схемі є побудова явно коваріантного гамільтонового опису часо-асиметричних систем та конструктивна процедура квантування. Схема застосовується до квантування та обчислення спектрів систем двох частинок, що взаємодіють через безмасове поле довільного спіну. Іншим застосуванням схеми є часо-асиметрична потенціальна модель мезонів.

Очевидно, що часо-асиметричні моделі не можна тлумачити беззастережно, оскільки асиметрична поляризація взаємодії частинок щодо минулого і майбутнього фізично не вмотивована. Тому лише ті результати обчислень, що не зале-

жать від зазначеної поляризації, можна вважати вірогідними. Згадані вище спектри мають цю властивість наближено, до порядку  $\alpha^4$  включно, де  $\alpha$  – константа взаємодії.

Інша ідея побудови гамільтонового та квантового описів стосується часо-симетричних систем типу Фоккера. Вона ґрунтуються на наступному. Серед не численних розв'язків до варіаційних задач типу Фоккера з літератури відомі *точні* розв'язки у вигляді колових орбіт частинок одна навколо іншої [59–61]. Ці розв'язки існують і в області істотно релятивістичного руху сильно зв'язаних частинок, тобто вони виходять за межі застосування квазі-релятивістичних наближень [62] та розкладів за константою взаємодії [48]. Навіть більше, у випадку електромагнетної задачі 2-х тіл типу Фоккера було отримано та досліджено динамічні рівняння для малих відхилень від колових орбіт [63–65], а Вон Баєр вказав на можливість (але не реалізував її) евристичного квантування збурених колових орбіт [66] з допомогою правила Бора [61] та умови Міллера [67]. Очевидно, що майже колові орбіти (МКО) повинні існувати і для інших систем типу Фоккера. Ідея дисертації полягає в тому, щоб побудувати гамільтонів опис таких розв'язків, а тоді застосувати до них процедуру канонічного квантування. Оскільки динаміка збурених колових орбіт є нелокальною у часі, то її гамільтонізація та квантування є нетривіальною задачею дисертації.

Порівняно недавно у роботах [68–75] концепцію дії на відстані було перенесено із систем точкових частинок на системи полів матерії. Такі системи описуються т.зв. *частково редукованими* теоретико-польовими лагранжіанами з нелокальними членами, що описують взаємодію між собою струмів матерії через функцію Гріна поля-посередника. Частково редукований (ЧР) лагранжіан є основою для переходу до гамільтонового опису, що у вказаних роботах здійснювався за аналогією до випадку локальної теорії. Далі застосовувалися квантування та варіаційний метод, що приводив до релятивістичних хвильових рівнянь для кількачастинкових станів.

Такий підхід, названий тут як *частково редукована теорія поля* (ЧРТП), видається досить простим і вільним від ультрафіолетових розбіжностей, а варіа-

ційні хвильові рівняння – вільні від проблем, характерних для БС-рівняннь (проблема відносного часу, зайві розв'язки тощо). Але застосування стандартної схеми гамільтонізації до нелокального у часі лагранжіану не є відповідним, і приводить до гамільтонового опису, що не є еквівалентним до вихідного лагранжевого. Фактично, отримані таким чином гамільтоніан та хвильові рівняння відповідають наближенню [5], у якому знехтувано часову нелокальність, зокрема – ефекти запізнення. Для врахування цих та інших релятивістичних ефектів необхідно узагальнити на випадок польових систем методи гамільтонізації, відомі в рамках РТПВ точкових частинок.

Іншим напрямком узагальнення ЧРТП є побудова ЧР-лагранжіанів для теорій, нелінійних щодо полів-медіаторів. Такі узагальнення можуть знайти застосування для опису систем із сильною взаємодією. Зокрема, цікавим прикладом був би ЧР-лагранжіан спінорної хромодинаміки.

Перевагою ЧРТП у порівнянні з фоккерівським та іншими підходами РТПВ є можливість релятивістичного опису зв'язаних станів ферміонів. Для опису двоферміонної системи в літературі застосовують двочастинкове рівняння типу Дірака (2ЧРД). Окрім двох діраківських вільночастинкових членів, воно містить оператор (чи потенціал) взаємодії, наприклад: потенціал Брайта [2, 76] або інші версії електромагнетного потенціалу (простіші [77–79] чи складніші [80–82]), а також його узагальнення, що використовують для опису міжкваркової [83–89] чи міжнуклонної [90, 91] взаємодій. В рівняннях квантово-польового походження, таких як рівняння Бете-Салпітера [2, 5] або квазі-потенціальні [92–94], взаємодія описується складним інтегральним оператором в імпульсному представленні. Математично простішими та фізично наочнішими є двоферміонні потенціали, задані в координатному представленні. Такі потенціали виводяться з класичної [80–82, 95] та напів-квантової [70, 79] теорії поля, чи підбираються феноменологічно.

Довший час не тільки виведення, але й розв'язування 2ЧРД розглядали лише в рамках теорії збурень – квазірелятивістичних наближень і/або розкладів за константою взаємодії. Для випадку електромагнетної взаємодії таке тлумачення рівняння Брайта має фізичний сенс [2]. В задачах із сильним зв'язком

використання теорії збурень є необґрунтованим. До 2ЧРД з різноманітними локальними потенціалами стали застосовувати непертурбативні методи, які полягають у зведенні його шляхом розділення змінних (на радіальну і спін-кутові) до системи звичайних диференційних рівнянь (так звана *радіальна редукція*) з подальшим чисельним [79, 82, 83, 85, 86, 89–91, 96], а значно рідше – аналітичним [81, 87, 88] інтегруванням. Однак, чисельними методами можна дослідити кілька нижніх зв’язаних станів, не отримавши загальної картини поведінки системи. Навіть більше, у багатьох фізично цікавих випадках радіально редукована система має залежні від енергії нефізичні полюси при скінченних відстанях між частинками [97, 98]. Така краєва задача у строгому математичному сенсі виявляється некоректною, або невідповідною її фізичному змістові, і не допускає застосування чисельних методів. Тому частина дисертації присвячена непертурбативним та псевдо-пертурбативним методам розв’язування 2ЧРД.

**Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем НАН України. Представлені в дисертації результати отримані згідно планів робіт в рамках бюджетних тем НАН України: "Розробка концепції форм релятивістської динаміки як просторово-часових описів системи частинок" (1991-1995 рр., номер державної реєстрації 01.9.10-002366), "Релятивістична механіка класичних і квантових систем частинок з внутрішньою структурою в теорії прямих взаємодій" (1996-2000 рр., номер державної реєстрації 0196U002366), "Термодинаміка та кінетика псевдоспін-ферміонних моделей локально-ангармонічних кристалічних і молекулярних систем з сильними хаббардівськими кореляціями" (1999–2001 рр., номер державної реєстрації 0199U000670), "Розробка сучасних теоретичних методів та їх застосування до вивчення властивостей конденсованих систем" (2002–2006 рр., номер державної реєстрації 0102U001794), "Дослідження колективних іонних та електрон-іонних процесів у твердих тілах на основі ферміонних граткових моделей" (2002-2004 рр., номер державної реєстрації 0102U000217), "Розвиток аналітичних методів теорії енергетичного спектру та динаміки сильнокорельзованих систем частинок" (2005–2007 рр., номер державної реєстрації 0105U002085), "Роз-

виток і застосування методів аналітичної теорії та комп'ютерного експерименту для опису явищ переносу в іон-електронних системах" (2007-2011 рр., номер державної реєстрації 0107U002081), "Моделювання фізичних властивостей квантових граткових систем з сильними багаточастинковими кореляціями" (2008-2012 рр., номер державної реєстрації 0108U001154), "Квантові багаточастинкові граткові системи: динамічний відгук і ефекти сильних кореляцій" (2013-2017 рр., номер державної реєстрації 0112U007761), а також проекту "Багатомасштабність і структурна складність конденсованої речовини: теорія і застосування" (2012-2016 рр., номер державної реєстрації 0112U003119), "Класичні та квантові системи за межами стандартних підходів: електродинаміка у просторах вищої вимірності" (2015 р., номер державної реєстрації 0115U004838, 2016 р.; номер державної реєстрації 0116U005055).

**Мета і задачі дослідження.** *Мета* цієї роботи: побудова квантового опису релятивістичних систем кількох частинок із взаємодією на основі класичних варіаційних задач із часовою нелокальністю, а саме – інтегралів дії типу Фоккера і редукованих теоретико-польових лагранжіанів; виведення релятивістичних хвильових рівнянь системи двох і більше частинок із взаємодією польового типу; опис на цій основі зв'язаних станів істотно релятивістичних систем: позитронію, легких мезонів, баріонів, систем з ефективними взаємодіями тощо.

Для досягнення цієї мети у роботі розв'язано низку *задач*, серед яких:

- Побудова для деяких теоретико-польових взаємодій інтегралів дії типу Фоккера та побудова їх часо-асиметричних версій.
- Побудова точного гамільтонового опису широкого класу релятивістичних двочастинкових систем на основі часо-асиметричних інтегралів дії типу Фоккера та їх квантування.
- Опрацювання процедури гамільтонізації та квантування часо-симетричних інтегралів дії типу Фоккера у наближенні майже колових орбіт.
- Розробка релятивістичних потенціальних моделей мезонів на основі інтегралів дії типу Фоккера.

- Редукція низки теоретико-польових моделей до ефективних лагранжіанів із часовою нелокальністю.
- Опрацювання наближених схем гамільтонізації та квантування частково редукованих теоретико-польових моделей, виведення кількачастинкових хвильових рівнянь варіаційним методом.
- Побудова і дослідження частково редукованих теоретико-польових моделей із сильною взаємодією.

*Об'ектом дослідження є інтеграли дії типу Фоккера, частково редуковані нелокальні лагранжіани, і сформульований в їх рамках опис систем 2-х і 3-х частинок з теоретико-польовою та сильною взаємодією.*

*Предмет дослідження:* гамільтонів і квантовий опис релятивістичних систем, що задаються інтегралами дії типу Фоккера та лагранжіанами із часовою нелокальністю; структура релятивістичних хвильових рівнянь; спектри енергії релятивістичних двочастинкових потенціальних моделей мезонів та деяких інших систем.

**Методи дослідження.** Впродовж усієї роботи широко використовуються методи аналітичної динаміки. *Лагранжів формалізм* вживається як один з принципів побудови опису релятивістичних систем із взаємодією; він дає закони збереження та інші важливі фізико-математичні наслідки. *Гамільтонів формалізм* необхідний як основа канонічного квантування. *Діраківський формалізм із в'язами* забезпечує у даній роботі явну коваріантність і, отже, стисливість опису динаміки. З цією ж метою використано *метод динамічної алгебри* при квантуванні часо-асиметричних систем. *Метод редукції ступенів вільності* застосовується як при розв'язуванні рівнянь класичної та квантової механіки, так і для побудови часо-нелокальних лагранжіанів з ефективною прямою взаємодією, та їх гамільтонізації. З цією ж метою застосовано *теоретико-груповий аналіз* часо-нелокальних рівнянь руху фоккерівських систем. Застосування деяких методів у даній роботі є нетривіальним, або цілком оригінальним. Це стосується *методу майже колових орбіт* у гамільтоновому описі фоккерівських систем і при редукції двочастинко-

вого рівняння Дірака.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається із вступу, огляду літератури, шести розділів з викладом результатів оригінальних досліджень, висновків, списку цитованих джерел і додатків. Роботу викладено на 326 сторінках (разом із переліком джерел і додатками – на 378 сторінках). Бібліографічний список містить 415 покликів.

**Перший розділ** є оглядом літератури за трьома темами, що безпосередньо стосуються дисертаційної роботи. У підрозділі 1.1 розглядаються основні підходи до релятивістичної квантової задачі кількох тіл: рівняння Брайта, Бете-Салпітера, варіаційні та інші кількачастинкові рівняння квантово-польового походження, а також квантові рівняння РТПВ. Через широту цієї теми огляд не може претендувати на повноту; він поданий для того, щоб показати місце, зв'язок, переваги та недоліки запропонованого підходу по відношенню до відомих інших. Те ж стосується і другої частини огляду (підрозділ 1.2), присвяченого релятивістичним потенціальним моделям мезонів та баріонів. Там же подано схематичний опис спектру мас мезонів, складених з легких кварків – т.зв. траекторій Редже, що у дисертації є одним з об'єктів моделювання. Третя частина огляду присвячена важливим аспектам формалізму інтегралів дії типу Фоккера (підрозділ 1.3): його походженню, фізичному значенню та розвитку, особливостям фоккерівської динаміки, точним розв'язкам та проблемі гамільтонового опису. Там же описано метод побудови інтегралів типу Фоккера шляхом редукції польових змінних безпосередньо в лагранжіані – він неодноразово застосовується у даній дисертації.

**Другий розділ** починається з розгляду моделі Старушкевича-Рудда-Гілла – двочастинкової фоккерівської системи з часо-асиметричною електромагнетною взаємодією. Узагальнення моделі приводить до широкого класу часо-асиметричних систем, фоккерівський інтеграл яких містить запізнену чи випередну ф-ю Гріна р-ня Даламбера. В п. 2.1.2 він зводиться до дії із явно коваріантним сингулярним лагранжіаном та голономною в'яззю, що описує ізотропне відношення одночасності на світловому конусі. Шляхом редукції надлишкових часових змінних частинок таку дію можна звести до тривимірної *ізотропної* форми реля-

тивістичної динаміки, *a priori* розвинутої В.І. Третяком [17]. Відповідний гамільтонів опис виявляється громіздким і неявним, що утруднює квантування. Тому в п.2.1.3 для часо-асиметричних систем запропоновано явно коваріантний канонічний опис з двома в'язями 1-го класу – в'яззю світлового конуса та динамічною. Остання відіграє роль гамільтоніану системи. Разом з інтегралами руху – повним 4-імпульсом та моментом імпульсу – вона дозволяє дослідити динаміку моделей у квадратурах. Це зроблено для фізично змістовних часо-асиметричних систем із взаємодією, що передається безмасовими тензорними полями різного рангу (або спіну). Для скалярної і векторної взаємодій (та їх суперпозиції) динамічну в'язь побудовано точно, для тензорної рангу  $n \geq 2$  – з точністю до  $\alpha^2$  (квадрату константи взаємодії). Для випадку гравітації (як нелінійного тензорного поля рангу  $n = 2$ ) часо-асиметричну модель побудовано на основі теорії гравітаційної дії на відстані Владімірова-Турігіна [40, 41, 99].

Квантування часо-асиметричних систем із взаємодією польового типу здійснено на основі їх канонічного опису методом динамічної алгебри. Для випадків скалярної та векторної взаємодій отримані спектри тотожні до результатів для безспінових частинок, раніше отриманих у рамках КТП. Запропоновано евристичне врахування спінових поправок та відповідні точно інтегровні рівняння квазі-потенціального типу.

**Третій розділ** присвячено моделям кварків та мезонів. У підрозділі 3.1 кварки розглядаються як точкові частинки з внутрішніми ступенями вільності типу кольору. Запропоновано лагранжів та гамільтонів опис такої частинки у зовнішньому калібрувальному полі, що може служити моделлю генерації динамічної маси кварків. В літературі [100, 101] опис застосовано до випадку калібрувальної групи Лоренца для опису частинки у полі діона.

Далі розглядається релятивістична кваркова модель мезонів, сформульована в рамках фоккерівського формалізму. Класичний інтеграл дії для неї запропонували Рівакоба [44] та пізніше – Вейсс [45]. У цій формі інтеграл типу Фоккера містить функцію Гріна рівняння з вищими похідними (4-го порядку). В нерелятивістичній границі взаємодія зводиться до лінійного потенціалу з деяким

коєфіцієнтом натягу струни.

В дисертації доведено еквівалентність формулювань Рівакоби і Вейсса, і показано, що ця модель пов'язана із нестандартною теорією поля Кікіса [102] та її неабелевими узагальненнями [103, 104]. Часоасиметричну версію моделі із векторною взаємодією детально вивчено в підрозділі 3.2, і отримано асимптотично лінійні траєкторії Редже із бажаним випадковим виродженням. Однак їх нахил не узгоджується з очікуваним значенням. В підрозділі 3.3 неузгодженість подолано шляхом доповнення векторної моделі відповідною скалярною взаємодією. Таке припущення привабливе ще й із тих міркувань, що переважна частина відомих у літературі потенціальних моделей гадронів мають скалярну далекосяжну складову взаємодії, введену там із інших, незалежних міркувань. Однак, скалярний або скалярно-векторний аналог моделі Рівакоби-Вейса вже не має часо-асиметричного відповідника, і є істотно нелокальним. Це стало мотивом до розробки методу квантування інтегралів типу Фоккера в наближенні майже колових орбіт (МКО) та його застосування до даної моделі.

Цей метод викладено у **четвертому розділі** дисертації. Він будується таким чином, щоби бути застосовним як до релятивістичних, так і нерелятивістичних систем типу Фоккера. Для цього розглядається система загального виду, інваріантна щодо групи Арістотеля – спільної підгрупи груп Галілея та Пуанкаре. В п. 4.1.3 доведено, що рівняння руху такої системи допускають розв'язки у виді колових орбіт частинок. Для вивчення цих розв'язків та їх збурень зручно перейти до неінерційної системи відліку, жорстко прив'язаної до колових рухів частинок. В такій системі відліку колові розв'язки зводяться до статичних, збурення вважаються малими, і для опису їх динаміки виведено нелокальний квадратичний лагранжіан. Відповідна лінійна однорідна система нелокальних у часі рівнянь Ойлера-Лагранжа аналізується на мові власних частот і власних мод, вивчаються загальні властивості цих мод та їх симетрійні властивості щодо неінерційної реалізації групи Арістотеля. Це дозволяє сформулювати критерії, за якими серед нескінченної загалом множини усіх мод можна відібрати фізично суттєві.

Для побудови гамільтонового опису системи застосовано формальну схему

Лльоза-Вівеса [105] для гамільтонізації нелокальних у часі лагранжіанів. При цьому отримано гамільтоніан, інші інтеграли руху та диференційну форму Ліувіля, яка шляхом відповідного вибору змінних зводиться до канонічного вигляду. Нарешті, здійснюється канонічне квантування та побудова спектру енергії системи (у наближенні майже колових орбіт).

Решта дисертації – **п'ятий і шостий розділи** – присвячена розвитку частково редукованої теорії поля (ЧРТП) – теоретико-польовому аналогу формалізму типу Фоккера. Тут будуються частково редуковані (ЧР) лагранжіани для різних теоретико-польових систем, вивчаються їх симетрійні властивості та збережні величини, здійснюється перехід до гамільтонового опису та квантування, і виводяться хвильові рівняння для кількачастинкових станів. Перехід від ЧР-лагранжевого до гамільтонового опису можна здійснити лише в рамках деякої апроксимаційної схеми. Розвиваються дві схеми. У **п'ятому розділі** часова нелокальність усувається безпосередньо в редукованому лагранжіані та інтегралах руху – в рамках квазірелятивістичних наближень (з допомогою розкладів за запізненням, тобто за оберненою швидкістю світла). Ця схема приводить до кількачастинкових хвильових рівнянь в координатному представленні.

Для апробації методу в підрозділі 5.1 його застосовано до спінорної ЧР-електродинаміки, отримано відоме рівняння Брайта, а в підрозділі 5.4 здійснено його непертурбативний аналіз та обчислено спектр парапозитронію.

Підхід допускає можливість вибору чи модифікації міжчастинкової взаємодії. Для цього симетричну функцію Гріна поля-посередника можна замінити на феноменологічне пуанкарє-інваріантне ядро з потрібними властивостями. Завдяки цьому у підрозділі 5.2 в рамках квазірелятивістичних наближень виводяться 2ЧРД в координатному представленні із потенціалами, що описують широкий клас взаємодій із урахуванням ефектів запізнення. Їх можна пов'язати як із стандартними теоріями поля, так і з феноменологічними взаємодіями різного типу (скалярною, псевдо-скаларною, векторною, тензорною тощо), що ефективно використовуються в ядерній та гадронній фізиці.

Для аналітичного дослідження зв'язаних станів двоферміонної системи в

підрозділі 5.3 запропоновано блок-матричне формулювання радіально редукованого 2ЧРД, а в підрозділі 5.6 розвинуто псевдо-пертурбативний метод, що ґрунтуються на техніці розкладів за параметром  $1/j$  - числом, оберненим до повного моменту імпульсу системи. Метод застосовний у задачах із сильним зв'язком, і дозволяє обійти труднощі, пов'язані з існуванням нефізичних сингулярностей 2ЧРД.

Для ілюстрації методу аналізуються 2ЧРД з різними скалярно-векторними суперпозиціями кулонівського та лінійного потенціалів. В останні 2-3 декади подібні рівняння використовувались як релятивістичні кваркові моделі мезонів (див. підрозділ 2.2). Деякі з них є універсальними, тобто описують стани як важких, так і легких мезонів. Розв'язки цих 2ЧРД звичайно отримують пертурбативним або чисельним методами, недоліки та обмеженість яких зазначено вище. Аналітичний розгляд вказаних 2ЧРД у п. 5.6.3 показує, що деякі із розглянутих прикладів можуть бути основою універсальних релятивістичних потенціальних моделей.

Що стосується точно розв'язних моделей в рамках 2ЧРД, то в літературі відомо лише кілька прикладів, що представляють версії дво-частинкових діраківських осциляторів [106–110]. Всі вони виявляють траєкторії Редже, що є точно або асимптотично (при великих  $j$ ) прямыми. Однак рівні енергії є залежними від спіну, а тип виродження відрізняється від очікуваного.

В підрозділі 5.5 запропоновано клас нових точно розв'язних 2ЧРД із комбінаціями потенціалів лінійного і кулонівського типу із складною спін-кутовою залежністю. Цей клас містить відомі діраківські осцилятори, а також включає нові приклади. Один із них, з досить нетривіальним потенціалом, точно відтворює бажане спін-орбітальне виродження траєкторій Редже. В літературі [111] цю модель застосовано до мезонів, що містять як легкі, так і дивні (s) і важкі (c, b) кварки, що дало змогу авторам успішно описати більше 50-ти мезонних станів.

Інша схема виведення кількачастинкових хвильових рівнянь із редукованих теоретико-польових лагранжіанів полягає в усуненні часової нелокальності на рівні гамільтонового опису, з подальшим застосуванням канонічного квантування та варіаційного методу. У **шостому розділі** дисертації ця схема реалізується

шляхом запропонованого тут алгоритму розкладів за константою взаємодії. Варіаційні хвильові рівняння у ній формулюються в імпульсному представленні, і нагадують інтегральні рівняння Салпітера з ядрами, вираженими через пропагатори полів-посередників або фур'є-образи феноменологічних форм-факторів взаємодії. Відмінність від КТП полягає у тому, що у редукованій теорії немає вільних квантів поля-посередника. Тому варіаційні стани кількох взаємодіючих частинок є простішими, ніж у традиційній КТП, а пертурбативні розклади проводяться не за константою взаємодії, а за її квадратом. Все це дозволяє вже у 1-му наближенні отримати варіаційні кількачастинкові рівняння з нетривіальною взаємодією, уникаючи ультрафіолетові розбіжності.

У підрозділі 6.1 схема застосовується до скалярної моделі Юкави, у якій скалярні частинки (та античастинки) взаємодіють через масивне чи безмасове скалярне поле. Ця модель часто використовується для тестування методів розв'язування релятивістичних кількачастинкових задач КТП, починаючи від робіт [112, 113] до [114–116] і [72]. В процесі представлених у дисертації досліджень виявилося, що варіаційні рівняння, які були отримані раніше в роботах [68, 72] і тлумачилися як точні, насправді є 1-м наближенням за квадратом константи взаємодії. Передбачено можливість обчислення 2-го і вищих наближень, але ця технічно складна задача виходить за рамки дисертації.

Натомість в підрозділі 6.2 розглядається ЧР-модель Юкави з медіатором уявної маси – тахіонним полем, яке не має повноційного квантового втілення в рамках локальної КТП. В підрозділі 6.3 лагранжіан моделі Віка-Куткоського (тобто моделі Юкави з безмасовим полем-посередником) доповнено нелінійними членами. Шляхом застосування розкладів за параметром нелінійності та вилучення поля-посередника отримано редукований лагранжіан, що містить нелокальні у часі багато-точкові члени взаємодії. У наближеннях нижніх порядків теорії  $\varphi^3$  отримано звичні дво-точкові взаємодії та три-точкову взаємодію. Остання у статичній границі описується три-точковим кластерним потенціалом логарифмічного росту, зведенім після регуляризації до квадратури. Цей же результат отримано без наближень для версії дипольної моделі. Обидві моделі можуть мати стосунок

до проблеми конфайнменту.

В останньому підрозділі 6.4 процедура редукції калібрувального поля-посередника ітераційно застосовано до спінорної хромодинаміки. У такий спосіб можливо отримати вищі наближення до короткосяжної взаємодії кварків у координатному представленні. У 1-му наближенні поряд із взаємодією одноглюонного обміну виникає взаємодія, що описується похідною від тричастинкового кластерного потенціалу, отриманого в рамках нелінійних модифікацій моделі Віка-Куткоскі та дипольної. У 2-му наближенні з'являється 4-частинковий потенціяль. При великих відстанях обидва потенціали мають кулонівські асимптотики.

### **Наукова новизна одержаних результатів.**

1. Запропоновано широкий клас пуанкаре-інваріантних двочастинкових систем в рамках формалізму інтегралів дії типу Фоккера із ядром взаємодії, пропорційним до запізненої (чи випередної) функції Гіна рівняння Даламбера. Побудовано явно коваріантний опис таких *часо-асиметричних* систем в рамках діраківського формалізму з в'язями та тривимірний гамільтонів опис типу Бакамджіана-Томаса. Усі часо-асиметричні системи інтегровні у квадратурах. Фізично змістовний підклас часо-асиметричних систем відповідає такій взаємодії через релятивістичне безмасове поле довільного спіну (включно з гравітаційним), коли на одну частинку діє випередне поле другої частинки, а на другу – запізнене поле першої. Проаналізовано динаміку (точну чи наближену) таких систем, здійснено їх квантування методом динамічної алгебри, знайдено спектри зв'язаних станів.

2. Для фоккерівської моделі Рівакоби-Вейса запропоновано інтерпретацію векторної взаємодії лінійного росту в термінах ефективної теорії поля з вищими похідними. Побудовано часо-асиметричну версію моделі, здійснено квантування, виведено та розв'язано хвильове рівняння. Отримано спектри мас системи з частинками (кварками) різної маси – траєкторії Редже, показано, що вони узгоджуються із спектрами сімейств важких та легких мезонів і виявляють характерне для них випадкове виродження типу кулонівського.

3. Запропоновано псевдо-пертурбативний метод майже колових орбіт (МКО) для гамільтонізації та квантування часо-симетричних фоккерівських ін-

тегралів дії загального вигляду. Метод застосовано до моделі Рівакоби-Вейса та її скалярно-векторної версії, більш адекватної для універсального опису важких та легких мезонів. Обчислені траєкторії Редже незалежно підтверджують важливість скалярної компоненти міжкваркової взаємодії в мезонах.

4. В рамках частково редукованої теорії поля виведено двочастинкове рівняння Дірака (2ЧРД) з потенціалом Брайта і квазірелятивістичними поправками, і його узагальнення на випадки (псевдо)скалярної, (псевдо)векторної і тензорної взаємодії. Потенціал виражено через симетричну функцію Гріна поля-медіатора взаємодії або феноменологічне Пуанкарє-інваріантне ядро взаємодії із заданими властивостями.

5. Запропоновано блок-матричне представлення радіально редукованого 2ЧРД та зведення його до матрично-двоочленного рівняння 2-го порядку, що дозволило:

- а) виявляти нефізичні синг'улярності 2ЧРД;
- б) непертурбативно обчислити енергію ортопозитронію для довільного значення константи взаємодії  $\alpha$ , отримати її критичне значення  $\alpha_c = 2/\sqrt{3}$ ;
- б) знайти сім'ю нових точно розв'язних 2ЧРД типу осциляторів Дірака;
- в) розвинути та застосувати у спектроскопії мезонів псевдо-пертурбативний метод  $1/j$ -розкладів розв'язування 2ЧРД з довільним локальним потенціалом.

6. Запропоновано нелінійні узагальнення скалярних моделей КТП (Віка-Куткоскі і дипольної), що приводять до тричастинкового потенціалу взаємодії логарифмічного росту. Показано, що цей потенціал пов'язаний з кластерними поправками до взаємодії 1-глюонного обміну у спінорній хромодинаміці.

### **Практичне значення одержаних результатів.**

Отримані в дисертації результати можуть бути використані для опису класичних та квантових малочастинкових систем, в яких релятивістична кінематика та запізнення взаємодії є істотними, однак радіаційними ефектами (а в квантовому описі - ефектами народження-знищення) можна знехтувати. Серед таких систем можуть бути йони важких атомів, ядра легких елементів, важкі та легкі гадрони та системи гіпотетичних частинок - представників темної матерії. Пред-

ствалений в дисертації підхід може спростити обчислення спектрів таких систем, в обхід складних теоретико-польових методів, або дати попередні результати у тих випадках, коли (ще) немає послідовного теоретико-польового опису взаємодії. Деякі результати дисертації вже використано в літературі [100, 101, 111].

**Особистий внесок здобувача.** Серед основних робіт, в яких опубліковано результати дисертації [1–24], роботи [2–4, 6, 7, 10, 13–16, 22, 24] виконані без співавторів. В решті основних робіт внесок здобувача розкрито нижче. В роботі [1] здобувачем побудовано явно коваріантний канонічний опис з в'язями двочастинкових систем на світловому конусі. Розвиток цього підходу представлено і в роботі [5], де автору також належать усі результати стосовно динаміки часоасиметричних моделей у 4-вимірному просторі Мінковського. В роботі [8] для часоасиметричних моделей із довільною взаємодією польового типу побудовано генератори динамічної алгебри  $so(2,1)$  та запропоновано пертурбаційну процедуру діагоналізації. В роботі [9] дисертант показав, що двоферміонне варіаційне рівняння у калібруванні Лоренца не є хибним рівнянням Едінгтона-Ганта (як очікував співавтор), а з врахуванням поправок на запізнення збігається з рівнянням Брайта, отриманим співавтором у калібруванні Кулона. Автор також здійснив радіальну редукцію цього р-ня та запропонував матричний метод діагоналізації. В роботі [12] автор виводить поправки на запізнення для взаємодій різної лоренц-структур. В роботі [11] для частково редукованої моделі Юкави та її узагальнень автор пропонує послідовну пертурбаційну схему побудови класичного гамільтонового опису, а в роботі [20] – генераторів групи Пуанкаре, що послужили співавторам основою для квантування. В цьому ж ключі в роботах [17–19] розглядаються нелінійні узагальнення моделей Віка-Куткоскі та дипольної, де автор буде редукований лагранжіан системи, нелінійні нелокальні поправки до гамільтоніану, а також явно виводить і досліджує нерелятивістичний потенціал кластерної 3-частинкової взаємодії. Пов'язані із ним кластерні потенціали у класичній хромодинаміці автор вивчав у роботі [21]. У роботі [23] здобувач пропонує модель типу Юкави із тахіонною взаємодією, виводить для неї нерелятивістичний потенціал, і досліджує зв'язані стани відповідного р-ня Шредінгера.

## **Апробація результатів дисертації.**

Результати дисертації доповідались і опубліковані в матеріалах таких конференцій, нарад та семінарів: Науковий семінар “Проблеми релятивістичної квантової механіки системи частинок”, присвячений 90-річчю з дня народження професора Зенона Храпливого (Україна, Львів, 19 квітня 1994) [141], X Міжнародна конференція “Адрони–94” (Україна, Ужгород, 7–11 серпня 1994) [25], Міжнародна конференція “Симетрія в нелінійній математичній фізиці” (Україна, Київ, 3–8 липня 1995) [2], III Міжнародна конференція “Симетрія в нелінійній математичній фізиці” (Україна, Київ, 12–18 липня 1999) [26], XXXII Симпозіум з математичної фізики; спец. сесія: “Симетрії в нелінійних системах” (Польща, Торунь, 6–10 червня 2000) [8], “Різдвяні дискусії 2001” на кафедрі теоретичної фізики ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 3–4 січня 2001) [27], XVIII Європейська конференція з проблем кількох частинок у фізиці (Словенія, Блед, 8–14 вересня 2002) [28–31], “Різдвяні дискусії 2003” на кафедрі теоретичної фізики ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 3–4 січня 2003) [149], XVII Міжнародна конференція з проблем кількох частинок у фізиці (США, Північна Кароліна, Дюрам, 5–10 червня 2003) [32–34] Наукова конференція “Сучасні проблеми квантової теорії” присвячена 100-річчю від дня народження Зіновія Храпливого (Україна, Тернопіль, 15–16 березня 2004) [35], VI Міжнародна конференція “Симетрія в нелінійній математичній фізиці” (Україна, Київ, 20–26 червня 2005) [13], “Різдвяні дискусії 2006” на кафедрі теоретичної фізики ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 4–5 січня 2006) [36], II Міжнародна конференція з квантової електродинаміки та статистичної фізики (Україна, Харків, 19–23 вересня 2006) [37], VII Міжнародна конференція “Симетрія в нелінійній математичній фізиці” (Україна, Київ, 24–30 червня 2007) [15], “Різдвяні дискусії 2008” на кафедрі теоретичної фізики ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 4–5 січня 2008) [38], Меморіальні читання на пошану Романа Пантелеїмоновича Гайди. ІФКС НАН України та Наукове товариство ім. Шевченка (Україна, Львів, 9–10 жовтня 2008) [16], Всеукраїнський семінар з теоретичної та математичної фізики. До 80-річчя професора А.В.Свідзинського (Україна, Луцьк, 27 лютого – 01 березня 2009) [39], 5-та міжнародна конференція РНАОПМ – 2010 (Українська Радянська Академія наук фізики, астрономії, математики та механіки, Київ, 1–4 березня 2010) [40].

на, Луцьк, Шацькі озера, 1–5 червня 2010) [41], X Всеукраїнська школа-семінар і конкурс молодих вчених у галузі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Україна, Львів, 3–4 червня 2010) [40], 3<sup>rd</sup> Workshop on Current Problems in Physics (Ukraine, Lviv, July 5–9, 2010) [42], 21<sup>th</sup> European Conference on Few-Body Problems in Physics (Spain, Salamanca, August 29 – September 3, 2010) [19], III Міжнародна конференція з квантової електродинаміки та статистичної фізики (Україна, Харків, 29 серпня – 2 вересня 2011) [43], Наукова конференція “Нові напрямки у фізиці та астрофізиці” присвячена 65-річчю проф. І. О. Вакарчука. ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 15–16 березня 2012) [44], Конференція фізичної комісії НТШ “50 років концепції тахіонів” (Україна, Львів, 20 березня 2012) [47], Всеукраїнська наукова конференція “Актуальні проблеми теоретичної, експериментальної та прикладної фізики” (Україна, Тернопіль, 20–11 вересня 2012) [45], “Різдвяні дискусії 2013” на кафедрі теоретичної фізики ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 3–4 січня 2013) [46], 6<sup>th</sup> Workshop on Current Problems in Physics (Poland Zielona Góra, September 23-25, 2013) [166], 7<sup>th</sup> Workshop on Current Problems in Physics (Ukraine, Lviv, July 8-9, 2014) [48], “Різдвяні дискусії 2015” присвячені 110-річчю від дня народження професора В. С. Мілянчука” на кафедрі теоретичної фізики ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 12-13 січня 2015) [49], 8<sup>th</sup> Workshop on Current Problems in Physics (Poland Zielona Góra, October 19-22 2015) [50], Звітна конференція за проектами конкурсу Ф64 при Державному фонду фундаментальних досліджень (Україна, Київ, 26 січня 2016).

Окремі результати неодноразово доповідалися на семінарах Інституту фізики конденсованих систем НАН України, відділу теорії релятивістичних систем (колишньому) та відділу комп’ютерного моделювання багаточастинкових систем цього інституту, а також на інших наукових зустрічах.

**Публікації.** Матеріали дисертації представлено у 24 статтях у фахових наукових журналах і збірниках [1–24], 26 матеріалах і тезах конференцій [25–50], та 16 препрінтах [170–185].

**Подяки.** Цією роботою вшановую світлу пам'ять наукового консультанта, д.ф.-м.н. В.І. Третяка. Висловлюю щиру подяку професору Йоркського ун-ту Ю. Даревичу за всебічну підтримку, допомогу та наукове партнерство, професору Барселонського ун-ту Дж. Лльозі за цінні ідеї та гостинність, професору Т.М. Брику за підтримку і сприяння як завідувачу відділом, д.ф.-м.н. Ю.Г. Яремку за численні плідні обговорення результатів. Цієї дисертації не було би написано, якби не терплячість і підтримка любої дружини Наталії та заохочення її батька М.В. Дудяка.

## РОЗДІЛ 1

### ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

#### **1.1. Релятивістичні хвильові рівняння в задачі на зв'язані стани**

Перехід від нерелятивістичної до релятивістичної механіки (як класичної, так і квантової) пов'язаний із формальною заміною групи інваріантності Галілея на групу Пуанкаре – неоднорідну групу Лоренца. Така заміна має глибокі фізичні наслідки. По-перше, природно з'являється *спін*  $s$ , що разом із масою спокою характеризує лоренц-структурну хвильової функції частинки. Для частинок спостережуваної матерії – електронів, нуклонів і багатьох ядер –  $s = \frac{1}{2}$ , а відповідна 1-частинкова задача описується хвильовим рівнянням Дірака – на відміну від рівняння Кляйна-Гордона для скалярних частинок (із  $s = 0$ ). По-друге – значно складнішим стає опис взаємодії. Нерелятивістична взаємодія частинок описується потенціалом статичного поля, що “приєднане” до джерела–частинки, і миттєво реагує на зміну її положення. Через це, а формально – завдяки галілей-інваріантності, 2-частинкове рівняння Шредінгера ефективно зводиться до 1-частинкового. Релятивістична взаємодія поширюється із запізненням, а більш загально – нелокальна у часі, що зумовлено вимогами Пуанкаре-інваріантності. У цьому відношенні взаємодія між рухомими частинками принципово відрізняється від статичної взаємодії із нерухомим джерелом, а задача 2-х частинок значно сладніша від 1-частинкової, і точне її формулювання є проблематичним.

Природніми носіями взаємодії є релятивістичні поля, що характеризуються масою і своєю лоренц-структурою – вони мають цілий спін. Прикладами є векторне ( $s = 1$ ) електромагнетне поле, скалярне ( $s = 0$ ) поле Гігса або псевдоскалярне

мезонне поле, тензорне ( $s = 2$ ) поле лінеаризованої гравітації. Традиційним шляхом опису таких взаємодій є тлумачення на рівних правах як частинок матерії, так і полів-носіїв взаємодії із власними ступенями вільності. Кvantовий опис такої системи здійснюється в термінах матриці розсіяння на просторі Фока і, в точному розумінні, є задачею  $\infty$ -го числа частинок. Задача ж про зв'язані стани 2-х або скінченного числа частинок вимагає застосування тих чи інших наближень у квантовій теорії поля, або ж побудови релятивістичних хвильових рівнянь із загальних принципів і феноменологічним описом взаємодій. Але і в останньому випадку зв'язок із теорією поля (хоча б класичною) дозволяє наповнити задачу фізичним змістом.

### 1.1.1. Рівняння Брайта та його узагальнення

Будемо розглядати стаціонарне релятивістичне хвильове рівняння вигляду:

$$H\Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \{h_1(\mathbf{p}_1) + h_2(\mathbf{p}_2) + U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\} \Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = E\Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (1.1.1)$$

для власного значення енергії  $E$  та 16-компонентної функції (діраківського  $4 \times 4$ -біспінору)  $\Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , залежної від 3-координат  $\mathbf{x}_a$  2-х частинок ( $a = 1, 2$ ); тут

$$h_a(\mathbf{p}_a) = \boldsymbol{\alpha}_a \cdot \mathbf{p}_a + m_a \beta_a, \quad a = 1, 2, \quad (1.1.2)$$

є діраківськими гамільтоніанами вільних частинок з масами  $m_a$ ,  $\mathbf{p}_a = -i\nabla_a \equiv -i\partial/\partial\mathbf{x}_a$  (у координатному представленні), а  $U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$  – потенціал взаємодії. Матриці Дірака  $\boldsymbol{\alpha}_a$  та  $\beta_a$  діють лише на ті індекси хвильової ф-ї  $\Phi$ , що відносяться до підпростору  $a$ -ї частинки.

Вперше рівняння (1.1.1) з'явилося в літературі в 1929 році для опису двох електронів із релятивістичним узагальненням кулонівського потенціалу  $U_C(\mathbf{r}) = q_1 q_2 / r$  – потенціалом Брайта [76]

$$U_B(\mathbf{r}) = U_C(\mathbf{r}) + \Delta U_B(\mathbf{r}) \equiv \frac{q_1 q_2}{r} [1 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \mathbf{n} \boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \mathbf{n})], \quad (1.1.3)$$

замість дещо ранішої версії Едінгтона-Ганта [77, 78]

$$U_{EG}(\mathbf{r}) = \frac{q_1 q_2}{r} [1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2]; \quad (1.1.4)$$

тут  $q_a$  – заряд  $a$ -ї чатинки ( $= e$  для електрона в даному разі),  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ,  $r \equiv |\mathbf{r}|$ ,  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{r}/r$ .

Обидва потенціали повстають із розв'язків класичних рівнянь Максвела для точкових джерел (потенціалів Льєнара-Віхерта) за різних калібрувальних умов: потенціал Едінгтона-Ганта – за умови Лоренца, а Брайта – за умови Кулона. Порушення як калібрувальної, так і точної пуанкарє-інваріантності 2ЧРД пов'язане із наближенням характером потенціалів (1.1.3) і (1.1.4) – в процесі їх виведення втрачається (або лише частково враховується) запізнена природа вихідних потенціалів Льєнара-Віхерта. Перевагу надали потенціалу Брайта, оскільки він узгоджується із класичною механікою заряджених частинок у 1-му квазірелятивістичному наближенні (тобто, з точністю до  $1/c^2$ ). А саме, він отримується із лагранжіану Дарвіна [186] шляхом евристичної заміни швидкостей частинок  $\mathbf{v}_a/c$  (зважених на швидкість світла  $c$ ) на матриці Дірака  $\alpha_a$ . Тим не менше, питання калібрувальної інваріантності рівняння Брайта (тобто 2ЧРД із потенціалом (1.1.3)) залишається відкритим, і буде розглянутим в Розділі 5.

Як і 1-частинкове рівняння Дірака, рівняння Брайта допускає від'ємно-енергетичні розв'язки, які слід відкинути як нефізичні. Для цього Зенон Храпливий та ін. [187–189] запропонували узагальнення унітарного перетворення Фолді–Воутхойзена. Воно ітеративно виділяє в гамільтоніані Брайта (тобто, в операторі у правій частині (1.1.1)) блок типу Паулі – оператор Шредінгера із квазірелятивістичними (в т.ч. спін-залежними) поправками – що діє лише на велико-велику  $2 \times 2$ -компоненту діраківського біспінору  $\Phi_{++}$ , і не змішує її із рештою компонент  $\Phi_{+-}$ ,  $\Phi_{-+}$ ,  $\Phi_{--}$  – велико-малою і т.д.; надалі назовемо ці блок-компоненти *dіраківськими*. Це дало змогу пертурбативно обчислювати квазірелятивістичні поправки до спектру атому водню і позитронію. Недавно обчислено вищі ітерації перетворення Храпливого [190–192], однак їх застосування до р-ня Брайта має сенс, якщо у відповідний потенціал включити квазірелятивістичні поправки вищих порядків. Деякі такі поправки до потенціалів векторної, скалярної та інших взаємодій розглядаються в Розділі 5.

Обчислення спектру позитронію з точністю до 4-го ступеня сталої тонкої

структурі  $\alpha$  [189, 193] виявило на межі 1940-1950х рр. деяку неточність рівняння Брайта і необхідність його корекції з допомогою квантової електродинаміки, сформованої на той час. По-перше, класичний за природою потенціал Брайта не містить анігіляційного внеску у взаємодію. Його врахували Берестецький і Ландау [194] з наближеного вторинно квантованого опису електрон-позитронної системи. Отриманий їх квазірелятивістичний гамільтоніан типу Паулі-Шредінгера вже коректно відтворював спектр позитронію з точністю до  $\alpha^4$  [195, 196]. Подруге, великі та малі компоненти хвильової функції пов'язані (але не тотожні) з частинковими та античастинковими станами в пертурбативній КТП, де ці стани розділяють з допомогою проекційних операторів [2]:

$$\Lambda_a^\pm(\mathbf{p}_a) \equiv \frac{1}{2}\{1 \pm h_a(\mathbf{p}_a)/E_a(\mathbf{p}_a)\}, \quad (1.1.5)$$

$$\text{тут } E_a(\mathbf{p}_a) \equiv E_{m_a}(\mathbf{p}_a) \equiv \sqrt{\mathbf{p}_a^2 + m_a^2}, \quad (1.1.6)$$

а  $h_a(\mathbf{p}_a)$  означені в р-ні (1.1.2). Згадана нетотожність породжує нефізичний доданок  $\sim e^4$  у квазірелятивістичному наближенні рівняння Брайта.

Ціла низка рівнянь, отриманих у різний спосіб, містять потенціали типу Брайта (1.1.3), модифіковані з допомогою явного чи неявного використання проекторів (1.1.5), вірніше їх двочастинкових комбінацій:

$$\begin{aligned} \Lambda^{\pm\pm}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) &= \Lambda_1^\pm(\mathbf{p}_1)\Lambda_2^\pm(\mathbf{p}_2), \\ \Lambda^{(\pm)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) &= \Lambda^{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \pm \Lambda^{--}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2). \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Для прикладу, потенціал  $U_{\text{BR}} = \Lambda^{++}U^B\Lambda^{++}$  отримано Брауном і Рейвенголом [197] із розгляду квантово-електродинамічного рівняння Шредінгера на просторі Фока з подальшою наближеною редукцією на 2-ферміонний сектор. Розвитком цієї роботи став варіаційний метод у КТП, про який ітиметься далі. Слід зауважити що, на відміну від  $U$  чи  $U_{\text{EG}}$ , потенціал  $U_{\text{BR}}$  є *нелокальним*, тобто залежить як від координат, так і від імпульсів, а відповідне хвильове рівняння є інтегро-диференційним, і лише у квазірелятивістичному наближенні стає диференційним.

В імпульсному представленні кінематичну частину рівняння Брауна-Рейвенгола можна спростити, спроектувавши його на додатньо-енергетичні стани

$\Phi^{++} \equiv \Lambda^{++} \Phi$ :

$$\{E - E_1(\mathbf{p}_1) - E_2(\mathbf{p}_2)\} \Phi^{++} = U \Phi^{++}. \quad (1.1.8)$$

Однак справа залишається складний інтегральний оператор  $U = U_{\text{ВР}}$ .

Така ж трудність характерна для потенціалу  $U_S = \Lambda^{(-)} U_B$ , виведеної Салпітером із явно коваріантного рівняння Бете-Салпітера [1] у результаті тривимірної редукції у наближенні миттєвої взаємодії [5]. У релятивістичній проблемі зв'язаних станів рівняння Бете-Салпітера та його редукції заслуговують на окреме обговорення.

### 1.1.2. Р-ня Бете-Салпітера та квазіпотенціальні р-ня

Двочастинкове рівняння Бете-Салпітера (БС) пов'язане із однорідним рівнянням Ліппмана-Швінгера для зв'язаних станів у пертурбативній електродинаміці. Його можна символічно записати у вигляді:

$$G_1^{-1} G_2^{-1} \psi = V \psi, \quad (1.1.9)$$

де  $G_a$  ( $a = 1, 2$ ) – пропагатори вільних частинок, а  $V$  – оператор взаємодії – сума усіх незвідних діаграм, що визначають 2-частинкову матрицю розсіяння. У координатному представленні амплітуда  $\psi(x_1, x_2)$  залежить від 4-координат  $x_a = \{x_a^0, \mathbf{x}_a\} = \{x_a^\mu\}$  ( $\mu = 0 \dots 3$ ) частинок у просторі Мінковського  $M_4$ , а  $G_a^{-1} = i \gamma_a^\mu \partial_\mu - m_a$  – коваріантний оператор Дірака. Оператор взаємодії у драбинковому наближенні є локальним і виражається через фотонний пропагатор:  $V(x_1 - x_2) = -i e^2 \gamma^\mu \gamma_\mu D(x_1 - x_2)$ . Т.ч., р-ня БС у цьому випадку є диференційним р-ням 2-го порядку (на відміну від р-ня Брайта 1-го порядку), в чому полягає одна із проблем його квантово-механічної інтерпретації. Особливо вона очевидна для випадку скалярних частинок Кляйна-Гордона, для яких  $G_a^{-1} = \square_a - m_a^2$ , а р-ня (1.1.9) стає 4-го порядку [112, 113].

Інша проблема пов'язана із перевагою р-ня БС над р-ням Брайта – воно явно коваріантне, отже точно симетричне щодо групи Пуанкаре. Внаслідок цього амплітуда  $\psi$  залежить, поряд із звичними змінними, і від відносно-

го часу  $x^0 = x_1^0 - x_2^0$ , або відносної енергії (0–компоненти відносного імпульсу)  $p^0 = \frac{1}{2}(p_1^0 - p_2^0)$  в імпульсному представленні – надлишкових змінних з погляду квантово-механічних зasad. Щоб обійти ці труднощі, було запропоновано різні способи редукції р-ня БС до тривимірного вигляду [198].

У вищезгаданій роботі [5] Салпітер запропонував для ядра взаємодії миттєве наближення  $V(p) = V(\mathbf{p}) \iff V(x) = \delta(x^0)V_{\text{I}}(\mathbf{x})$ , взявши його як основне у пертурбативній схемі. Т.ч. Салпітер отримав тривимірну редукцію р-ня БС у вигляді р-ня (1.1.1) із модифікованим потенціалом Брайта:  $U_{\text{S}} = \Lambda^{(-)}U_{\text{B}}$ . Надалі її називатимемо *р-нем Брайта-Салпітера*. Потенціал  $U_{\text{S}}$  не є ермітовим, і Баркер та Гловер [189] його “ермітували”:  $U_{\text{BG}} = \frac{1}{2}\{\Lambda^{(-)}U_{\text{B}} + U_{\text{B}}\Lambda^{(-)}\}$ , щоб застосувати перетворення Храпливого для квантово-механічного використання. Фельдман, Фултон і Таунсенд [199] показали, що Салпітер некоректно застосував миттєве наближення для побудови потенціалу  $U_{\text{S}}$ , що дає неправильні  $\alpha^4$ -поправки до спектру позитронію, однак “ермітування” в  $U_{\text{BG}}$  “випадково” виправляє помилку. Там же ж автори пропонують коректне миттєве наближення для потенціалу:  $U_{\text{FFT}} = \Lambda^{(-)}U_{\text{C}} + \Lambda^{++}\Delta U_{\text{B}}\Lambda^{++}$ , яке може бути корисне і при обчисленні вищих  $\alpha^6$ -поправок до спектру. В усіх випадках для додатньо-енергетичної хвильової функції  $\Phi^{++}$  можна отримати рівняння (1.1.8), хоча у випадку потенціалу Салпітера слід додатково накласти умови  $\Phi^{+-} = \Phi^{-+} = \Phi^{--} = 0$  [2]. В літературі (як і в цій дисертації) рівняння із кінематичною частиною типу (1.1.8) називають (хоч і не зовсім справедливо) *рівнянням Салпітера*.

До рівняння Бете-Салпітера в імпульсному представленні можна застосувати інший тип тривимірної редукції. Вона використовує той факт, що добуток 1-частинкових пропагаторів  $G_1(p_1)G_2(p_2)$  в р-ні (1.1.9) (вірніше, у вихідному р-ні Ліппмана-Швінгера) має гострий пік щодо відносної енергії  $p^0 = \frac{1}{2}(p_1^0 - p_2^0)$ . Якщо цей пік апроксимувати  $\delta$ -функцією і здійснити усереднення за  $p^0$ , то ця змінна випадає з рівняння. Натомість ядро оператора взаємодії набуває залежності від повної енергії  $E \equiv P^0 = p_1^0 + p_2^0$  – у вигляді множника [200] або й складніше. Через це отримане тривимірне рівняння називають квазіпотенціальним. Виділення  $\delta$ -функції із добутку  $G_1(p_1)G_2(p_2)$  є неоднозначним. Тому в літературі

запропоновано різні квазіпотенціальні рівняння, такі як Логунова-Тавхелідзе [7], Бланкенбеклера-Шугара [6], Тодорова [8] та інші [200–202]. Окрім того, що вони добре відтворюють тонку і гіпертонку структуру спектру водню [8, 92, 202], квазіпотенціали допускають загальну структуру, що не обмежується електромагнетною взаємодією. Зокрема, в роботі Матвеєва, Мурадяна і Тавхелідзе [93] квазіпотенціал будується ітеративно в термінах довільного оператора взаємодії  $V$  та проекційного оператора  $\Lambda^{(+)}$  (1.1.7).

З іншого боку, залежність квазіпотенціалу від енергії приводить до порушення ортогональності власних станів рівняння, появі, окрім власних, ще й асоційованих станів, а в цілому – ускладнює математичний опис та фізичну інтерпретацію теорії [201].

### 1.1.3. Метод Гупти

Якщо обмежитися взаємодією однофотонного (в загальному – однобозонному) обміну, то її квазірелятивістичний потенціал можна знайти із теорії розсіяння в борнівському наближенні, обчисливши матричний елемент відповідного ядра між вільночастинковими обкладками. Таким способом Гупта і співавтори відтворили не тільки (уточнений) потенціал Брайта у квазірелятивістичному наближенні [203], але й отримали його аналоги для гравітаційної [204, 205] та калібрувальної [206] взаємодій. Разом із стандартними кінематичними членами ці потенціали дають гамільтоніані Паулі-Шредінгера для дво- і кілька-частинкових систем із відповідною взаємодією. Метод допускає включення і радіаційних поправок [205, 206]. Його також можна поширити на феноменологічні моделі із довільною взаємодією в рамках заданої лоренцівської структури [207], зокрема, на квазірелятивістичні кваркові моделі гадронів, про що детальніше ітиметься в підрозділі 1.3.

#### 1.1.4. Варіаційний гамільтонів метод КТП

Браун і Рейвенгол для побудови згаданого вище уточненого потенціалу Брайта  $U_{\text{BR}} = \Lambda^{++}U_{\text{ВЛ}}\Lambda^{++}$  використали, по-перше, електродинамічне р-ня Шредингера, основане на гамільтоновому формулюванні КЕД, а по-друге – його проектування на двочастинковий стан [197]. Навіть більше, у цій роботі вказано на можливість врахування віртуальної електрон-позитронної пари.

Ці ідеї отримали розвиток як варіаційний підхід у гамільтоновому формалізмі КТП [10]. Тут, як і в квантовій механіці, виходять з р-ня Шредингера  $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ , де  $H$  – квантово-польовий гамільтоніан, отриманий з вихідного лагранжіану теорії, а власний стан  $|\psi\rangle$  задано на просторі Фока системи. Наприклад, для моделі Віка-Куткоскі, заданої лагранжіаном (6.3.10, с.294), власні стани допускають нескінчений розклад за секторами простору Фока:

$$|\psi\rangle = C|\varphi\rangle + D|\phi\rangle + \bar{D}|\bar{\phi}\rangle + F|\phi\bar{\phi}\rangle + G|\phi\bar{\phi}\varphi\rangle + \dots \quad (1.1.10)$$

із коефіцієнтними функціями  $C, D, \dots$  – (інтегрування у кожному доданку (1.1.10) явно не вказано).

Підстановка ряду (1.1.10) в р-ня Шредингера зводить останнє до нескінченного ланцюжка рівнянь на коефіцієнтні функції  $C, D, \dots$  та власне значення  $E$ , розв'язати який не реально.

Натомість, можна скористатися методом, що базується на варіаційному принципі

$$\delta\langle\psi|H - E|\psi\rangle = 0. \quad (1.1.11)$$

Він еквівалентний до рівняння Шредингера за умови цілком довільної варіації  $\delta\psi$ . На практиці ж, обмежуються наближенням варіаційним розв'язком, що включає скінченну кількість секторів та, відповідно, коефіцієнтних функцій – довільних або з обмеженого класу. Як результат, отримують скінченну систему рівнянь (подібно до методу Тамма-Данкова [208]). Для прикладу, найпростіший варіаційний стан моделі Віка-Куткоскі, що описує процес анігіляції чи народження пари

$\phi\bar{\phi} \leftrightarrow \varphi$ , можна задати так:

$$|\tilde{\psi}\rangle = C a_{\mathbf{0}}^\dagger |0\rangle + \int d^3p F(\mathbf{p}) b_{\mathbf{p}}^\dagger d_{-\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle, \quad (1.1.12)$$

де  $b_{\mathbf{p}}^\dagger$ ,  $d_{\mathbf{p}}^\dagger$  і  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  – оператори народження частинки, античастинки та проміжного бозона із вакуума  $|0\rangle$ , а константа  $C$  і функція  $F(\mathbf{p})$  – шукані амплітуди.

Загалом, чим більше секторів із розкладу (1.1.11) включено у пробний стан  $|\tilde{\psi}\rangle$ , і чим менше обмежень на коефіцієнтні функції, тим точніший результат, але і тим складніша система варіаційних рівнянь. Щоб її розв'язати, доводиться робити додаткові, часом неконтрольовані наближення, а результат часто обмежується дослідженням окремих станів. Тому успіх методу залежить від мистецтва так підбирати пробний стан, щоб його структура якомога краще відповідала фізиці реального стану, а рівняння були якомога простішими. Наприклад, вибір (1.1.12) є недостатнім і приводить до розбіжних рівнянь.

Взагалі кажучи, розбіжності у варіаційних рівняннях є швидше правилом, ніж винятком. У фізично змістовних випадках їх вдається усунути шляхом перенормування. Наприклад, у роботах [116, 209–211] це здійснено за допомогою нескінченної “голої” маси  $m_0$ , тоді як скінчена фізична маса  $m$  вводиться як варіаційний параметр. Така процедура додає до вільночастинкої енергії  $E_m(\mathbf{p})$  розбіжний контрчлен  $(m_0 - m)m/E_m(\mathbf{p})$  але, разом з іншими використаними наближеннями, ставить під сумнів пуанкарє-інваріантність переновмованих варіаційних р-нь.

Незважаючи на ці недоліки, варіаційний гамільтонів метод в КТП дозволив отримати цікаві результати, що або узгоджуються з іншими підходами, або є новими. Зокрема, застосування методу до модельних скалярних теорій поля, таких як Віка-Куткоскі, Юкави,  $\varphi^4$  тощо дає двочастинкові р-ня типу Шредінгера чи Салпітера, часом інтегровні аналітично [212], дозволяє дослідити квазі-зв'язані стани [114, 115, 213], тричастинкові стани [116] тощо.

Відпрацювання методу на простіших скалярних моделях дозволило розглянути подібні проблеми у більш реалістичному випадку квантової електродинаміки (спектр позитронію з врахуванням анігіляційного внеску [214], системи різних ча-

стинок, напр., мюоній [214], резонанси [215]), в окремих секторах Стандартної моделі [211], моделювати сильні взаємодії в ядрах [210] тощо [10]. Кваркові моделі гадронів у рамках варіаційного гамільтонового методу в КТП розглянутимуться в подрозділі 1.3.

Згадані вище хвильові рівняння виведені із теорії поля, в основному квантової, шляхом певних наближень, чим і визначається їх структура. Явно коваріантне рівняння Бете-Салпітера є точно пуанкаре-інваріантним, але його фізична інтерпретація не узгоджується із квантово-механічним принципом відповідності: хвильова функція повинна параметризуватися 3-ма (а не 4-ма) компонентами координат чи імпульсів на кожну частинку – у відповідності із кількістю ступенів вільності у класичній механіці. Цього досягають шляхом 3D-редукції р-ня БС, під час якої, однак, можуть “затъмаритися” властивості отриманих рівнянь щодо перетворень Пуанкаре.

Якщо опис взаємодії в рамках КТП не відомий або занадто складний, доводиться звертатися до феноменології. У цьому разі необхідно диспонувати потенціалом чи хвильовим рівнянням загального вигляду, що визначається вимогами інваріантності та іншими критеріями. Прикладом є узагальнене рівняння Брайта, або двочастинкове рівняння Дірака (1.1.1).

### 1.1.5. Двочастинкове рівняння Дірака

З огляду на термінологічні різночитання в літературі, у даній роботі під терміном *двочастинкове рівняння Дірака* (2ЧРД) буде розглядатися (окрім окремо зазначених випадків) стаціонарне релятивістичне хвильве рівняння виду (1.1.1), де потенціал  $U(\mathbf{r})$  може бути довільною конструкцією радіус-вектора  $\mathbf{r}$  та матриць Дірака.

Довший час 2ЧРД розглядали лише в рамках теорії збурень – квазірелятивістичних наближень і/або розкладів за константою взаємодії. Для випадку електромагнетної взаємодії тільки таке тлумачення рівняння Брайта (і то лише в 1-му наближенні) має фізичний сенс [2]. В задачах із сильним зв’язком викори-

стання теорії збурень є необґрунтованим. До 2ЧРД з різноманітними локальними потенціалами стали застосовувати непертурбативні методи. Зокрема, Кроліковські і Жевускі розвинули для 2ЧРД метод розділення змінних на радіальну і спін-кутові – так звану *радіальну редукцію* [216].

Як правило, 2ЧРД розглядають у системі відліку центра мас (ЦМ), у якій  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ , а група його інваріантності редукується до малої підгрупи обертань  $SU(2)$ . Тоді гамільтоніан  $H$  у лівій частині р-ня (1.1.1), а отже і потенціал  $U(\mathbf{r})$ , повинні комутувати із генератором  $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$  групи  $SU(2)$ :

$$[U(\mathbf{r}), \mathbf{J}] = 0 \iff [H, \mathbf{J}] = 0. \quad (1.1.13)$$

Тому хвильову функцію  $\Phi(\mathbf{r})$  можна вибрati як власну функцію операторів  $\mathbf{J}^2$  і  $J_3$ , розкладши кожну із *діраківських* компонент за сферичними біспінорами (A.1). Скалярні коефіцієнти такого розкладу, як функції від радіальної змінної  $r$ , задовільняють систему диференційних рівнянь 1-го порядку, структура якої залежить від вигляду потенціалу. Останній часто задають, згідно з умовою (1.1.13), у вигляді суми кількох довільних функцій від  $r$  із певними матричними коефіцієнтами; див. [90, 216–218]. Вигляд цих коефіцієнтів навіяно теорією поля – він повинен відображати лоренц-структурну відповідної взаємодії. Наприклад, структура  $[1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2]U_v(r)$  моделює векторну взаємодію (за аналогією із потенціалом (1.1.4)), а сам потенціал  $U_v(r)$  – її статичне наближення [216], для скалярної найчастіше беруть структуру  $\beta_1 \beta_2 U_s(r)$ , хоча є й інші варіанти [87, 97], відомі різні версії псевдоскалярної взаємодії [90, 217]. Суперпозицію таких трьох потенціалів використовують для моделювання ядерних взаємодій у дейtronі [90, 91] чи сильних взаємодій у мезонах [89]; більше про потенціальні моделі гадронів на основі 2ЧРД буде в підрозділі 1.3. Цікаво, що потенціал електромагнетної взаємодії – Брайта (1.1.3) – у цих термінах не є суто електромагнетним (всупереч очікувань Еддингтона і Ганта [77, 78]). Ще складнішим електромагнетний потенціал стає при врахуванні аномальних магнетних моментів [80, 82].

Найбільш загальний вигляд потенціалу, сумісного із умовою (1.1.13), знайшли Фущич і Нікітін [219]. Однак крім обертової інваріантності, потенціал по-

винен задовольняти інші фізичні вимоги – наприклад, ермітовість. Крім цього, не для кожного потенціалу система радіально редукованих рівнянь допускає коректну краєву задачу. Прикладом є 2ЧРД із потенціалом Брайта (тому це р-ня розв'язували пертурбативно).

Ці проблеми 2ЧРД досліджуватимуться в розділі 5.

Найбільш послідовні феноменологічні або напів-феноменологічні підходи до задачі про зв'язані стани – це ті, що належать до *релятивістичної теорії прямих взаємодій* (РТПВ). В основі таких підходів, серед інших фізичних принципів, лежить вимога точної (рідше – наближеної) інваріантності щодо групи Пуанкарє. В залежності від реалізації цієї вимоги підходи в РТПВ поділяються на *явно коваріантні* та *триевимірні*, а математичним підґрунтам для них слугує лагранжів, гамільтонів чи інший формалізм, пов'язаний із варіаційним принципом. З погляду квантово-механічного опису систем частинок найбільш розвиненими є гамільтонові підходи, що розглянатимуться далі.

### 1.1.6. Явно коваріантний канонічний підхід з в'язями

Відомо кілька явно коваріантних формулювань релятивістичної механіки системи взаємодіючих частинок, що базуються на діраківському формалізмі із в'язями [220]. Найвідоміший із них був заснований Дро-Венсаном [221], Тодоровим [222, 223] і Комаром [224, 225], і розвинутий в інших роботах [25, 226]. Для двох безспінових частинок класична механіка ДВТК задається парою в'язей I-го класу  $\phi_a = 0$  ( $a = 1, 2$ ), а її квантована версія описується відповідною парою хвильових рівнянь:

$$\phi_a \psi \equiv (p_a^2 - m_a^2 - V)\psi = 0, \quad a = 1, 2, \quad (1.1.14)$$

де 4-скалярний потенціал  $V$  залежить від 4-координат частинок  $x_a$  (точніше, відносної координати  $x \equiv x_1 - x_2$ ) і, взагалі кажучи, спряжених 4-імпульсів  $p_a$ . Він повинен задовольняти умову  $[\phi_1, \phi_2] = 0$  сумісності рівнянь (1.1.14), звідки  $V = V(x_\perp, p_1, p_2)$  – довільна 4-скалярна ф-я вказаних аргументів; тут  $x_\perp^\mu = \Pi_\nu^\mu x^\nu$ ,

де  $\Pi_\nu^\mu \equiv \delta_\nu^\mu - P^\mu P_\nu / P^2$  – проектор, ортогональний до повного 4-імпульсу системи  $P = p_1 + p_2$ .

Рівняння (1.1.14) можна еквівалентно представити двома їх лінійними комбінаціями. Піврізниця  $\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2)\psi = 0$ , а саме

$$\{P \cdot p - \frac{1}{2}(m_1^2 - m_2^2)\}\psi = 0, \quad (1.1.15)$$

є суто кінематичною (тобто, не залежною від взаємодії); вона усуває із опису 0-компоненту відносного імпульсу  $p = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$ , тобто відносну енергію; це очевидно у системі відліку ЦМ, де  $\mathbf{P} = 0$ . По-суті, р-ня (1.1.15) виконує ту ж роль, що і  $\delta$ -функція в квазіпотенціальному методі 3D-редукції р-ня БС. Це рівняння зручно розв'язати у представленні колективних змінних  $x$  і  $P$ :

$$\psi(x, P) = \exp\left(-\frac{i}{2}(m_1^2 - m_2^2)P \cdot x / P^2\right) \tilde{\psi}(x_\perp),$$

так що фізично неістотний фазовий множник вбирає в себе усю залежність від відносного часу  $x^0$ . У цих термінах півсума  $\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)\psi = 0$  рівнянь (1.1.14) визначає фізичну частину хвильової функції  $\tilde{\psi}(x_\perp)$ :

$$\left\{E_{|P|}^2 - m_{|P|}^2 + p_\perp^2 - V\right\} \tilde{\psi}(x_\perp) = 0; \quad (1.1.16)$$

тут  $E_{|P|} \equiv \frac{1}{2}(P^2 - m_1^2 - m_2^2)/|P|$ ,  $m_{|P|} \equiv m_1 m_2 / |P|$ , де  $|P| \equiv \sqrt{P^2}$ . Якщо оператор взаємодії  $V$  залежить від  $x_\perp$ ,  $P$ , але не від  $p$ , тобто  $V = V(x_\perp, P) = V(-x_\perp^2, |P|)$ , то (1.1.16) набуває вигляду ефективного р-ня Кляйна-Гордона, а по-суті – квазіпотенціального рівняння. Це очевидно у системі відліку ЦМ, де  $P = (M, \mathbf{0})$ ,  $x_\perp = (0, \mathbf{r})$  і, отже,  $p_\perp^2 = \Delta$ , а  $V = V(r^2, M)$  є локальним квазіпотенціалом, що залежить від повної маси системи  $M = E_{\text{cm}}$  (тобто, її енергії у системі ЦМ), так само, як і ефективні енергія  $E_M$  і маса  $m_M$ .

Узальнення формалізму ДВТК на систему двох діраківських частинок було здійснено в основному двома групами дослідників. У версії Сазджана [25, 227] таке узагальнення можна здійснити заміною р-нь (1.1.14) на

$$\{\gamma_a \cdot p_a - m_a - (\gamma_{\bar{a}} \cdot p_{\bar{a}} + m_{\bar{a}})V\}\psi = 0, \quad a = 1, 2; \quad \bar{a} = 3 - a \quad (1.1.17)$$

де хвильова функція  $\psi$  є діраківським  $4 \times 4$ -біспінором, а структура “потенціалу”  $V$  така ж, як і в скалярних рівняннях (1.1.14). Якщо частинка  $a$  є антиферміоном, відповідна маса в (1.1.17) формально змінює знак:  $m_a \mapsto -m_a$ . Запропоновано і формальне узагальнення на випадок системи  $N$  частинок [227].

Р-ня (1.1.17), відомі як двочастинкові рівняння Дірака (у множині!), також приводять до умови (1.1.15) і допускають 3D-редукцію до одного ефективного двочастинкового рівняння Дірака типу (1.1.1).

Дещо іншу форму явно коваріантних рівнянь для взаємодіючих діраківських частинок запропоновано Кратером і Ван Алстіном [228] – вона зручна для моделювання взаємодій польового типу, зокрема скалярної і векторної:

$$\gamma_{5a} \{ \gamma_a \cdot (p_a - A_a) - m_a - S_a \} \psi = 0, \quad a = 1, 2; \quad (1.1.18)$$

тут  $S_a$  і  $A_a$  – 4-скалярні та 4-векторні потенціали, задані у термінах 3-х (не обов'язково незалежних) скалярних функцій  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{A}$  і можливо  $\mathcal{V}$  від інваріанту  $x_\perp^2$ . Завдяки певному гіперболічному перетворенню [229] в опис можна додати взаємодій псевдоскалярного, псевдовекторного і тензорного типу.

Для наповнення такого феноменологічного опису фізичним змістом у низці робіт встановлено його зв'язок із рівняннями БС [230], квантовопольовою теорією розсіяння [231], електродинамікою Вілера-Фейнмана [232, 233], підходом Вільсона [234]. Завдяки вдалому підбору квазіпотенціалу [98] отримано коваріантний опис електродинамічної задачі на зв'язані стани, що відтворює з точністю до  $\alpha^4$  спектри водню, мюонію [28] і парапозитронію [235]. При цьому отримана система радіально редукованих рівнянь вільна від сингулярностей, характерних для рівняння Брайта, що дозволяє розв'язувати її числово [28] чи аналітично [235] і використовувати як базу для вищих наближень. Деякі результати отримано щодо опису систем гіпотетичних преонів [236], а застосування у спектроскопії гадронів буде описано в підрозділі 1.3.

Менш відомою є явно коваріантна модель Домінічі-Гомеша-Лонгі (ДГЛ), що походить із класичного формалізму сингулярних лагранжіанів [237, 238]. Вона приводить до гамільтонових в'язей, подібних до класичного аналогу рівнянь

(1.1.14) де, однак, потенціал  $V$  залежить від  $x^2$ , а не від  $x_\perp^2$ , як у випадку ДВТК. Як наслідок, з'являється вторинна в'язь – т. зв. умова Юкави-Маркова

$$P \cdot x = 0 \quad (1.1.19)$$

(див. [239, 240]), квантовий аналог якої не сумісний із р-ням (1.1.15) (а в класичних термінах – це в'язі ІІ-го класу). Тому явно коваріантне квантування здійснити не вдається за винятком випадку осциляторного потенціалу  $V \propto x^2$ , коли можна застосувати квантування Гупти-Блейлера [238].

Така ж вада притаманна певному  $N$ -частинковому узагальненню ДГЛ-моделі – явно коваріантному формалізму Рорліха [241, 242]. У ньому 4-координати частинок  $x_a = Q + \rho_a$  ( $a = 1, \dots, N$ ) задані через колективні змінні – положення центра мас  $Q$  і відносні частинкові 4-вектори  $\rho_a$ , на які, разом із спряженими до них імпульсними змінними  $P$ ,  $\pi_a$  накладаються пари в'язей ІІ-го класу  $P \cdot \rho_a = 0$ ,  $P \cdot \pi_a = 0$ , і в'язі І-го класу  $\sum_a \pi_a^\perp = 0$  та  $\phi = 0$  – остання визначає динаміку системи і містить довільний потенціал взаємодії. Моделі типу Рорліха використовуються у спектроскопії гадронів [23, 24, 243], але процедура їх квантування, як і ДГЛ-моделі, передбачає попередню редукцію у тривимірний гамільтонів формалізм.

### 1.1.7. Тривимірна релятивістична гамільтонова механіка

Як і формалізм із в'язями [220], тривимірна релятивістична гамільтонова механіка (3D РГМ, або коротко РГМ) у своїй основі була закладена Діраком [244] на межі 1949-50 рр. Згідно з його ідеями, класична динаміка системи  $N$  частинок в рамках РГМ описується канонічною реалізацією алгебри Лі групи Пуанкарے  $\mathcal{P}(1,3)$  на  $6N$ -вимірному фазовому просторі  $\mathbb{P}$ , заданою 10-ма функціями канонічних змінних:  $H = P_0, P_i, J_i, K_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – канонічними генераторами часових і просторових трансляцій, просторових поворотів і перетворень Лоренца (бустів). Це формулювання безпосередньо переноситься на квантову механіку заміною класичних генераторів ермітовими операторами, а дужок Пуасона – комутаторами.

Особливістю РГМ є те, що потенціал (або потенціали) взаємодії входить відразу у декілька генераторів групи Пуанкарے – на відміну від нерелятивістичної гамільтонової механіки, в якій потенціал взаємодії міститься лише у гамільтоніані, а інші інтеграли руху, пов’язані із галілеєвою інваріантністю, мають наперед відомий кінематичний вигляд (не залежний від взаємодії). Вигляд генераторів Пуанкарє неоднозначний, але очевидно, що вільні від взаємодії генератори породжують підалгебру алгебри  $\mathcal{AP}(1,3)$ . Відповідні гамільтонові описи Дірак назвав *формами релятивістичної динаміки*. Дірак запропонував ідею трьох форм динаміки – миттєвої, точкової та фронтальної (з максимально можливою кількістю кінематичних генераторів – 6, 6 та 7 відповідно), пов’язавши їх із означенням відношення одночасності на різних просторовоподібних або ізотропних гіперповерхнях у просторі Мінковського  $\mathbb{M}_4$ : у миттєвій формі динаміки – на гіперплощинах  $x_0 = t$ , у точковій – на гіперболоїдах  $x_0^2 - \mathbf{x}^2 = t^2$ , у фронтальній – на світлових фронтах  $x_0 - x_3 = t$ , де  $t$  – параметр, сталий на даній гіперповерхні. У кожній формі динаміки гіперповерхні одночасності при зміні  $t \in \mathbb{R}$  заповнюють  $\mathbb{M}_4$  шаруванням, так, що еволюція системи виглядає як перехід з однієї гіперповерхні на іншу, а  $t \in \mathbb{R}$  відіграє роль параметра еволюції.

Згодом виявилося, що канонічні координати взаємодіючих частинок не можуть бути просторовими компонентами  $\mathbf{x}_a$  коваріантних координат частинок  $x_a \in \mathbb{M}_4$ , а отже, структура генераторів  $\mathcal{P}(1,3)$  у РГМ взагалі кажучи не пов’язана із означенням одночасності. Такий зв’язок може з’явитися при оснащенні РГМ просторово-часовою інтерпретацією [245, 246], або у результаті 3D-редукції явно коваріантного опису із в’язами [247]. Однак, у квантовій задачі про зв’язані стани просторово-часова інтерпретація РГМ не дуже важлива. Геометрична ж концепція форм динаміки знайшла розвиток в іншому тривимірному формалізмі – лагранжевій механіці із вищими похідними; див. далі.

Отже, побудова РГМ зводиться до абстрактної задачі про розв’язування не-лінійних переставних співвідношень (класичних чи квантових) алгебри  $\mathcal{AP}(1,3)$ . Загальні розв’язки отримали Бакамджіан і Томас [18] для миттєвої та точкової форм динаміки, Лейтвілер і Штерн [248] для фронтальної, їх  $S$ -матричну еквіва-

лентність довів Соколов [19, 249], в інших роботах запропоновано узагальнення на довільні форми динаміки [20], враховано спіни та фізичні властивості взаємодій частинок [21, 250].

Т. зв. модель Бакамджіана-Томаса (БТ) явно задає загальний вигляд генераторів групи  $\mathcal{P}(1.3)$  для системи двох безспінових частинок. У миттєвій формі вони мають вигляд (2.1.56, с.111), і задані у термінах колективних змінних: зовнішніх – канонічного центра мас  $\mathbf{Q}$  і повного імпульсу системи  $\mathbf{P}$ , та внутрішніх відносних змінних  $\mathbf{r}, \mathbf{k}$ , означених з деякою довільністю. Подібну структуру має опис у точковій формі динаміки (3.2.21, с.168), як і його квантова версія (3.2.24, с.169).

У генераторах цих описів міститься одна довільна скалярна функція  $M(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  – повна маса системи, тобто енергія у системі відліку ЦМ. У квантовому описі її відповідає масовий оператор, а задача про зв'язані стани зводиться до рівняння (3.2.25, с.169). За певного вибору внутрішніх змінних повну масу можна представити як  $M(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = M_{\text{free}}(\mathbf{k}) + U(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ , де  $M_{\text{free}}(\mathbf{k}) = \sum_a \sqrt{m_a^2 + \mathbf{k}^2}$  – вільночастинкова маса, а  $U(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  – довільний потенціал взаємодії. У фізичних застосуваннях його задають феноменологічно, або виводять, якщо відомо зв'язок РГМ з теорією поля.

Узагальнення РГМ на системи з  $N \geq 3$  наштовхується на проблему сепарабельності: коли частинка стає вільною при її віддаленні від решти, повинні зникати і відповідні члени потенціалів. Елегантний спосіб конструювання таких потенціалів запропонував Соколов [19, 249]. Ці результати важливі для обчислення енергії зв'язку тритона [30], формфакторів дейтрона [251, 252], або у багатоканальних задачах розсіяння. Для таких задач зручно виявилась фронтальна форма динаміки [248] та її коваріантна модифікація [253].

Зв'язок із КТП встановлено в новішій версії точкової форми динаміки [252]: шляхом інтегрування квантово-польового лагранжіану взаємодії отримують оператор 4-імпульсу і редукують опис на скінченну кількість секторів простору Фока. Втрачена у процесі редукції комутативність компонент 4-імпульсу відновлюється шляхом модифікації матричних елементів 4-імпульсу, що приводить до опису типу Бакамджіана-Томаса (БТ) із матричним масовим оператором.

Інший шлях від теорії поля до РГМ лежить через суто класичні підходи в РТПВ: **тривимірний лагранжів формалізм з вищими похідними** та формалізм інтегралів дії типу Фоккера.

Лагранжіани релятивістичних систем взаємодіючих частинок відомі давно. Найперше, це лагранжіан Дарвіна [186] і Фіхтенгольца [254], що описують електромагнетну і гравітаційну взаємодії у 1-му квазірелятивістичному наближенні, тобто з точністю  $1/c^2$ . У вищих квазірелятивістичних наближеннях доводиться розглядати лагранжіани з прискореннями [255] та вищими похідними, загальний формалізм яких [256, 257] розвинув проф. Гайда та співавтори Ключковський і Третяк. Саме у лагранжевій механіці із вищими похідними була втілена діраківська ідея форм релятивістичної динаміки у її початковому, геометричному значенні [258]. Інше, не менш важливе значення цього формалізму – він пов’язаний як з РГМ [16], так із класичною теорією поля за посередництвом іншого класично-го формалізму РТПВ – формалізму інтегралів дії типу Фоккера [259, 260], який ми розглянемо у розділі 2.

## 1.2. Релятивістичні потенціальні моделі мезонів

### 1.2.1. Статичні потенціали міжкваркової взаємодії

Спектри мас важких мезонів (тих, що містять кварки  $s$  і  $b$ ) добре описуються в рамках нерелятивістичної *потенціальної моделі* – рівняння Шредінгера, що описує систему кварка та антикварка з відповідно підібраним потенціалом їх взаємодії. Подібно розглядаються баріони як композитні системи із трьох кварків. Немає потреби аналізувати величезний масив робіт, присвячених потенціальним моделям, оскільки вже існують оглядові статті, наприклад [207, 261]. Тут описано лише основні риси нерелятивістичних моделей, з тим, щоб перейти до розгляду релятивістичних.

В нерелятивістичних моделях використовують три типи потенціалів. Одні є суто феноменологічні, і підбираються таким чином, щоб якомога точніше описати якомога більшу кількість станів. Інші походять із квантової хромодинаміки

(КХД), хоч не є строго виведені із неї. Радше, їх отримують в рамках різних наближених підходів та оцінок в КХД. Та найкращі результати дає поєднання феноменології з КХД-мотивацією.

Найпростішим феноменологічним потенціалом, що вірно описує спільні риси розщеплення рівнів кварконію  $c\bar{c}$  і боттомонію  $b\bar{b}$ , є логарифмічний:

$$U(r) = C_0 \ln(r/r_0) \quad (1.2.1)$$

з деякими сталими  $C_0$  і  $r_0$  [207, 261].

Найвідомішим (і найпростішим) серед КХД-вмотивованих є корнельський потенціал [207, 261, 262]:

$$U(r) = -\alpha/r + ar. \quad (1.2.2)$$

Його кулонівська частина є нерелятивістичною границею взаємодії 1-глюонного обміну із константою, залежною від ароматного складу мезона:  $\alpha = 0.25 \div 0.3$  для  $b\bar{b}$  і  $c\bar{c}$ , і зростає із зменшенням мас кварків. Лінійна ж частина походить із вільсонівської петлі [207] у КХД на гратці. Її також можна пояснити дуальним ефектом Мейснера – гіпотезою про те, що між зарядами у неабелевому вакуумі внаслідок його конденсації утворюється трубка хromoелектричного поля – т. зв. *струна* [11, 263–265]. Тоді константа  $a$  має зміст *натягу струни*, і є універсальною величиною, тобто не залежною від аромату. Найвживаніше в потенціальних моделях значення  $a = 0.18 \div 0.2 \text{ ГeB}^2$  недавно підтверджено числовими КХД-симуляціями на гратці [266]. Часто, однак, константи  $\alpha$  та  $a$  використовують як феноменологічні параметри припасування.

Залежність  $\alpha$  від аромату кварків відображає той факт, що насправді це не є константа:  $\alpha = \frac{4}{3}\alpha_s$ , де т.зв. *біжуча константа сильної взаємодії*  $\alpha_s$  є функцією переданого імпульсу  $k = |\mathbf{k}|$ :

$$\alpha_s(k) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln(\mathbf{k}^2/\Lambda^2)}; \quad (1.2.3)$$

тут  $\Lambda$  – масштабний параметр КХД, а  $n_f$  – кількість кваркових ароматів, істотних у процесах поляризації вакуума (звичайно покладають  $n_f = 3$ ). Така залежність

відображає асимптотичну свободу КХД в границі  $k \rightarrow \infty$  або  $r \rightarrow 0$ . Оскільки логарифм – повільно-змінна функція, то аргумент  $k$  в (1.2.3) зручно замінити на сталій енергетичний масштаб, характерний для даної моделі, наприклад  $\alpha_s(m_q)$ , що і забезпечує залежність  $\alpha$  від маси кварків  $m_q$ .

Відомі і складніші КХД-вмотивовані потенціали. Наприклад, потенціал Річардсона [207, 261], заданий в імпульсному представленні залежністю:

$$\tilde{U}(k) \sim \frac{1}{k^2 \ln(1 + k^2/\Lambda^2)}. \quad (1.2.4)$$

Його ультрафіолетова асимптотика (при  $k \rightarrow \infty$ ) відтворює кулонівський потенціал (в імпульсному представленні) з біжучою константою (1.2.3), тоді як інфрачервона асимптотика  $\tilde{U}(k) \sim 1/k^4$  (при  $k \rightarrow 0$ ) відображається у лінійну залежність від координати  $r$ . Таким чином, потенціал Річардсона здійснює апроксимацію між асимптотичною свободою та конфайнментом без додаткових параметрів.

У проміжній області значень  $r$  координатне представлення потенціалу Річардсона (яке, між іншим, не можна виразити в елементарних функціях) не є КХД-вмотивоване. Цього недоліку позбавлений потенціал Адлера-Пірана [267, 268]. Окрім ведучого лінійного члену, він дає логарифмічну та інші субдомінантні поправки, отримані частково аналітично та числово на базі ефективного лагранжіану КХД.

На основі моделі непертурбативного глюонного пропагатора, побудованої з вимог аналітичності, Чіковані, Єнковський і Пакканоні (CJP) одержали 5-параметричний потенціал із короткосяжною поведінкою як в потенціалу Річардсона, і далекосяжною частиною  $U_{\text{CJP}}(r) \approx a(1 - e^{-\mu r})/\mu$ , що плавно виходить на поличку. Цим враховано ефект народження легких пар  $q\bar{q}$ , що приводить до розриву струни. При значеннях параметрів  $a = 1.23 \text{ GeV}^2$ ,  $\mu = 0.02 \text{ GeV}$  потенціал  $U_{\text{CJP}}$  добре описує спектри важких кварконіїв.

Інші, напів-феноменологічні потенціали, також можуть містити вільні параметри припасування, що покращує опис спектрів мезонів, але зменшує теоретичне значення моделі [207, 261].

Потенціальні моделі застосовують і для опису баріонів як трикваркових си-

стем [269, 270]. У цьому разі короткосяжна частина потенціалу містить попарні взаємодії 1-глюонного обміну, але з меншою константою взаємодії  $\alpha = \frac{2}{3}\alpha_s$ . Далекосяжна взаємодія залежить від форми тричастинкової петлі Вільсона, і може описуватися або  $\Delta$ -конфігурацією струни (тобто суперпозицією попарних взаємодій), або  $Y$ -конфігурацією (3-частинковою кластерною взаємодією). Відповідні потенціали мають вигляд:

$$U_{\Delta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = a(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| + |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3| + |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|)$$

$$U_Y(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = a \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3} (|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}| + |\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}| + |\mathbf{x}_3 - \mathbf{y}|)$$

де  $\mathbf{x}_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) – координати кварків, а  $\mathbf{y}$  – точка розгалуження струн. Числові КХД-симуляції на гратці показують, що насправді формується певна конфігурація, проміжна між  $Y$  і  $\Delta$ .

### 1.2.2. Квазірелятивістичні поправки

Спінові ефекти враховують з допомогою релятивістичних поправок до статичних потенціалів. На відміну від електродинаміки, міжкваркова взаємодія не має надійної теоретико-польової бази, і ні статичні потенціали, ні поправки до них достеменно не відомі. Тому їх визначають опосередковано, з вимог наближеної пуанкаре-інваріантності та загальних теоретичних міркувань. В перших потенціальнích моделях спінові поправки містили значну функціональну довільність [261] – у відповідності із загальною структурою квазірелятивістичних гамільтоніанів [271]. Згодом, шляхом зіставлення різних теорій поля та підходів, як квантових [207, 272], так і класичних [271, 273], були знайдені рецепти, що дозволяли для довільного статичного потенціалу майже однозначно будувати квазірелятивістичні поправки – як спінові [207], так і незалежні від спіну [274, 275] – із заданою лоренцівською структурою взаємодії. Для 5-ти основних таких структур двоферміонної взаємодії – скалярної, векторної, псевдоскалярної, псевдовекторної і тензорної – лише дві перші мають нерелятивістичну (статичну) границю [207]. Тому у більшості моделей поправки до далекосяжної взаємодії наділяють скалярною або

скалярно-векторною структурою [207, 269, 276] – цього достатньо для задовільного опису тонкої і надтонкої структури спектру важких мезонів. Що стосується короткосяжної взаємодії, то вона завідомо векторна, і поправки до неї подібні до електромагнетних, хоча неабелевість глюонного поля вносить свої особливості [277].

### 1.2.3. Спектри мас легких мезонів

Спектри мас легких мезонів (складених з  $u$ ,  $d$  і  $s$  кварків) мають характерні риси, що після деякої ідеалізації вкладаються у таку картину [278, 279]:

1. Мезонні стани лягають у площині  $(M^2, j)$  на прямі, відомі як траєкторії Редже, де  $j$  – власний момент імпульсу мезону.
2. Траєкторії Редже паралельні одна одній з універсальним параметром нахилу  $\sigma \approx 1.15^2$ .
3. Нерелятивістична класифікація мезонів як  $(n^{2s+1}\ell_j)$ -станів кварк-антикваркової системи є адекватною: поряд із  $j$  “хорошими” квантовими числами можна вважати орбітальне число  $\ell$ , сумарний спін системи  $s$  та радіальне число  $n_r$  (або пов’язане з ним головне число  $n = n_r + \ell + 1$ ).
4. Спектри є  $\ell s$ -виродженими: вони залежать від  $\ell$  та  $n_r$ , та не від  $j$  чи  $s$ .
5. Стани з різними  $\ell$  і  $n_r$  характеризуються додатковим (випадковим) виродженням, що приводить до “вежової” структури спектру [279].

Детальніше твердження 1–3 означають, що у площині  $(M^2, \ell)$  мезонні стани також утворюють прямі: існує 4 головних ( $n_r = 0$ ) траєкторії Редже, що відповідають синглетним ( $s = 0$ ) та триплетним ( $s = 1$ ) сімействам станів, і кожна головна траєкторія породжує низку дочірніх ( $n_r = 1, 2, \dots$ ). Тоді твердження 4 значить, що у площині  $(M^2, \ell)$  усі головні траєкторії вироджуються в одну (це ж стосується і дочірніх траєкторій з фіксованим  $n_r$ ). Отже, енергетичні рівні системи  $q\bar{q}$  можна описати формулою:

$$M^2 \approx \sigma(\ell + \kappa n_r + \zeta), \quad (1.2.5)$$

де стала  $\zeta$  – т.зв. *інтерцепт* – залежить від ароматного вмісту мезону ( $\zeta \approx 1/2$  для  $(\pi-\rho)$ -сім'ї мезонів; вона зростає разом із масою кварків). Нарешті, пункт 5 обмежує сталу  $\varkappa$  до цілого або раціонального числа [279].

В літературі найчастіше використовують масові формули з  $(\ell + 2n_r)$ -залежністю, характерною для осциляторних та деяких струнних моделей мезонів, про які ітиметься далі. Значно менш поширені  $(\ell + n_r)$ -залежність; вона з'являється у запропонованих в [280, 281] феноменологічних формулах для опису  $\pi-\rho$  і К-траекторій. Обидві можливості пролюстровані на рис. 1.1, де відповідні траекторії Редже показано у координатах  $(M^2, j)$  і  $(M^2, \ell)$ .

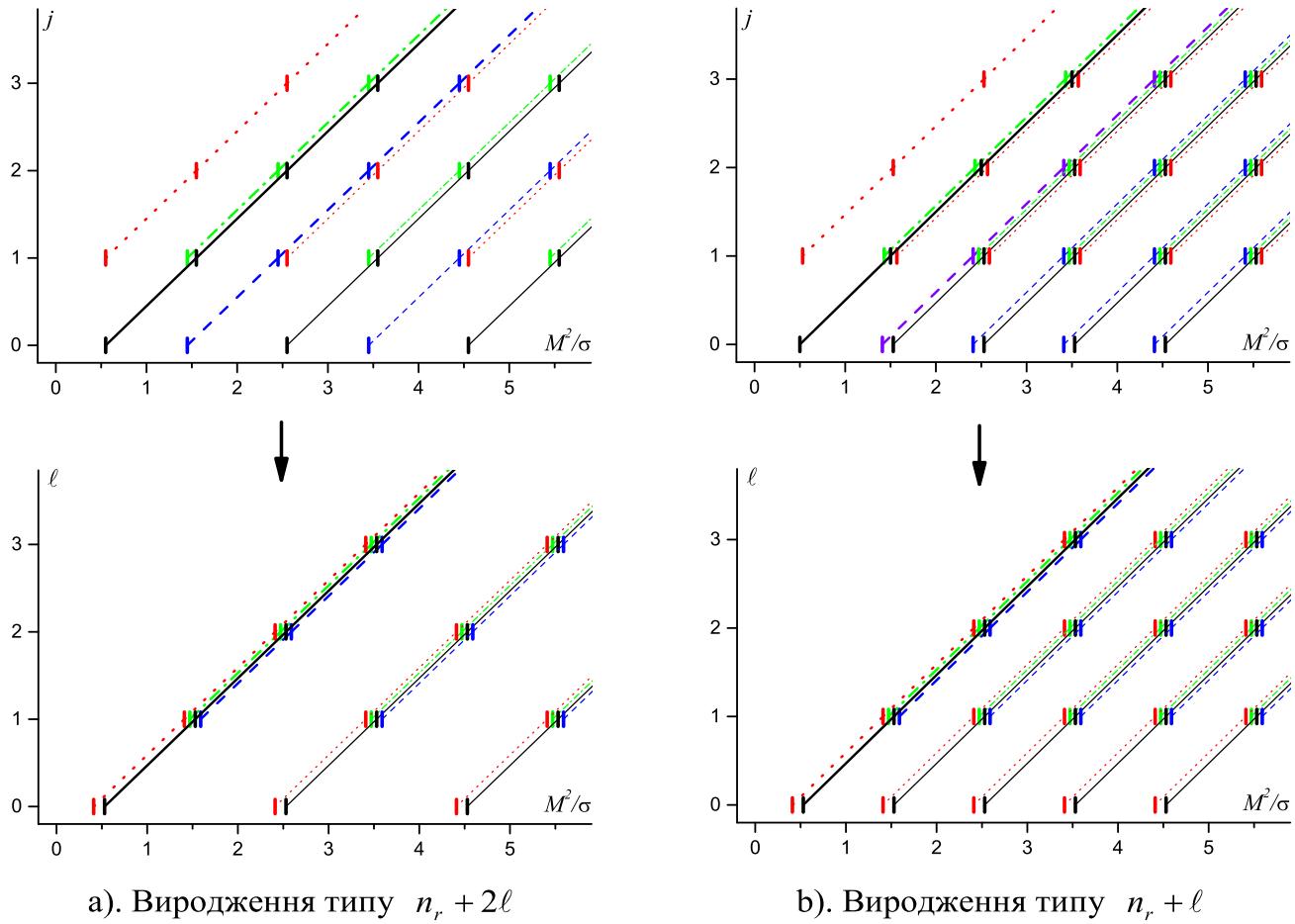


Рис. 1.1.  
Траекторії Редже  
іdealizovanih mesonnih spektriv.

$$\begin{aligned}
 s = 0 \quad & \frac{n_r = 0}{\text{---}} \} \ell = j \{ \frac{n_r = 1, 2, \dots}{\text{---}} \\
 s = 1 \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \quad \ell = j + 1 \\ \text{---} \quad \ell = j - 1 \end{array} \right. \quad \vdots
 \end{aligned}$$

Реальні спектри мезонів відрізняються від ідеалізованих. По-перше, відомо обмежене число мезонів, і не всі вони надійно ідентифікуються із станами ідеалізованих спектрів. Далі, траєкторії не цілком прямі, особливо у нижній частині спектру [270, 282, 283], а середнє чи асимптотичне (при великих  $j$ ) значення параметру нахилу  $\sigma$  залежить від ароматового складу мезонів [270, 284].  $\ell s$ -виродження є наближеним – порядку  $5 \div 6\%$  від  $\sigma$ , і тлумачиться як результат надтонкого  $ss$ -розщеплення [278]. Вежова структура встановлена ненадійно (тобто лише для окремих груп станів) і також є наближеною [283].

Навіть більше, у деяких роботах стверджують, що лінійність (навіть наближена) не є характерною рисою траєкторій Редже. Наприклад, з аналізу експериментальних даних було встановлено, що кривина різних мезонних і баріонних траєкторій може бути як додатньою, так і від'ємною [285, 286], хоча ці значення виявляються в основному малими, особливо для траєкторій гадронів, складених із легких кварків. На базі обширного огляду [286] потенціальних моделей, що приводять до нелінійних траєкторій Редже, можна прийти до висновку, що кривина помітна здебільшого у нижній частині траєкторій. Щодо їх верхньої частини, то більшість потенціальних моделей з лінійним далекосяжним потенціалом ведуть до траєкторій, що є асимптотично лінійними при  $\ell \gg 1$ . Крім цього, в роботі [287] запропоновано дробово-степеневу форму траєкторій, сумісну як з дуальними аналітичними моделями, так і з явищем народження кварк-антикваркових пар, що обмежує довжину траєкторій (тобто, кількість зв'язаних станів). Але останній, квантово-польовий ефект є поза межами потенціальних моделей. На загал, аргументи на корись істотної нелінійності траєкторій Редже, представлені у різних роботах, все ще не мають спільної теоретичної основи. Автор цієї дисертаційної роботи притримується більш традиційного погляду в тому, що траєкторії Редже є наближено лінійними, тоді як незначна кривина може бути обумовлена масивністю кварків, впливом короткосяжної взаємодії тощо.

Отже, у побудові потенціальних моделей зручно орієнтуватися на ідеалізовану картину як на нульове наближення, з можливістю подальшого введення різних поправок.

#### 1.2.4. Струнні та осциляторні моделі

Ідеї щодо релятивістичного опису прямолінійних (або асимптотично прямолінійних) траєкторій Редже з'явилися ще до появи потенціальних моделей, і пов'язані з концепцією Юкави і Маркова початку 50-х [239, 240] про елементарні частинки як протяжні об'єкти. Йшлося перш за все про численні нововідкриті гадрони та резонанси. Такі об'єкти описувалися білокальними полями, підпорядкованими певним коваріантним рівнянням чи умовам (іншими словами – в'язям), що допускають послідовність (спектр) мас цього поля [27]. Згодом концепція переродилася у теорію струн, з одного боку, і породила низку осциляторних моделей гадронів – з іншого.

Сучасна теорія струн претендує на роль фундаментальної теорії всієї матерії та простору – з необхідністю багатовимірного. Наприклад, бозонна струна Намбу-Гото квантується лише у 26-вимірному просторі-часі, а суперструна – у 10-вимірному. Однак як за походженням, так і в застосуваннях релятивістичні струни тісно пов'язані саме з описом гадронів [263, 288]. Як зазначено в п.1.2.3, струна служить релятивістичною моделлю для хромоелектричної трубки між кварками. Обмеження теорії Намбу-Гото на підпростір прямолінійних струн породжує прості моделі гадронів, квантовані в  $M_4$ . Розглядають безмасові струни [282, 288], з масами [283, 288] на кінцях і з розподілом маси вздовж струни [287]. Вони здебільшого застосовуються для опису орбітальних збуджень мезонів [278, 282, 287, 289] та баріонів [289], рідше – радіальні збудження [283]. В нерелятивістичній граници лагранжіан струни описує взаємодію мас на кінцях із лінійним потенціалом  $U(r) = ar$ . Релятивістичні струнні траєкторії Редже асимптотично (при  $\ell \gg 1$ ) прямують до прямих, однак радіальні збудження (при  $\ell \gg n_r$ ) привносять нелінійність [283]:

$$M^2 = 2\pi a \sqrt{\ell(\ell+1)} \left\{ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{5}} \left[ (n_r + \frac{1}{2})/\ell \right]^{\frac{4}{5}} + \dots \right\} \quad (1.2.6)$$

Моделі зі спінами і феноменологічно введеною спін-орбітальною та спін-спіновою взаємодією [278, 282] добре описують орбітальні збудження легких мезонів, тобто

їх головні траєкторії Редже.

Осциляторні моделі також розвинулися з теорії білокального поля Юкави і Маркова, і є привабливі своєю інтегровністю. Кім і Ноз [290] запропонували для цього поля рівняння типу Кляйна-Городона з осциляторним потенціалом, а Такабаяші [27] – еквівалентне бозонне операторне рівняння з додатковою умовою типу Гупти-Блейлера. Спектр мас такого поля дає точно лінійні тракторії Редже (1.2.5), де нахил траєкторії  $\sigma = 8a$  пов’язаний з коефіцієнтом пружності осцилятора  $a$ . Це так звана *проста релятивістична осциляторна модель* (ПРОМ) для скалярного білокального поля.

Згодом ПРОМ стали інтерпретувати як опис системи двох конституентних частинок з пружною взаємодією, а білокальне поле – як хвильову функцію такої системи. Кvantово-механічний опис моделі наблизився до явно коваріантного канонічного формалізму з в’язями у різних його варіантах, зокрема до ДГЛ-моделі [237, 238]. Для однакових кварків маси  $m$  така модель з осциляторним потенціалом  $V(r) = a^2r^2$  дає спектр

$$M^2 = 8a(\ell + 2n_r + 3/2) + 4m^2, \quad (1.2.7)$$

Узагальнення на випадок різних мас “викривлює” траєкторії Редже, зберігаючи лише асимптотичну лінійність, і нетривіально ускладнює умову нормування хвильової функції [27]. Дещо інша версія ПРОМ, отримана шляхом перевпорядкування параметрів моделі, дала змогу авторам роботи [284] апроксимувати лінійними траєкторіями Редже спектри не тільки легких мезонів, але й важких. При цьому нахил траєкторії  $\sigma = 2(m_1 + m_2)^{3/2}(m_1m_2)^{-1/2}K$  є функцією маси кварків  $m_a$  та універсальної сталої пружності  $K$ .

Відома також модифікація ПРОМ на випадок спінорного поля, отримана Такабаяші шляхом введення матриць Дірака у рівняння Кляйна-Городона і умову Гупти-Блейлера [27].

Природнішими, однак, є моделі, побудовані на базі рівняння Дірака. Равндал [291] доповнив вільночастинковий гамільтоніан Дірака  $h(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta$  гармонічною взаємодією  $U(r) = (1 + \beta)\frac{1}{18}\kappa^3r^2$ , що містить рівні долі скалярного

та 0-компоненти векторного потенціалів. Завдяки додатковій симетрії задачі, пов'язаної з існуванням збережуваного псевдоспіну, спектр є  $\ell s$ -виродженим: енергія  $E_n$  є функцією  $n = \ell + 2n_r$ , неявно заданою рівнянням 3-го ступеня. У безмасовій границі  $E = \kappa(\frac{2}{3}n + 1)^{2/3}$ ; ця ж залежність описує асимптотику при  $n \gg 1$  і для масивного випадку. Автор інтерпретує рівняння за аналогією до моделі мішка MIT для кварків у гадронах, але не припасовує отримані формули до експериментальних даних.

До лінійних траєкторій приводить *діраківський осцилятор*, сконструйований в [292] шляхом заміни  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - i\omega \mathbf{r}\beta$  в гамільтоніані Дірака  $h(\mathbf{p})$ . Отримане точно розв'язне рівняння дає спектр  $E^2 = m^2 + 2m\omega[n + 1 \mp (j + \frac{1}{2})]$  при  $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ , вироджений інше, ніж в моделі Равнадала.

Були запропоновані узагальнення діраківського осцилятора для системи двох частинок [25, 107–110]. Попри різницю у формуллюваннях, всі вони зводяться до 2ЧРД з двома дещо різними потенціалами:

$$U(\mathbf{r}) = a\beta_1\beta_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) \cdot \mathbf{r}, \quad (1.2.8)$$

$$U(\mathbf{r}) = a\gamma_1^5\gamma_2^5\beta_1\beta_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) \cdot \mathbf{r}. \quad (1.2.9)$$

Як і спінова ПРОМ Такабаяші, ці моделі виявляють траєкторії Редже, що є точно або асимптотично лінійними. Енергетичні рівні мають спін-орбітальне розщеплення, але тип виродження не відповідає спостережуваному.

Принцип побудови переважної більшості релятивістичних потенціальних моделей полягає в тому, щоб той чи інший потенціал міжкваркової взаємодії інкорпорувати у те чи інше релятивістичне рівняння чи систему рівнянь – в залежності від вибраного підходу. При цьому потенціалу приписується скалярна, векторна чи інша лоренцівська структура взаємодії, або ж він є суперпозицією різних таких структур. Теоретично корисними можуть виявитися навіть найпростіші релятивістичні рівняння типу Кляйна-Гордона або скалярні рівняння із релятивістичною кінематикою типу Салпітера [279], особливо із спіновими поправками [276]. Однак глибшу фізичну основу для взаємодіючих кварків дають моделі на основі рівняння Дірака.

### 1.2.5. 1ЧРД-моделі

Залучення одночастинкового рівняння Дірака (1ЧРД) в 2- або 3-частинковій задачі не є послідовним, але можливе або в рамках моделей типу мішків МІТ, де кварки взаємодіють із усередненим глюонним полем, або коли один із кварків значно масивніший за іншого.

В одній з ранніх моделей першого типу – т. зв. моделі квазінезалежних кварків, запропонованій Хрущовим [280], використовується скалярний потенціал  $U(r) = a\sqrt{r^2 + l^2}$ . Модель дає надлишкові стани, і щоб їх усунути, автор постулює додаткові правила відбору. Як результат, отримано феноменологічні 2-параметричні (з дійсним  $a$  і уявним  $l$ ) аналітичні формули для  $\pi$ - і  $\rho$ -мезонів [281], а також напів-аналітичні – для К-мезонів [293], що описують їх спектри мас з точністю щонайгірше 6%. У пізнішій версії моделі застосовано корнельський потенціал (1.2.2) із векторною кулонівською та скалярною лінійною частинами [294, 295]. Це дало змогу уточнити параметри моделі, обчислити спектри легких і важких кварконіїв, і продемонструвати універсальність натягу струни (отримано  $a = 0.197 \text{ ГeB}$ ).

В роботах [296, 297] в рамках 1ЧРД розглядався корнельський потенціал (1.2.2) із сухо векторною кулонівською частиною і скалярно-векторною лінійною. Модель забезпечує правильний знак спін-орбітального розщеплення із значеннями параметру змішування (векторної частки лінійного потенціалу)  $\xi > 0.45$ ; оптимальний діапазон визначено як  $\xi = 0.48 \div 0.65$ .

1ЧРД спрощується, якщо нерелятивістичний потенціал входить у нього як скалярно-векторний у рівних долях ( $\xi = 1/2$ ), тобто із матричним множником  $\frac{1}{2}(1 + \beta)$ . У цьому випадку відповідне квадроване рівняння Паулі-Шредінгера не містить спінових членів, а спектр є  $\ell s$ -виродженим. Окрім згаданого вище скалярно-векторного осцилятора Равндела [291] розглядалися модифіковані потенціали Корнеля  $U(r) = ar^\nu - br^{-\nu}$  з  $\nu = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$  [298], а також СJP-потенціал [299], з допомогою якого обчислено кілька радіально збуджених S-станів  $\rho, \varphi, J/\psi$  та Y-мезонів. У цій таки роботі для 1ЧРД зі скалярним лінійним потенціалом

$U(r) = ar$  знайдено наближену аналітичну формулу для спектру мас кварконіїв:  $M^2 = 8a[2n \pm (j + \frac{1}{2})] + 4m^2$ , де  $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ .

Застосування 1ЧРД до опису мезонів з кварками різної маси дає значно кращий ефект при врахуванні 2-частинкової релятивістичної кінематики. Ідея полягає в тому, щоб співвідношення для повної маси вільних частинок в системі ЦМ  $M = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2}$  (де  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ ) представити як лінійне за  $\mathbf{p}^2$ , добути з нього квадратний корінь згідно з Діраком:

$$\left( \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \right)^2 = \mathbf{p}^2 + m_1^2 \Rightarrow M_1 \equiv \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m_1$$

і, нарешті, ввести в праву і ліву частини скалярну та векторну взаємодії мінімальним чином:  $m_1 \rightarrow m_1 + U_s$ ,  $M_1 \rightarrow M_1 - U_v$ . У такий спосіб випробувано рівноважені скалярно-векторні суперпозиції трьох потенціалів [300]: гармонічного з кулонівським членом, корнельського та СJP. Останній дає найкращі результати, особливо для опису легких ий-мезонів, і дещо гірше - для  $c\bar{c}$  і  $b\bar{b}$ .

В роботі [301] розвинуто квазікласичне наближення в 1ЧРД-моделях із скалярно-векторними потенціалами методом редукції 1ЧРД до квадрованої форми Паулі-Шредингера із ефективним квазіпотенціалом  $U_{\text{eff}}(r, E)$ . Якщо в далекосяжному утримному потенціалі домінує скалярна доля (тобто  $\xi < \frac{1}{2}$ ), то  $U_{\text{eff}}(r, E)$  також утримний, а стани - лише зв'язані. Якщо ж домінує векторна частка ( $\xi > \frac{1}{2}$ ), то  $U_{\text{eff}}(r, E)$  має форму широкого потенціального горба. У цьому разі замість зв'язаних є квазістаціонарні стани із комплексною енергією  $E - \frac{i}{2}\Gamma$  і шириною розпаду  $\Gamma$ . Ця модель застосовується для опису B- і D-мезонів – систем із важкого та легкого кварків.

При розгляді мезонів, що складаються із кварків сумірних або тотожніх мас, принагідно звертатися до двочастинкового рівняння Дірка.

### 1.2.6. 2ЧРД-моделі

Як зазначено в підрозділі 1.1.5, аналіз та розв'язування 2ЧРД значно складніше, ніж 1ЧРД. По-перше, для таких сильно зв'язаних релятивістичних систем,

як легкі мезони, теорія збурень навколо нерелятивістичного гамільтоніану не є застосовною. Задача на зв'язані стани радіально редукованого 2ЧРД у точному розгляді є некоректною для багатьох потенціалів, зокрема для потенціалу Брайта. Тим більше для потенціалів, що ростуть із відстанню, можуть бути проблеми. Навіть за їх відсутності розв'язування 2ЧРД є технічно складним.

З іншого боку, означення лоренцівської структури феноменологічних потенціалів для 2ЧРД не є таким однозначним, як для 1ЧРД, і допускає певну довільність. Наприклад, для нерелятивістичного потенціалу  $U(r)$  скалярну взаємодію в 2ЧРД (1.1.1) можна ввести як зв'язок Юкави  $\beta_1\beta_2U(r)$  (аналогічно до взаємодії в одноїменній теорії поля), або як мінімальний зв'язок  $\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)U(r)$ , утворений шляхом заміни  $m_a \rightarrow m_a + \frac{1}{2}U(r)$  в 2ЧРД. Цю довільність можна використати для побудови потенціальних моделей.

Хелашиблі [97] розглянув три матричні множники для безмежно зростаючого потенціалу  $U(r)$  в 2ЧРД:

$$\text{a). } \frac{1}{4}(1 + \beta_1)(1 + \beta_2), \quad \text{b). } \frac{1}{2}(1 + \beta_1\beta_2), \quad \text{c). } \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2), \quad (1.2.10)$$

і дослідив якісну поведінку радіально редукованого рівняння при  $j = 0$ . На відміну від варіантів b) і c), варіант a) взагалі не забезпечує конфайнменту. У випадку b) рівноваженої суперпозиції статичної векторної та скалярної юкавської взаємодій у радіально редукованому рівнянні 2-го порядку виникають нефізичні полюси, тоді як у випадку c) мінімального скалярного зв'язку їх немає. Тому останній варіант найчастіше вживають у потенціальних моделях.

Прикладом слугують роботи Семая, Іцеулінера та співавторів, у яких розглядають 2ЧРД з лінійним мінімальним зв'язком  $\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)r$ , і порівнюють з юкавською версією  $\beta_1\beta_2r$  та деякими іншими моделями. Хоча задача точно інтегровна лише за умови  $j = \ell$  для безмасових кварків:

$$E^2 = 4a[\ell + 2n_r + 3/2], \quad (1.2.11)$$

автори знаходять числові результати [88] та наближені аналітичні формули для  $j = \ell \pm 1$  [86] і  $m_a \neq 0$  [302]. Асимптотично (при  $\ell \gg 1$ ) спектр енергії 2ЧРД як з

юкавським, так і з мінімальним лінійним потенціалом мало відрізняються від даної тут формули (1.2.11). В усіх випадках маси мезонів виявляються завеликими. Для їх коректного опису вводять поправку:  $M^2 = E^2 - C^2$ , де  $C$  інтерпретують як енергію вакууму [88, 302].

У моделі Брейшоу [85] використовується напів-феноменологічний потенціал, який поряд з брейтівським та мінімально-скалярним лінійним членом містить доволі специфічні внески, роль яких полягає в усуненні нефізичних полюсів та зануленні велико-великої компоненти хвильової функції поза межами мезону. Завдяки 5-ти вільним параметрам потенціалу вдається досить точно описати більше 50-ти мезонних станів.

Цібідіс [89] релятивізує корнельський потенціал як суму короткосяжного потенціалу Едінгтона-Ганта (1.1.4) та далекосяжної лінійної скалярної частини типу Юкави. З огляду на сингулярності радіально редукованого 2ЧРД автор тлумачить його пертурбативно і стосує до опису лише важких кварконіїв.

### 1.2.7. Явно коваріантні моделі з в'язями

Деякі проблеми опису мезонів як систем двох взаємодіючих діраківських частинок (кварків) можна обійти в рамках явно коваріантного формалізму з в'язями: так можна забезпечити точну пуанкаре-інваріантність опису, уникнути сингулярностей, характерних для 2ЧРД тощо.

Кратер і ван Алстін на базі їх двочастинкових рівнянь Дірака (1.1.18) запропонували три моделі [303]. Вони різняться вибором потенціалів взаємодій та їх розбиттям на залежні від  $r = |x_\perp|$  складові  $\mathcal{S}(r)$  і  $\mathcal{A}(r)$ , які умовно можна розглядати як скалярний і векторний внески у взаємодію відповідно. В усіх випадках короткосяжна кулоно-подібна взаємодія є векторною, тоді як далекосяжна – скалярна, або скалярно-векторна.

Одна з моделей містить корнельський потенціал (1.2.2) з біжучою константою взаємодії (1.2.3), в якій число ароматів ефективно залежить від відстані:  $n_f(r) = \sum_f \exp(-2m_f r)$ .

Інша модель (див. також [22]) релятивізує потенціал Річардсона (1.2.4) в координатному представленні. Якщо далекосяжну взаємодію обрати сuto скалярною, то для мультиплетів легких мезонів модель дає зворотне (тобто, хибне) спін-орбітальне розщеплення:  $M(3P_2) < M(3P_1)$ . Ця хиба типова для деяких інших моделей із скалярною далекосяжною взаємодією.

Модель з релятивізованим 2-параметричним потенціалом Адлера-Пірана, в якому далекосяжна взаємодія є скалярно-векторною (у рівних пропорціях), дає кращий опис легких мезонів – за винятком орбітальних та радіальних збуджень  $\pi\pi$ -системи. Цей недолік усунено в наступній версії цієї моделі [29], в якій далекосяжна взаємодія є сuto скалярною, а розбиття потенціалу Адлера-Пірана на скалярну і векторну частини є м'яким: воно здійснено шляхом введення феноменологічного експоненційного множника із додатковим (третім) параметром припасування. Це дає змогу описати 89 мезонів, в тому числі 36 тих, що містять  $u$ -кварки. Загалом модель дає кращий опис важких мезонів ніж легких, для яких виникає часткове інверсне розщеплення. Позитивною рисою моделі є ознака кіральної симетрії в тому сенсі що  $M_\pi \rightarrow 0$  при  $m_q \rightarrow 0$ . Однак, цю залежність підтверджено лише чисельно.

В моделі Сазджана [106], побудованій на базі його рівнянь (1.1.17), розглядається взаємодія доволі загального вигляду, задана короткосяжним векторним потенціалом і далекосяжним псевдоскалярним. Завдяки такому вибору, а також зв'язку рівнянь Сазджана з р-ням Бете-Салпітера [230], автор доводить існування кіральної симетрії аналітично.

В [234] в рамках цього ж підходу далекосяжна взаємодія виводилась з інших міркувань: вивчалася залежність кварк-антикварковової калібрувально-інваріантної функції Гріна від петель Вільсона в границі великих контурів та великого числа кольорів. В статичній границі отримано лінійний потенціал, а квазірелятивістичні поправки до нього – завдяки зв'язку з р-ням БС і його 3D-редукцією – р-ням Брайта-Салпітера. Слід зазначити незвичну для цих поправок залежність (у знаменнику) від орбітального моменту  $\mathbf{L}$ . Обчислення спектрів та їх порівняння з дослідними даними в [234] не дано.

Варто згадати також модель Бісваса і Рорліха [23, 24] на базі канонічного формалізму з в'язями, заданого в термінах явно коваріантних колективних змінних типу центра мас [241, 242]. Така структура опису дозволяє зводити  $N$ -частинкову задачу до 1ЧРД, що описує ефективну взаємодію кварків з центром мас (т. зв. бола-модель). В роботі [24] використано стандартне скалярно-векторне розбиття 2-параметричного корнельського потенціалу із залежним від 3-го параметру додатковим спіновим членом, що описує з'язок типу  $jj$  (замість традиційного  $\ell s$ -зв'язку). Модель демонструє перевагу простої релятивізації корнельської моделі над вихідною нерелятивістичною версією.

До моделей колективного типу, що зводяться до 1ЧРД, належить і згадана раніше модель Хрушова [280].

### 1.2.8. Тривимірні гамільтонові моделі в різних формах релятивістичної динаміки

Пуанкаре-інваріантність потенціальних моделей не мусить бути явною. В тривимірній гамільтоновій механіці вона також забезпечується, і не єдиним чином – у формах релятивістичної динаміки: миттєвій, точковій, фронтальній та ін.; див. підрозділ 1.1.7. Різні форми динаміки канонічно еквівалентні між собою на класичному рівні, і S-матрично – на квантовому, але відрізняються у виборі змінних, реалізації операторів тощо. Для моделей мезонів найзручнішим є опис в колективних змінних типу Бакамджіана-Томаса (миттєва форма), та його аналоги в інших формах динаміки. В усіх випадках спектр мезонів визначається власними значеннями оператора повної маси 2-кваркової системи, чим задача зводиться до ефективної 1-частинкової задачі в зовнішньому полі.

Вигляд масового оператора здебільшого задають феноменологічно, часто з міркувань простоти. Наприклад, масовий оператор 2-х кварків однакової маси  $m$  із корнельською взаємодією  $M = 2\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} - \alpha/r + ar$  приводить до скалярного рівняння Салпітера, що розв'язується числово. Кейстер і Полізу [250] запропонували точно інтегровну модель, в якій квадрат масового оператора в ім-

пульсному представленні зводиться до ізотропного 3D-осцилятора, а його спектр  $M_{n,\ell} = 2\sqrt{m^2 + (\ell + 2n_r + 3/2)/g^2}$  точно збігається із (1.2.9) за умови  $2a = 1/g^2$ . Він близький і до спектру скалярного р-ня Салпітера, якщо покласти  $\alpha \approx -1/2$ ; за цих значень асимптотики тракторій Редже р-ня Салпітера збігаються з прямыми траекторіями осциляторної моделі. Але для обидвох моделей стани, близькі до основних, є занадто важкими (це очевидно, оскільки в реалістичному корнельському потенціалі  $\alpha > 0$ ). Автори [250] узагальнюють також осциляторну модель на випадок спінових кварків; відповідний спектр відрізняється від безспінового заміною параметру пружності  $g \rightarrow g_{js}$ . Модель має ілюстративне значення: автори явно будують, окрім спектру, і хвильову функцію системи в миттєвій формі динаміки, використовуючи техніку коефіцієнтів Клебша-Гордана для групи Пуанкаре.

Узагальнення осциляторної моделі на випадок безспінових кварків різної маси запропоновано в рамках точкової форми динаміки [304], і також є точно розв'язним. Автори явно отримують траекторії Редже, що є лінійними лише асимптотично. В нижній частині вони викривлені і завдяки модифікованому осциляторному потенціалові  $W(r) = W_0\delta(\mathbf{r}) + a^2r^2$ , де  $W_0 < -m^2$ , краще описують векторні мезони; для псевдоскалярних мезонів знову отримуються завищені маси (можливо через те, що спінові ефекти не враховано).

У кіральному узагальненні цієї моделі [305] враховано народження-знищення  $\pi$ -мезона (як ґолдстоунівського бозона). Масовий оператор діє на двоканальному гільбертовому просторі  $q\bar{q}\oplus q\bar{q}\pi$  і є матричним, так що рівняння на власні значення має вигляд:

$$\begin{pmatrix} M_2 & K^\dagger \\ K & M_{2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\Psi_2\rangle \\ |\Psi_{2+1}\rangle \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} |\Psi_2\rangle \\ |\Psi_{2+1}\rangle \end{pmatrix}; \quad (1.2.12)$$

тут  $M_2$  є масовим оператором осциляторної  $q\bar{q}$ -системи із спектром (1.2.7),  $M_{2+1} = \sqrt{M_2^2 + \mathbf{k}^2} + \sqrt{m_\pi^2 + \mathbf{k}^2}$  описує масу  $q\bar{q}\pi$ -системи з відносним імпульсом  $\mathbf{k}$  між  $q\bar{q}$ -клusterом і  $\pi$ -мезоном маси  $m_\pi$ .

Виключення  $q\bar{q}\pi$ -компоненти хвильової функції  $|\Psi_{2+1}\rangle$  із системи (1.2.12)

приводить до замкнутого рівняння для  $q\bar{q}$ -компоненти  $|\Psi_2\rangle$ :

$$[M_2 + K^\dagger(M - M_{2+1})^{-1}K] |\Psi_2\rangle = M|\Psi_2\rangle,$$

що є складним інтегральним рівнянням, яке можна розв'язати лише числовово. Воно представляє нелінійну спектральну задачу щодо повної маси системи  $M$ . Власні значення  $M$  є комплексними, якщо їх дійсні частини лежать вище порогу народження  $\pi$ -мезону; тоді уявні частини визначають ширини резонансів.

У фронтальній формі динаміки вибір канонічних змінних пов'язаний із виділеним напрямом, і масовий оператор не володіє явною обертовою інваріантністю. Це ускладнює феноменологічне моделювання взаємодії між кварками. В роботі [306] ядро 3-параметричного оператора взаємодії в імпульсному представлені задано з міркувань простоти з тим, щоб у нерелятивістичній границі отримати корнельський потенціал і, отже, відтворити обертову інваріантність задачі. Часткове (за двома змінними) перетворення Фур'є приводить спектральну задачу до інтегро-диференційного рівняння, яке розв'язують числовово. Параметри пристосувалися до орбітального та радіального розщеплення нижніх станів різних сімейств мезонів. Отримані значення конституентних мас кварків та натягу струни є типовими для нерелятивістичних моделей, однак константа взаємодії більша:  $\alpha = 1.01$  для чармонію. В цілому, спектроскопічна ідентифікація збуджених станів є проблематичною через відсутність явної обертової симетрії задачі.

В двовимірному варіанті фронтальної форми динаміки опис систем взаємодіючих частинок спрощується, допускаючи низку точно розв'язних моделей [5]. До спектроскопії мезонів має відношення модель релятивістичного двочастинкового осцилятора із потенціалом взаємодії  $V = \omega p_1 p_2 r^2$  [5, 307], що дає спектр мас  $M^2 = [m_1 + m_2 + \omega(n+1/2)]^2 + \omega^2/4$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Модель залишається інтегровною при додаванні до потенціалу лінійного члену, а також допускає узагальнення на систему  $N$  частинок [5]. Якщо здійснити підстановку  $n+1/2 \rightarrow \ell+2n_r+3/2$ , що відповідає формальному узагальненню осцилятора з 1D- на 3D-випадок, і виразити частоту  $\omega$  через натяг струни, то подана вище спектральна формула виявляється близькою до отриманої в рамках 1ЧРД [300]. Вона досить добре описує спектр

ий-системи, хоча і дає слабко нелінійні траєкторії Редже.

### 1.2.9. Моделі типу Бете-Салпітера

Рівняння Бете-Салпітера (1.1.9) – явно коваріантне і походить з КТП, тому як база для потенціальних моделей гадронів воно видається глибшим ніж інші підходи. На практиці ж використання цього рівняння пов’язане з деякими труднощами. По-перше, з міркувань квантово-механічної інтерпретації частіше використовують не власне 4D-рівняння БС, а деяку його 3D-редукцію, що може порушувати Пуанкарє-інваріантність. По-друге, ядро оператора взаємодії  $V$  в р-ні (1.1.9) будується в термінах діаграм пертурбативної теорії поля, достовірної в ультрафіолетовій області. Інфрачервона поведінка глюонного пропагатора вимагає додаткових міркувань (феноменологія, петля Вільсона, граткові симуляції тощо), але щоб забезпечити конфайнмент, вона повинна бути синг'улярною в  $k$ -просторі. Ці особливості проілюструємо на прикладах.

Найчастіше використовують р-ня БС в миттєвому наближенні – рівняння типу Брейта-Салпітера або Салпітера (проекція на додатньо-енергетичні стани). Типовим прикладом є модель японської групи авторів [308] на базі рівняння Салпітера. Потенціал Річардсона (1.2.4) розбивається у ній на короткосяжну векторну частину і далекосяжну скалярну. Для кращого узгодження з експериментом в біжучу константу сильної взаємодії введено додатковий параметр припасування. Модель добре описує важкі кварконії, гірше – легкі, зокрема їх гіпертонке розщеплення.

У подібній моделі вісконсінської групи [309, 310] використовується складне багатопараметричне скалярно-векторне розбиття потенціалу Річардсона з додатковим кулоно-подібним членом, що враховує нульові поперечні коливання струни. Далекосяжна частина потенціалу містить, поряд із скалярною, ще й долю  $\xi$  векторної взаємодії. В координатному представленні оператори кінетичної енергії (1.1.6) є нелокальними. Але за умови слабкої потенціальності ( $E + E_1 + E_2 \gg V$ ) автори отримують р-ня 2-го порядку типу Кляйна-Гордона-Паулі, придатне для

опису важких кварконіїв. Траєкторії Редже легких кварконіїв отримують надто великий нахил при  $\xi > 0$ ; отже в утримній взаємодії домінує скалярна складова. Та це підтверджується не в усіх моделях.

Низку моделей типу Салпітера в миттєвому наближенні запропоновано в роботі [311] з метою описати три ефекти: 1) існування легких псевдоскалярів як наслідок порушення кіральної симетрії; 2) лінійність траєкторій Редже; 3) мале спін-орбітальне розщеплення. Розглянуто кілька потенціалів, заданих в координатному представленні і відображені в імпульсне, в якому здійснюється радіальна редукція рівняння. Найкращий результат дає залежний від маси квазіпотенціал із векторною далекосяжною частиною, що компенсує спін-орбітальне розщеплення і узгоджує задачу з теоремою Голдстоуна.

Часто цитована модель Годфрі-Ізгура [312] також описується рівнянням Салпітера (1.1.8), однак потенціал  $U$  в його правій частині будується напів-євристично. За основу взято корнельський потенціал, точніше скалярну лінійну частину та векторну кулонівську із біжучою константою сильної взаємодії, та відповідними квазірелятивістичними спіновими поправками. Цей потенціал автори модифікують. По-перше, вводять кінематичні (залежні від імпульсів) множники-обкладки, що не змінюють квазірелятивістичні вирази (зокрема, спінові поправки із коефіцієнтами  $(m_1 m_2)^{-1}$ ), але допускають розгляд істотно релятивістичних систем легких кварків. По-друге, щоб уникнути розбіжностей в процесі обчислень (при впорядкуванні операторів, квазірелятивістичних та ультрапререлятивістичних розкладах тощо) автори розмазують потенціали з допомогою гаусових формфакторів. Під час такої модифікації вводиться певна кількість додаткових параметрів припасування – достатня, щоб забезпечити досить добрий опис біля восьми десятків важких і легких мезонів.

Шляхом гаусового розмазування Годфрі та Ізгур уникнули проблеми, що часто виникає в рівнянні БС з утримною взаємодією, і стосується ширшого класу задач: як описати лінійний потенціал  $U(r) = ar$  в імпульсному представленні. Його Фур'є-образ  $\tilde{U}(\mathbf{k}) \sim 1/\mathbf{k}^4$  має сильну особливість в точці  $\mathbf{k} = 0$ . Відповідний явно коваріантний вираз  $\tilde{G}(k) \sim 1/k^4$ , що в певному наближенні описує інфрачерт-

вону поведінку глюонного пропагатора, є сильно розбіжним на світловому конусі  $k^2 = 0$ . Тому ці вирази необхідно коректно означити.

Громс [207] запропонував розмірну регуляризацію явно коваріантного ядра:  $\tilde{G}_\varepsilon(k) = \frac{d}{d\varepsilon} \varepsilon k^{\varepsilon-4} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 1/k^4$  з міркувань, що  $\tilde{G}_\varepsilon(k)$ , як ядро 4D-інтегрального оператора, є добре означенім при  $\varepsilon > 0$ . Використавши це ядро в явно коваріантному р-ні БС, автор шляхом миттєвої редукції за допомогою повороту Віка отримує в нерелятивістичній границі потенціал взаємодії, що окрім лінійної частини містить константу  $-2\sqrt{a} \exp(1/2 - \gamma)$  (тут  $\gamma = 0.577\dots$  – стала Ейлера-Маскероні), яка близька до феноменологічної сталої у нерелятивістичній моделі кварконію [262].

Інша регуляризація застосована групою із штату Айова [313, 314]: в ідею покладено представлення лінійного потенціалу через потенціал Юкави  $U_Y(r; m) = \exp(-mr)/r$ , а саме:  $\frac{d^2}{dm^2} U_Y(r; m) \xrightarrow[m \rightarrow 0]{} r$ . Ця ж операція над Фур'є-образом  $\tilde{U}_Y(\mathbf{k}; m)$  служить означенням для  $\tilde{U}(\mathbf{k}) \sim 1/\mathbf{k}^4$ . Подібно, функція Г'ріна р-ня Кляйна-Гордона (тут – її Фур'є-образ):

$$\tilde{D}(k; m) = (m^2 - k^2)^{-1} \quad (1.2.13)$$

може служити для означення коваріантного синг'улярного ядра

$$\tilde{G}(k) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{d^2}{dm^2} \tilde{D}(k; m) \quad (1.2.14)$$

та його 3D-регуляризації.

Для інтегральних рівнянь з регуляризованим ядром  $\tilde{U}(\mathbf{k}) \sim 1/\mathbf{k}^4$  айовська група запропонувала процедуру числового інтегрування, що передбачає попередню радіальну редукцію таких рівнянь. Процедура була апробована на одночастинкових нерелятивістичному та релятивістичному рівняннях [313, 314], а також на двочастинковому скалярному рівнянні типу Салпітера [315]. Більш реалістична модель цієї групи [316, 317] ґрунтуються на квазіпотенціальній редукції р-ня БС із взаємодією, що містить векторне ядро 1-глюонного обміну з біжуchoю константою сильної взаємодії, та скалярне регуляризоване ядро  $\sim 1/k^4$ . Вибрана редукція забезпечує нульову відносну енергію у системі ЦМ.

Вартою уваги є явно коваріантна модель легких мезонів на базі р-ня БС з ядром, що не містить сингулярної частини  $\sim 1/k^4$  [318]. Натомість, взаємодія описується пропагатором 1-глюонного обміну з параметрами ультрафіолетового та інфрачервоного обрізання і надкритичною константою взаємодії. УФ-обрізання виконує роль асимптотичної свободи, а надкритичність взаємодії забезпечує механізм генерації маси, тобто динамічне порушення кіральної симетрії і утворення псевдоскалярних мезонів як голдстоунів. Модель має обмежене застосування через ІЧ-обрізання, що дозволяє описувати лише слабко збуджені стани.

### 1.2.10. Варіаційні моделі гамільтонової КТП

У порівнянні з рівнянням БС варіаційний метод КТП (див. підрозділ 1.1.4) має дві основні переваги. По-перше, він опирається на гамільтонове формулювання КТП, і в цьому близче до звичайної квантової механіки, ніж р-ня БС. По-друге, варіаційні рівняння є непертурбативними, і можуть нести додаткову (у порівнянні з р-нями БС) інформацію про сильно зв'язані системи.

Модель Жанга і Конюха [319] опирається на гамільтоніан лінеаризованої хромодинаміки в кулонівському калібруванні, доповнений феноменологічним КХД-вмотивованим членом, що описує взаємодію кваркових струмів через лінійний потенціал. Вибір варіаційного пробного стану  $|\text{meson}\rangle = |\bar{q}q\rangle + |\bar{q}qg\rangle$  приводить (у системі ЦМ) до двох зв'язаних інтегральних рівнянь для маси  $M$  мезону,  $q\bar{q}$ -амплітуди  $F(\mathbf{p})$  та  $q\bar{q}g$ -амплітуди  $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Система цих рівнянь доволі громіздка, і автори спрощують її до 1-го р-ня для  $q\bar{q}$ -амплітуди шляхом низки наближень, вилучення амплітуди  $G$  та специфікації мезонного стану. Для цього  $q\bar{q}$ -амплітуду  $F(\mathbf{p})$  представляють як добуток скалярної функції  $f(p)$ , сферичного спінору та матриць Дірака. Таким чином отримано рівняння для мас та амплітуд радіально незбуджених станів псевдоскалярних, скалярних і псевдовекторних безколірних мезонів. При розгляді чармонію ( $c\bar{c}$ ) та боттомонію ( $b\bar{b}$ ) натяг струни фіксувався значенням  $a = 0.18 \text{ GeV}^2$ , а маси кварків та значення біжучої константи взаємодії припасовувалися до нижніх станів. Узгодження з експериментом дуже добре, за

винятком надпорогових станів, для яких істотними є знехтувані авторами ефекти відкритих каналів.

Цю ж модель застосовано і для опису легких мезонів. В роботі [320] обчислено маси мезонів у залежності від значення біжучої константи. При її зростанні маса псевдоскалярного мезона спадає значно швидше, ніж векторного, досягаючи при  $\alpha_s = 0.833$  і  $m_u = 0.27$  ГeВ значень 0.14 ГeВ та 0.7 ГeВ відповідно, що точно відповідає масам  $\pi$ - і  $\rho$ -мезонів. Пізніше модель була розширенна за рахунок електромагнетного сектору розпадів кварконію.

Варто також згадати спроби описати зв'язані стани кварконію з допомогою варіаційного гамільтонового методу із перших принципів, тобто в рамках КХД – без феноменологічних доданків, але з врахуванням неабелевих членів. При цьому пробні стани не повинні обмежуватися 1-глюонним обміном. В роботі [321] шляхом використання анзацу  $|meson\rangle = |q\bar{q}\rangle + |q\bar{q}g\rangle + |q\bar{q}gg\rangle + \dots$  отримано складний нескінчений ланцюжок рівнянь, до якого застосовано нерелятивістичне та низку інших (неконтрольованих; авт.) наближень, що дало змогу обчислити енергію основного стану системи. Подібно, в роботі [322] використано 2-компонентний анзац, а варіаційну задачу редуковано до 1-го релятивістичного рівняння, розв'язаного наближенім методом. Обидві роботи демонструють пониження енергії за рахунок багатоканального пробного стану і неабелевих членів гамільтоніану. Це дає надію на отримання в майбутньому глибших результатів щодо опису конфайнменту в рамках даного підходу.

### 1.2.11. Короткий підсумок

Потенціальні моделі гадронів не виводяться строго з квантової хромодинаміки (КХД). Вони лише обґрунтуються різними наближеними підходами та оцінками в КХД, або будуються феноменологічно. Різні моделі мають свої переваги та області застосування. Наприклад, спектри важких мезонів (що містять кварки  $c$  і  $b$ ) добре описуються нерелятивістичною моделлю з корнельським потенціалом (1.2.2). Його кулонівська частина описує статичну границю векторної

взаємодії 1-глюонного обміну; лінійна частина походить з закону площ в КХД на гратці, і описує далекосяжну статичну взаємодію кварків.

Опис спектроскопії легких мезонів потребує релятивістичних моделей. Їх можна поділити на три категорії. До 1-ї належать феноменологічні осциляторні та струнні моделі. Вони мають елегантну математичну структуру, і приводять до лінійних чи асимптотично лінійних траєкторій Редже. Але ці моделі не охоплюють опис важких мезонів, і хромодинамічна природа міжкваркових взаємодій у них не відображеня (або глибоко прихована). До 2-ї категорії віднесемо моделі, побудовані шляхом “релятивізації” статичних потенціалів в рамках того чи іншого підходу до РТПВ. При цьому виникає велика довільність у способах релятивізації, що визначаються не стільки фізигою, як математичною структурою використаного підходу. До 3-ї категорії належать моделі, що походять з КТП: квазірелятивістичні, БС-пов’язані та варіаційні. Квазірелятивістичні моделі не є пуанкаре-інваріантними, і погано підходять до опису гадронів із легких кварків. Те ж стосується варіаційних рівнянь, в яких, крім цього, застосовуються не строго контролювані наближення при виборі пробних станів та перенормуванні. Рівняння Бете-Салпітера має пертурбативне походження, а далекосяжна утримна взаємодія додається туди руками. Крім цього, для квантово-механічного використання необхідна 3D-редукція БС-рівняння шляхом миттєвого чи квазі-потенціального наближення, що еквівалентно накладанню умови Юкави-Маркова (1.1.19) чи спряженої умови типу (1.1.18), характерних для деяких підходів до РТПВ. Але ці умови суперечать теоретико-польовому уявленню про часо-просторову нелокальність релятивістичних взаємодій.

Можливий спосіб врахування часо-просторової нелокальності взаємодій та інших релятивістичних ефектів у кваркових системах – це побудова потенціальних моделей на базі класичної теорії поля та пов’язаного з нею формалізму інтегралів типу Фоккера. Використання ефективних теорій поля могло б забезпечити конфайнмент без надмірного ускладнення моделей математичними апаратом КХД. Такі моделі розглянутимуться в розділі 3, де на початку розділу буде обговорено спектроскопічну мотивацію їх побудови.

### 1.3. Інтеграли дії типу Фоккера та нелокальні лагранжіани

Формалізм інтегралів дії типу Фоккера [31, 32] виник на початку ХХ-го століття як класичний релятивістичний опис системи точкових заряджених частинок з електромагнетною взаємодією [33–35], альтернативний до класичної електродинаміки. На відміну від останньої, фоккерівський формалізм не використовує потенціали поля як незалежні змінні, а сформульований виключно в термінах змінних частинок. Тим не менше, обидва підходи тісно пов’язані між собою, і цей зв’язок варто прослідкувати як для введення основних понять формалізму, так і їх фізичного осмислення.

Тут і далі вживатимуться загальноприйняті позначення, принагідні до явно коваріантного опису релятивістичних систем. Простір Мінковського  $\mathbb{M}_4$  в (3+1)–вимірному афінному псевдо-евклідовому просторі-часі; точки  $x \in \mathbb{M}_4$  параметризуються (псевдо)декартовими координатами  $x^\mu$  ( $\mu = \overline{0, 3}$ ), де  $x^0 \equiv t$  позначає час, а 3-вектор  $\mathbf{x} \equiv \{x^i \mid i = 1, 2, 3\}$  залучає просторові виміри. Обрано просторово-подібну метрику Мінковського  $\|\eta_{\mu\nu}\| = \text{diag}(+, -, -, -)$ , та систему одиниць, в якій швидкість світла  $c = 1$  та стала Планка  $\hbar = 1$ .

Класична електродинаміка, як і динаміка всякої іншої релятивістичної теорії поля задається інтегралом дії:

$$I = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (1.3.1)$$

в деякій області простору Мінковського ( $x \in \mathbb{M}_4$ ). У локальній теорії поля густина лагранжіану  $\mathcal{L}(x)$  є функцією польових потенціалів та їх похідних (у нелокальних теоріях – функціонали цих змінних).

#### 1.3.1. Електродинаміка та рівняння руху

У стандартній класичній електродинаміці електромагнетне поле описується 4-векторним потенціалом  $A_\mu(x)$ , похідні якого утворюють тензор Максвела  $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \equiv \partial_{[\mu} A_{\nu]}(x)$ , де  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ .

Густина лагранжіану електромагнетного поля містить два члени:

$$\mathcal{L}_{\text{em}}(x) = \mathcal{L}_{\text{field}}(x) + \mathcal{L}_{\text{sr}}(x) = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - A_\mu(x)J^\mu(x), \quad (1.3.2)$$

де перший член відповідає вільному полю, а другий описує взаємодію з струмом джерела густиною  $J^\mu(x)$ .

Польові рівняння, як рівняння Ойлера-Лагранжа, випливають з варіаційної задачі  $\delta_{A_\mu} I_{\text{em}} = 0$ . Тут  $\delta_{A_\mu}$  позначає оператор варіації щодо польових змінних  $A_\mu$ ; інші деталі цієї стандартної задачі тут опустимо.

Якщо струм зберігається,

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0, \quad (1.3.3)$$

то варіаційні польові рівняння – рівняння Максвела

$$\partial_\nu F^{\nu\mu}(x) = 4\pi J^\mu(x) \quad (1.3.4)$$

є сумісними і визначають потенціал  $A_\mu(x)$  з точністю до калібрувального перетворення. Щоб  $A_\mu(x)$  як розв'язок рівнянь (1.3.4) був цілком визначеним, ці р-ня треба доповнити калібрувальною умовою, наприклад умовою Лоренца:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0, \quad (1.3.5)$$

завдяки якій рівняння Максвела спрощуються до р-нь Даламбера:

$$\square A^\mu(x) = 4\pi J^\mu(x). \quad (1.3.6)$$

Густина струму  $J^\mu$  системи  $N$  точкових заряджених частинок така:

$$J^\mu(x) \equiv \sum_a J_a^\mu(x) = \sum_a q_a \int d\tau_a \dot{z}_a^\mu \delta(x - z_a). \quad (1.3.7)$$

Тут  $z_a^\mu(\tau_a)$  ( $\mu = \overline{0, 3}$ ,  $a = \overline{1, N}$ ) є просторово-часові координати світлої лінії  $a$ -ї частинки в  $\mathbb{M}_4$ , параметризованої довільним параметром еволюції  $\tau_a$ ,  $\dot{z}_a^\mu(\tau_a) \equiv dz_a^\mu/d\tau_a$ , а  $q_a$  є зарядом  $a$ -ї частинки. Припускаємо, що частинка має масу спокою  $m_a$ , а її світова лінія є часоподібною:  $\dot{z}_a^2 > 0$ . Тоді повна дія, що описує систему “поле+частинки”, має вигляд:

$$I = I_{\text{em}} + I_{\text{free}}, \quad (1.3.8)$$

де

$$I_{\text{em}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{em}}(x), \quad (1.3.9)$$

$$I_{\text{free}} = - \sum_a m_a \int d\tau_a \sqrt{\dot{z}_a^2}. \quad (1.3.10)$$

Варіація цієї дії щодо 4- положень частинок  $z_a^\mu(\tau_a)$  дає рівняння руху частинок:

$$\frac{d}{d\tau_a} \frac{m_a \dot{z}_a^\mu}{\sqrt{\dot{z}_a^2}} = F_a^\mu \equiv q_a F^{\mu\nu}(z_a) \dot{z}_{a\nu}. \quad (1.3.11)$$

Варто відзначити, що внаслідок інваріантності дії (1.3.8) щодо довільної заміни параметру еволюції  $\tau_a \rightarrow \tau'_a = f_a(\tau_a)$  серед  $4N$  рівнянь (1.3.11) лише  $3N$  є незалежними. Тому одна функція, скажімо  $z_a^0(\tau_a)$ , серед чотирьох  $z_a^\mu(\tau_a)$  залишається невизначеною. Можна обрати, наприклад,  $z_a^0 = \tau_a$ , або вжити інше означення для параметризації – т.зв. форму релятивістичної динаміки.

Щоб визначити рух частинок, необхідно розв'язати повну систему пов'язаних рівнянь: польові рівняння (1.3.4) або (1.3.6), та рівняння руху (1.3.11).

Формальний розв'язок лінійних польових рівнянь (1.3.6) очевидний:

$$A^\mu = A_0^\mu + 4\pi D * J^\mu, \quad \text{де} \quad [D * J^\mu](x) \equiv \int d^4x' D(x - x') J^\mu(x')$$

– оператор згортки,  $D(x)$  є функцією Гріна р-ня Даламбера:

$$D(x) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \tilde{D}(k), \quad \tilde{D}(k) = -\frac{1}{k^2},$$

а  $A_0^\mu(x)$  є довільним розв'язком однорідного (вільнопольового) рівняння.

Припускаючи, що поле  $A^\mu(x)$  цілковито породжується частинковим струмом (1.3.7), покладаємо  $A_0^\mu(x) = 0$ . Вибір ф-ї Гріна є неоднозначним через існування полюсів  $k^0 = \pm|\mathbf{k}|$  фур'є-образу  $\tilde{D}(k)$ . З міркувань причинності звичайно обирають запізнену ф-ю Гріна

$$D_{\text{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi} \Theta(x^0) \delta(x^2) = \frac{\delta(x^0 - |\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad (1.3.12)$$

де  $\Theta(x^0)$  – сходинкова ф-я Гевісайда, а  $\delta(x^2)$  –  $\delta$ -функція Дірака від лоренц-скалярного аргументу  $x^2 \equiv \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ .

Для подальшого введемо більш загальну ф-ю Гріна виду:

$$D_\eta(x) = \frac{1}{4\pi} [1 + \eta \operatorname{sgn} x^0] \delta(x^2), \quad (1.3.13)$$

де параметр  $\eta$  може набувати довільного дійсного значення  $\eta \in \mathbb{R}$ . Зокрема, вибір  $\eta = +1$  відповідає запізненій ф-ї Гріна  $D_{\text{ret}}$ , значення  $\eta = -1$  – випередній ф-ї  $D_{\text{adv}}$ , а  $\eta = 0$  дає симетричну ф-ю Гріна  $D_{\text{sym}}$ .

Розв'язок польових рівнянь (1.3.6), відповідний ф-ї Гріна (1.3.13), такий:

$$A^\mu = \sum_a A_a^\mu = 4\pi \sum_a D_\eta * J_a^\mu, \quad (1.3.14)$$

де  $A_a^\mu$  представляє електромагнетний потенціал, породжений  $a$ -ю частинкою.

Тепер рівняння руху частинок можна отримати у замкненій формі шляхом підстановки релятивістичного потенціалу (1.3.14) у праву частину р-нь (1.3.11). Ця операція має формальне значення, оскільки той член у правій частині (п.ч.) рівняння руху (1.3.11), що породжений потенціалом самодії  $A_a^\mu(z_a)$ , є розбіжним. Його можна регуляризувати різними способами [323–325], що дають один результат. Упускаючи деталі зазначимо, що для загального вибору ф-ї Гріна (1.3.13) можна отримати таку релятивістичну силу взаємодії у правій частині (1.3.11):

$$F_a^\mu = q_a \sum_{b \neq a} F_{ab}^{\mu\nu} \dot{z}_{a\nu} + \eta R_a^\mu, \quad (1.3.15)$$

$$\begin{aligned} F_{ab}^{\mu\nu} &= 4\pi q_b \int d\tau_b \dot{z}_b^{[\nu} \partial^{\mu]} D_\eta(z_{ab}) \\ &= 2q_b \int d\tau_b (1 + \eta \operatorname{sgn} z_{ab}^0) \delta'(z_{ab}^2) z_{ab}^{[\mu} \dot{z}_b^{\nu]}, \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

де  $z_{ab} \equiv z_a - z_b$ ,  $x^{[\mu} y^{\nu]} \equiv x^\mu y^\nu - y^\mu x^\nu$  для довільних 4-векторів  $x$  та  $y$ , і де з'являється відомий вираз для сили реакції випромінювання [325]:

$$R_a^\mu = \frac{2}{3} q_a^2 \left\{ \delta_\nu^\mu - \frac{\dot{z}_a^\mu \dot{z}_{a\nu}}{\dot{z}_a^2} \right\} \frac{d}{d\tau_a} \frac{1}{\sqrt{\dot{z}_a^2}} \frac{d}{d\tau_a} \frac{\dot{z}_a^\nu}{\sqrt{\dot{z}_a^2}}. \quad (1.3.17)$$

Результатом регуляризації є також перенормування маси частинок у лівій частині (л.ч.) (1.3.11), яке розглянатиметься далі.

При виборі  $\eta = 1$  для ф-ї Гріна (1.3.13), тобто (1.3.12), рівняння руху (1.3.11), (1.3.15), (1.3.17) описують динаміку точкових зарядів у стандартній запізненій електродинаміці, а причинна структура попарної міжчастинкової взаємодії зображенна на рис. 1.2a. При виборі випередної ф-ї Гріна ( $\eta = -1$ ) сила реакції випромінювання у п.ч. (1.3.15) змінює знак на протилежний, а для симетричної ф-ї Гріна ( $\eta = 0$ ) вона відсутня. У цьому останньому випадку причинна структура взаємодії показана на рис. 1.2b, а для рівнянь руху (1.3.11) можна отримати варіаційний принцип.

### 1.3.2. Електродинаміка та інтеграл дії Фоккера

Інтеграл дії Фоккера можна вивести з електродинаміки, якщо вилучити польові змінні не з рівнянь (1.3.11), а безпосередньо з повної дії (1.3.9)-(1.3.11), которую можна представити так:

$$I = I_{\text{free}} + I_{\text{sr}} + I_{\text{field}}. \quad (1.3.18)$$

Вживаючи польові рівняння (1.3.4) в  $I_{\text{field}}$ , отримаємо рівність:

$$\begin{aligned} I_{\text{field}} &= -\frac{1}{16\pi} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \int d^4x A_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} + \left( \begin{array}{c} \text{поверхневі} \\ \text{члени} \end{array} \right) \\ &\simeq \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu J^\mu \equiv -\frac{1}{2} I_{\text{sr}}, \end{aligned}$$

де символ “ $\simeq$ ” позначає рівність з точністю до поверхневих членів (що не дають внеску у варіаційну задачу).

Тепер, підставляючи струм (1.3.7) і потенціал (1.3.14) в 2-й і 3-й члени дії (1.3.18), можна представити їх у вигляді:

$$\frac{1}{2} I_{\text{sr}} = \sum_a \sum_b I_{ab} + \frac{1}{2} \sum_a I_{aa},$$

де

$$I_{ab} = -4\pi q_a q_b \iint d\tau_a d\tau_b \dot{z}_a \cdot \dot{z}_b D_{\text{sym}}(z_{ab}), \quad (1.3.19)$$

і враховано такі властивості ф-ї Гріна:

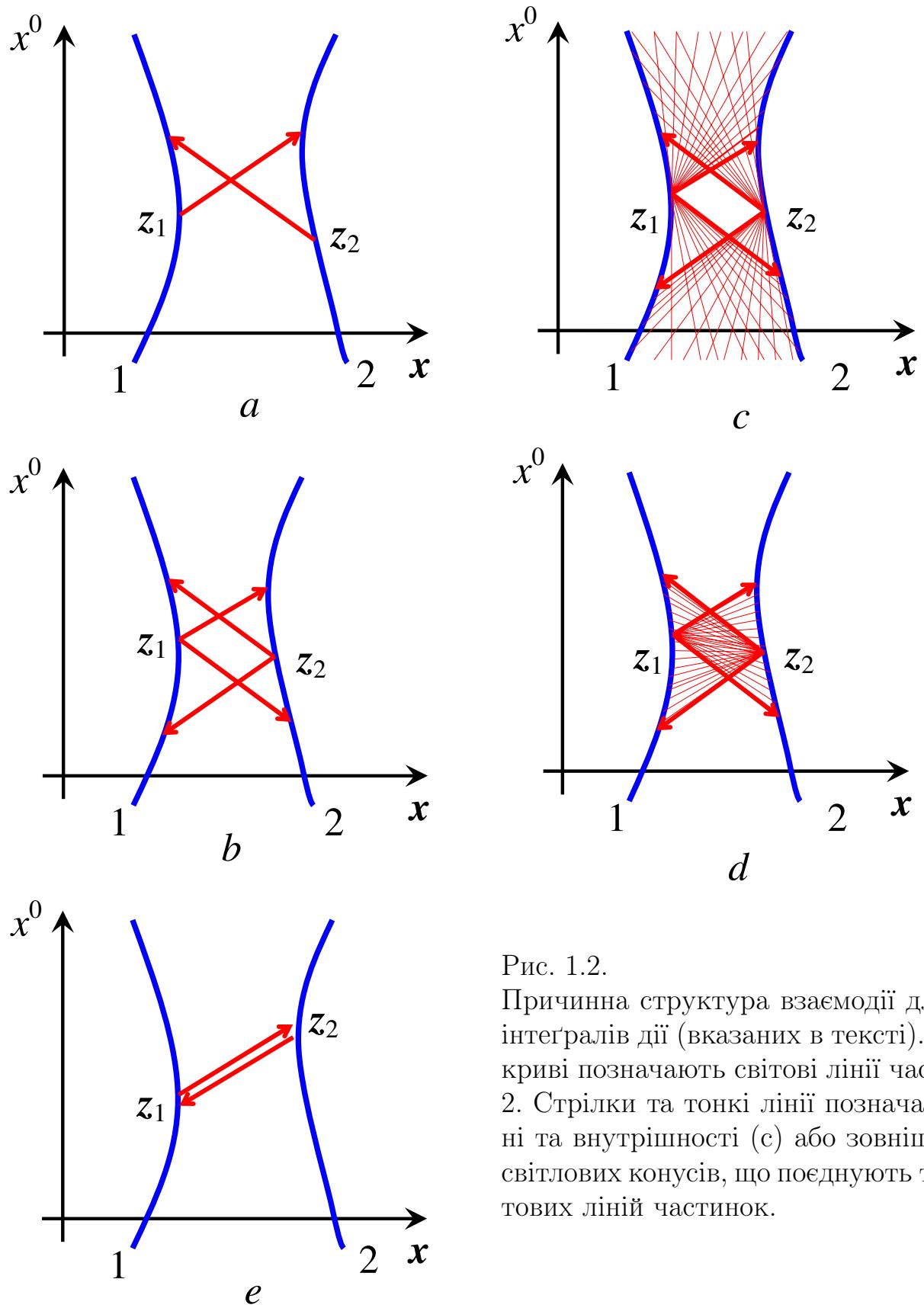


Рис. 1.2.

Причинна структура взаємодії для різних інтегралів дії (вказаних в тексті). Суцільні криві позначають світові лінії частинок 1 і 2. Стрілки та тонкі лінії позначають твірні та внутрішності (c) або зовнішності (d) світлових конусів, що поєднують точки світових ліній частинок.

$$D_\eta(-x) = D_{-\eta}(x) \quad (1.3.20)$$

$$D_{\text{sym}}(-x) = D_{\text{sym}}(x) = \frac{1}{2}[D_\eta(x) + D_{-\eta}(x)] \quad (1.3.21)$$

$$\left( = \frac{1}{2}[D_{\text{ret}}(x) + D_{\text{adv}}(x)] \quad \text{для } \eta = \pm 1 \right).$$

Член самодії

$$I_{aa} = -4\pi q_a^2 \int \int d\tau d\tau' \dot{z}_a \cdot \dot{z}_{a'} D_{\text{sym}}(z_{aa'}),$$

де  $z_a \equiv z_a(\tau)$ ,  $z_{a'} \equiv z_a(\tau')$ , є розбіжним. Дійсно, оскільки  $z_a$  і  $z_{a'}$  є просторово-часові точки тієї ж часоподібної світової лінії, тобто  $(z_a - z_{a'})^2 > 0$ , ф-я Гріна (1.3.12) не рівна нулеві якщо і лише якщо  $z_a = z_{a'}$ . Але у цій точці знаменник 2-го виразу у п.ч. (1.3.12) (і відповідного випередного внеску) рівний нулеві, і тому інтеграл  $I_{aa}$  розбіжний. Якщо його регуляризувати, напр., заміною:

$$\delta(z_{aa'}^2) \rightarrow \delta_\varepsilon(z_{aa'}^2) \equiv \delta(z_{aa'}^2 - \varepsilon^2),$$

то це приводить до виразу

$$I_{aa} = -\frac{q_a^2}{\varepsilon} \int d\tau_a \sqrt{\dot{z}_a^2},$$

який можна об'єднати з  $a$ -м членом  $I_{\text{free}}$  шляхом перенормування маси

$$m_a \rightarrow m_a + \frac{q_a^2}{2\varepsilon} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0}.$$

Остаточний вираз для дії (1.3.18) є нічим іншим, як дією Тетроде-Фоккера:

$$I = I_{\text{free}} + I_{\text{int}} = I_{\text{free}} + \sum_a \sum_b I_{ab} \quad (1.3.22a)$$

$$= - \sum_a m_a \int d\tau_a \sqrt{\dot{z}_a^2} - \sum_a \sum_b q_a q_b \int \int d\tau_a d\tau_b \dot{z}_a \cdot \dot{z}_b \delta(z_{ab}^2). \quad (1.3.22b)$$

Хоча дія (1.3.22) описує часо-симетричну електродинаміку точкових зарядів, з неї можна вивести і звичну запізнену електродинаміку. Для цього Вілер і Фейнман запропонували доповнити теорію гіпотезою *досконалого поглинача*, у

якій враховано відгук цілого всесвіту через специфічні граничні умови [36, 41–43]. Праву частину рівнянь руху (1.3.11) в часо-симетричному випадку можна представити у вигляді:

$$F_a^\mu = \frac{1}{2} \sum_{b(\neq a)} (F_{ab, \text{ret}}^\mu + F_{ab, \text{adv}}^\mu) \quad (1.3.23\text{a})$$

$$= \sum_{b(\neq a)} F_{ab, \text{ret}}^\mu \quad (1.3.23\text{b})$$

$$+ \frac{1}{2} (F_{aa, \text{ret}}^\mu - F_{aa, \text{adv}}^\mu) \quad (1.3.23\text{c})$$

$$- \frac{1}{2} \sum_b (F_{ab, \text{ret}}^\mu - F_{ab, \text{adv}}^\mu) \quad (1.3.23\text{d})$$

Умова досконалого поглинача полягає у зануленні останньої стрічки (1.3.23d). Стрічка ж (1.3.23c) збігається із силою радіаційного тертя (1.3.17), і тоді вираз (1.3.23) в цілому – із силою (1.3.15) для запізненого випадку  $\eta = 1$ .

Врахування відгуку всесвіту, тобто дуже великого (формально – нескінченного) числа частинок, робить теорію Вілера-Фейнмана близькою до теорії поля з нескінченим числом ступенів вільності. Навіть більше, квантова версія теорії досконалого поглинача, що базується на відомому фейнманівському формалізмі інтегралів за траекторіями, виявляє цілковиту  $S$ -матричну еквівалентність до стандартної пертурбативної квантової електродинаміки [42, 43, 326].

### 1.3.3. Узагальнення на інші взаємодії польового типу

Подібно до електромагнетної взаємодії, можна розглядати взаємодії, що переносяться іншими релятивістичними полями: масивними, такими, описуються лоренц-скалярним  $\varphi$  або тензорним (мультиіндексним) потенціалом тощо.

Дія, яка описує систему частинок, що взаємодіють через *масивне скалярне поле*  $\varphi(x)$  маси  $m$  має вигляд [327]:

$$I = \int d^4x \mathcal{L}_\varphi(x) - \int d^4x \rho \varphi + I_{\text{free}}, \quad (1.3.24\text{a})$$

$$\text{де } \mathcal{L}_\varphi(x) = -\frac{1}{8\pi} [(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^2]. \quad (1.3.24\text{b})$$

Скалярний струм  $\rho$  генерується частинками, що мають скалярні “заряди”  $g_a$ ,

$$\rho(x) \equiv \sum_a \rho_a(x) = \sum_a g_a \int ds_a \delta(x - z_a); \quad (1.3.25)$$

тут для стисності вжито параметрично-інваріантну міру інтегрування  $ds_a \equiv d\tau_a \sqrt{\dot{z}_a^2}$  що є власним часом  $a$ -ї частинки.

Варіація дії (1.3.24) щодо польової змінної  $\varphi$  дає рівняння Кляйна-Гордона

$$[\square + m^2]\varphi = 4\pi\rho \quad (1.3.26)$$

з функцією Гріна  $G = D_{\text{sym}}$  вигляду:

$$\tilde{D}_{\text{sym}}(k; m) = -\mathcal{P} \frac{1}{k^2 - m^2}, \quad (1.3.27a)$$

$$D_{\text{sym}}(x; m) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \delta(x^2) - \Theta(x^2) \frac{m}{2\sqrt{x^2}} J_1(m\sqrt{x^2}) \right\}, \quad (1.3.27b)$$

де  $J_1(x)$  – ф-я Бесселя 1-го роду. Тоді дія (1.3.24), редукована з допомогою розв’язку  $\varphi = 4\pi G * J$  польового рівняння (1.3.26), зводиться до інтегралу типу Фоккера:

$$I = I_{\text{free}} - 4\pi \sum_a \sum_b g_a g_b \iint d\tau_a d\tau_b \sqrt{\dot{z}_a^2} \sqrt{\dot{z}_b^2} D_{\text{sym}}(z_{ab}; m) \quad (1.3.28a)$$

$$= - \sum_a m_a \int ds_a - 4\pi \sum_a \sum_b g_a g_b \iint ds_a ds_b D_{\text{sym}}(z_{ab}; m). \quad (1.3.28b)$$

Рівняння руху, що звідси випливають, є інтеро-диференційними, тобто для кожного 4- положення  $z_a$   $a$ -ї частинки вони акумулюють вплив нескінченних майбутнього та минулого сегментів усіх інших світових ліній; див. рис. 1.2c.

Існує широкий клас фізично важливих інтегралів типу Фоккера, що допускають теоретико-польову інтерпретацію взаємодії. Вони мають загальний вигляд [5, 17]:

$$I_{\text{int}} = - \sum_a \sum_b \iint ds_a ds_b \Pi_{ab}(z_{ab}, u_a, u_b), \quad (1.3.29a)$$

$$\Pi_{ab} = 4\pi g_a g_b f(\omega_{ab}) G(z_{ab}), \quad (1.3.29b)$$

де  $\Pi_{ab}(z_{ab}, u_a, u_b)$  – лоренц-скалярна ф-я вказаних 4-векторних аргументів,  $u_a \equiv dz_a / ds_a = \dot{z}_a / \sqrt{\dot{z}_a^2}$  є одиничними 4-швидкостями ( $u_a^2 = 1$ ) частинок, і  $\omega_{ab} = u_a \cdot u_b$ . Вид ф-ї  $f(\omega)$  залежить від лоренц-тензорної структури полів, що переносять взаємодію, а  $G(x)$  є ф-єю Гріна відповідного польового р-ня.

Для випадку **масивного векторного поля**  $\Pi_{ab} = 4\pi g_a g_b \omega_{ab} D_{\text{sym}}(z_{ab}; \mathcal{M})$ , а відповідна дія типу Фоккера (1.3.29) зводиться до електромагнетної (1.3.22) у границі  $\mathcal{M} \rightarrow 0$ , оскільки для ф-ї Гріна (1.3.27)  $D_{\text{sym}}(x; 0) = D_{\text{sym}}(x)$ .

Мультиіндексне поле  $A_{\mu\nu\dots\lambda}$  можна розкласти на незвідні лоренцівські тензори [17]. У квантовій теорії ці незвідні компоненти тлумачаться як елементарні частинки цілого спіну, тобто бозони. Для взаємодій, що переносяться **безмасовим полем заданого цілого спіну**  $s$  вигляд функції  $f(\omega)$  подано у роботі [17] – це поліном Чебишова  $T_s(\omega)$ , так що:

$$\Pi_{ab} = 4\pi g_a g_b T_s(\omega_{ab}) D_{\text{sym}}(z_{ab}). \quad (1.3.30)$$

Для нерухомих частинок  $\omega_{ab} = 1$ , і ф-я Гріна  $G(x) = G(x^0, \mathbf{x})$  або її фур'є-образ  $\tilde{G}(k) \equiv \tilde{G}(k_0, \mathbf{k})$  визначає статичний потенціал взаємодії частинок:

$$U_{ab}(r) = 4\pi g_a g_b f(1) \int dx^0 G(x^0, \mathbf{x}) \quad (1.3.31a)$$

$$= 4\pi g_a g_b f(1) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{G}(0, \mathbf{k}), \quad (1.3.31b)$$

де  $r \equiv |\mathbf{x}|$  (зазвичай  $f(1) = 1$ ). У випадку електромагнетної (1.3.22) і масивної скалярної (1.3.28) або векторної (1.3.29a) взаємодії матимемо, відповідно, кулонівський потенціал і потенціал Юкави:

$$U_C(r) = \frac{q_1 q_2}{r}, \quad U_Y(r; \mathcal{M}) = \frac{g_1 g_2}{r} e^{-\mathcal{M}r}.$$

Формули (1.3.31) для статичних потенціалів дають краще розуміння взаємодії у тому випадку, коли  $G(x)$  не є функцією Гріна рівнянь Даламбера або Кляйна-Гордона, а обрана феноменологічно, або випливає із деякої нестандартної теоретико-польової моделі; див. п. 1.2.9, 3.1.5.

### 1.3.4. Фоккерівські моделі гравітації

Існує кілька формулувань гравітаційної теорії прямих взаємодій [40–43, 99, 328]. Ідея про відгук всесвіту надихнула Гойла і Нарлікара на певну реалізацію з допомогою формалізму Фоккера принципу Маха, згідно з якою маса кожного тіла визначається розподілом мас в цілому всесвіті [42, 43]. Насправді ж їх підхід виявився теорією дії на відстані лише частково: фоккерівський опис стосується лише скалярного поля маси матерії у кривому просторі-часі який, однак, описується локальним метричним тензором  $g_{\mu\nu}(x)$ ; щодо нього підхід є нелінійною локальною теорією поля 2-го рангу.

Послідовний підхід типу дії на відстані мав би формулуватися як варіаційний принцип у термінах лише частинкових змінних, і був би сумісним із ЗТВ у тому, що:

- i) рівняння руху кожної (скажімо,  $a$ -ї) частинки можна представити як р-ня геодезичної щодо деякох метрики  $g_{\mu\nu}(x|z_1, \dots, z_N)$ , що є функцією  $x$  (взятої в точці  $z_a$  розташування  $a$ -ї частинки), і функціоналом світових ліній  $z_1(s_1), \dots, z_N(s_N)$ .
- ii) ця метрика тотожньо задовольняє рівняння Гільберта-Айнштайна.

Жодна з відомих у літературі теорій не задовольняє ці вимоги, тобто не є еквівалентом до ЗТВ Айнштайна. Однак підхід Владімірова-Туригіна (ВТ) [40, 41, 99] видається найближчою попередньою схемою такого типу. Крім того, він володіє явною спеціально-релятивістичною коваріантністю, і в цьому є зручним у застосуванні.

З огляду на нелінійну природу гравітації підхід ВТ будуються пертурбативно і базується на функціоналі дії, що в  $n$ -му наближенні за гравітаційною сталою  $\gamma$  має вигляд [41, 99]:

$$I = \sum_{m=0}^n \gamma^m W; \quad (1.3.32)$$

тут  $W$  – вільночастинковий інтеграл дії (1.3.10), тоді як  $W$ ,  $m \geq 1$ , становлять  $(m+1)$ -кратні узагальнення інтегралу типу Фоккера. Дія (1.3.32) будується іте-

раційною процедурою.

В джерелах [41, 99] члени дії (1.3.32) представлено у формі часо-просторових інтегралів. Зокрема, для члену 1-го порядку маємо:

$$\overset{1}{W} = -\frac{1}{4} \int d^4x \overset{0}{T}^{\mu\nu}(x) h_{\mu\nu}(x), \quad (1.3.33)$$

де

$$\overset{0}{T}^{\mu\nu}(x) \equiv \sum_a \overset{0}{T}_a^{\mu\nu}(x) = \sum_a m_a \int ds_a u_a^\mu u_a^\nu \delta(x - z_a) \quad (1.3.34)$$

є тензором енергії-імпульсу вільних частинок у пласкому часо-просторі, "гравітаційний потенціал"

$$h_{\mu\nu}(x) = \sum_a h_{a\mu\nu}(x) = -16\pi \sum_a \int d^4x' D_{\mu\nu}^{\lambda\sigma}(x - x') \overset{0}{T}_{a\lambda\sigma}(x') \quad (1.3.35)$$

є вкладом у метрику 1-го порядку  $\overset{1}{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma h_{\mu\nu}$ , а

$$D_{\mu\nu}^{\lambda\sigma}(x) = \frac{1}{2}(\delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\sigma + \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\lambda - \eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma}) D(x) \equiv \Delta_{\mu\nu}^{\lambda\sigma} D(x) \quad (1.3.36)$$

є симетричною функцією Гріна лінеаризованих рівнянь Гільберта-Айнштайна, отриманою з використанням умови дедондера-Фока (гармонічності в лінійному наближенні).

Щоб отримати явну фоккерівську форму для  $\overset{1}{W}$ , необхідно виконати інтегрування у правій частині. Отримуємо:

$$\overset{1}{W} = 4\pi \sum_{a < b} \sum m_a m_b \iint ds_a ds_b (2\omega_{ab}^2 - 1) D(z_{ab}), \quad (1.3.37)$$

що збігається з дією на відстані лінеаризованої гравітації [328]. Вона також узгоджується з виразами (1.3.29a), (1.3.30) для фоккерівської дії тензорної взаємодії 2-го рангу, оскільки  $T_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$ .

Ні умова дедондера-Фока, ні закон збереження тензора енергії-імпульсу не виконуються точно:

$$\partial_\mu \Delta_{\lambda\sigma}^{\mu\nu} h^{\lambda\sigma}(x) = O(\gamma), \quad \partial_\mu \overset{0}{T}^{\mu\nu}(x) = O(\gamma).$$

Тому для повнішої сумісності із ЗТВ слід звертатися до вищих наближень.

Розглянемо часо-просторову форму члену 2-го порядку  $\overset{2}{W}$  дії (1.3.32):

$$\overset{2}{W} = -\frac{1}{4} \int d^4x \overset{1}{T}^{\mu\nu}(x) h_{\mu\nu}(x). \quad (1.3.38)$$

В ранній роботі Туригіна [40]  $\gamma \overset{1}{T}^{\mu\nu}$  взято як поправка 1-го порядку до тензора енергії-імпульсу  $T^{\mu\nu}$  точкових частинок щодо метрики 1-го порядку  $\overset{1}{g}_{\mu\nu}$ .

Явне обчислення відповідного фоккерівського інтегралу дає:

$$\begin{aligned} \overset{2}{W}_I &= \frac{1}{2}(4\pi)^2 \sum_a \sum_{b \neq a} \sum_{c \neq a} m_a m_b m_c \iiint ds_a ds_b ds_c (2\omega_{ab}^2 - 1) \\ &\quad \times (2\omega_{ac}^2 - 3) D(z_{ab}) D(z_{ac}). \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

Вдосконалена версія [41, 99] підходу ВТ дозволяє продовжувати побудову дії (1.3.32) до наближення довільного порядку. В 2-му наближенні виходять з тієї ж часо-просторової форми (1.3.38) для  $\overset{2}{W}$ , однак за  $\gamma \overset{1}{T}^{\mu\nu}$  взято поправку 1-го порядку до тензора енергії-імпульсу системи частинок, що взаємодіють на відстані у пласкому часо-просторі. Явне виконання інтегрування у правій частині дії (1.3.38) тепер є складнішим, і дає член 2-го порядку з 2-х частин  $\overset{2}{W}_{II} = \overset{2}{W}'_{II} + \overset{2}{W}''_{II}$ :

$$\begin{aligned} \overset{2}{W}'_{II} &= \frac{1}{2}(4\pi)^2 \sum_a \sum_{b \neq a} \sum_{c \neq a} m_a m_b m_c \iiint ds_a ds_b ds_c (4\omega_{ab}^2 \omega_{ac}^2 - 8\omega_{ab} \omega_{ac} \omega_{bc} \\ &\quad + 2\omega_{ab}^2 + 2\omega_{ac}^2 - 1) D(z_{ab}) D(z_{ac}), \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{W}''_{II} &= -(4\pi)^2 \sum_a \sum_{b \neq a} \sum_{c \neq a} m_a m_b m_c \iiint ds_a ds_b ds_c \{(2\omega_{bc} - 1)(u_a \cdot \partial_b)(u_a \cdot \partial_c) \\ &\quad + 2\omega_{bc} [2\omega_{ab}(u_c \cdot \partial_a)(u_a \cdot \partial_b - u_a \cdot \partial_c) \\ &\quad + (u_b \cdot \partial_a)(u_c \cdot \partial_b - u_c \cdot \partial_c)]\} F(z_a, z_b, z_c), \end{aligned} \quad (1.3.41)$$

де  $\partial_a \equiv \partial/\partial z_a$ , а ф-я  $F(x_1, x_2, x_3)$  є згорткою 3-х ф-й Гріна р-ня Даламбера:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \int d^4z D(z - x_1) D(z - x_2) D(z - x_3). \quad (1.3.42)$$

Варто відзначити, що член  $\overset{2}{W}_I$ , як і  $\overset{2}{W}'_{II}$ , можна тлумачити так, ніби взаємодія поширюється через поверхню світового конусу, тоді як  $\overset{2}{W}''_{II}$  відповідає

взаємодії через його внутрішність. Такий характер "нелокальності" є характерним для гравітації, як це було з'ясовано в рамках іншого, т.зв. наближення "швидкого руху" [329]. Тому пізніша версія підходу ВТ видається глибше.

Є принаймні два джерела неоднозначності у побудові дії (1.3.32). Одне з них стосується регуляризації розбіжних членів при переході від їх часо-просторової до фоккерівської форми. В рамках підходу ВТ пропонується просте правило регуляризації [41]: дію обчислюють так, наче світові лінії є часоподібні, тобто  $z_{aa'}^2 > 0$ , але точки  $z_a = z_a(s_a)$  і  $z_{a'} \equiv z_a(s'_a)$  ніколи не збігаються. У лінійному наближенні це правило дає те ж саме, що й інші регуляризації, відомі у літературі [328, 329]. Але член 2-го порядку  $\tilde{W}_{II}$  будується на базі члену 1-го порядку  $\tilde{W}^1$ , яку можна взяти як регуляризований вираз, або ні. Ці два різні шляхи ведуть до різних результатів для  $\tilde{W}_{II}^2$ . Тут представлено результат (1.3.41), отриманий першим шляхом: шлях веде до втрати тих членів у (1.3.41), що відповідають  $b = c$ .

Навіть, якщо  $\tilde{W}^1$  обрано, обчислення  $\tilde{T}^{\mu\nu} = -2\delta\tilde{W}^1/\delta g_{\mu\nu}$  не є добре означеню процедурою. Для цього треба би мати аналог виразу  $\tilde{W}^1$  для випадку кривого часо-просторового тла. Але є певна неоднозначність у побудові у побудові такого аналогу для функції Гріна (1.3.36), що є підінтегральним множником в  $\tilde{W}^1$ . Це ж стосується і функціональної похідної  $\delta G_{\mu\nu}^{\lambda\sigma}/\delta g_{\rho\tau}$ , що є під інтегралом в  $\tilde{W}_{II}^2$ .

Єдиним критерієм усунення цих неоднозначностей була б узгодженість з вимогами **i)** та **ii)**, сформульованими на початку цього підрозділу. Однак, в рамках підходу ВТ ці вимоги не розглядаються. Навіть більше, їх фактично підмінюють на дещо слабші:

- i')** рівняння руху для кожної (скажімо,  $a$ -ї) частинки, що тлумачиться як пробна, стають геодезичними щодо деякої метрики  $g_{\mu\nu}(x|z_1, \dots, z_{\hat{a}}, \dots, z_N) \equiv g_{\hat{a}\mu\nu}(x)$  (власної для кожної частинки), що є функцією від аргументу  $x$  (взятого у точці розташування  $a$ -ї частинки  $z_a$ ) та функціоналом інших світових ліній  $z_1(s_1), \dots, z_{\hat{a}}(s_{\hat{a}}), \dots, z_N(s_N)$ ;
- ii')** ця метрика тотожньо задовольняє рівняння Гільберта-Айнштайнa з тензором енергії-імпульсу  $T_{\hat{a}}^{\mu\nu}(x)$  у правій частині;

тут індекс " $\hat{a}$ " означає, що  $a$ -й аргумент упущено. У лінійному наближенні ці вимоги еквівалентні до **i)** та **ii)** і виконуються, як це легко показати. Але у вищих наближеннях доведення цих тверджень не забезпечує еквівалентність підходу ВТ до ЗТВ. Навіть більше, доведення твердження **ii')** [41, 99] не видається повним. Дійсно, показано, що:

- ii")** метрика  $g_{\hat{a}\mu\nu}(x)$  обертає у тотожності р-ня Гільберта-Айнштайнa із деяким тензором  $\mathcal{T}_{\hat{a}}^{\mu\nu}(x)$  у правій частині;
- ii'''**) коваріантна дивергенція  $\nabla_{\mu}\mathcal{T}_{\hat{a}}^{\mu\nu}(x)$ , обчислена щодо  $g_{\hat{a}\mu\nu}(x)$ , рівна нулеві в силу рівнянь руху інших  $b$ -х частинок ( $b = 1, \dots, \hat{a}, \dots, N$ ).

Але **ii')** не випливає з цього твердження, оскільки  $\mathcal{T}_{\hat{a}}^{\mu\nu}(x)$  не мусить бути  $T_{\hat{a}}^{\mu\nu}(x)$ . Безпосередні обчислення в 2-му наближенні, здійснені автором дисертації, показують, що обидві – рання та вдосконалена версії підходу ВТ приводять до тензору  $\mathcal{T}_{\hat{a}}^{\mu\nu}(x)$  із часо-просторовим носієм, що не є об'єднанням світових ліній точкових частинок.

### 1.3.5. Динаміка Фоккера і кількачастинкові зв'язані стани

Оскільки вілер-фейнманівська чи інші теорії досконалого поглинача передбачають врахування відгуку всесвіту, вони постають як задачі  $\infty$ -го числа частинок, а кілька-частинкові задачі залишаються поза розглядом.

З іншого боку, саму собою дію Фоккера можна записати для довільно-го скінченного числа частинок, тому вона являє само-узгоджений і пуанкар-інваріантний опис задачі кількох тіл. З погляду звичної теорії поля фоккерівська дія може забезпечити наблизений опис у тих енергетичних межах, де радіаційні процеси (або, у квантовій термінології, процеси народження-знищення частинок) відсутні або не суттєві, але інші релятивістичні ефекти необхідно враховувати. У цьому відношенні, узагальнення фоккерівського формалізму на інші взаємодії, відомі в сучасній фізиці, може бути корисним. Можна згадати випадки скалярного масивного поля [327], безмасових і масивних тензорних полів вищого рангу [17, 38, 39], міжкваркової взаємодії [44–47] тощо [38, 47]. Тут виникає можливість формулювати задачі на зв'язані стани кількачастинкових релятивістичних систем з різними взаємодіями поза рамками КТП. Ця можливість передбачала б квантування задачі типу Фоккера як кількачастинкової, без впливу цілого всесвіту. Ідея полягає в тому, щоб розглянути кількачастинкову фоккерівську систему як динамічну систему із скінченою кількістю ступенів вільності, а тоді застосувати відповідну процедуру квантування.

Варіаційна задача на основі інтегралу дії типу Фоккера приводить до різницево- або інтегро-диференційних рівнянь руху. Здебільшого такі системи мають необмежену кількість ступенів вільності, а вивчення їх динаміки є складною задачею. Особливу увагу природно приділяють фоккерівській електродинаміці точкових частинок, що описується різницево-диференційними рівняннями. Жданов [330] показав існування ефективних рівнянь руху 2-го порядку, розв'язки яких є підмножиною розв'язків рівнянь руху Тетроде-Фоккера; ця підмножина охоплює слабкорелятивістичну область рухів і, отже, володіє ньютонівською пердиктивністю. Те ж стосується і лінеаризованої гравітації [331]. Загалом, для побудови

розв'язку фоккерівських рівнянь руху недостатньо початкових координат і швидкостей частинок, як в задачі Коші, чи початкових і кінцевих положень, як у краївій задачі. В роботах [332, 333] 1-вимірну (в  $\mathbb{M}_2$ ) 2-частинкову задачу переформульовано в термінах локальної гамільтонової механіки із в'язами для світлової драбинки – послідовності точок світлових ліній, утворених їх взаємо-перетином із світловими конусами, випущеними із попередніх точок. У 3-вимірному випадку Де Люка показав [334], що окрім краївих точок, у варіаційній задачі Вілера-Фейнмана необхідно задати скінченні сегменти світових ліній, обмежені світловими конусами, випущеними з краївих точок. Ці роботи слугують основою для числових алгоритмів, запропонованих в роботі [335]. Однак, проблема існування і єдності розв'язків електродинаміки Вілера-Фейнмана ще до кінця не вичерпана [336], і вивчається на простіших моделях цього типу [337], в т.ч. і автором дисертації [22].

### 1.3.6. Колові і майже колові орбіти систем Фоккера

Велике значення для розуміння фоккерівської динаміки має існування точних розв'язків у вигляді двочастинкових колових орбіт [59–61]. Ці розв'язки можуть сягати в область істотно релятивістичних рухів сильно зв'язаних частинок. Для вивчення стійкості колових орбіт були отримані і вивчалися рівняння для малих збурень цих орбіт – як для випадку електродинаміки Вілера-Фейнмана [63–65], так і лінеаризованої гравітації [338]. Ці лінійні різницево-диференційні рівняння допускають сім'ю майже колових орбіт (МКО), що у області повільних рухів відповідають орбітам Кеплера. Крім цього, існує нескінчена послідовність розв'язків, що в області повільних рухів є винятково нестійкими. Деякі з таких розв'язків можуть стати стійкими за дуже високих швидкостей частинок  $v > 0.95$  (тут швидкість світла  $c = 1$ ). Ці результати були підтвердженні прямими числовими розрахунками [333, 335]. Розв'язки, що відповідають кеплеро-подібним МКО, становлять систему із 6-ма ступенями вільності (для 2-х частинок), вкладену у вихідну фоккерівську динаміку, що узгоджується з результатами Жданова [330].

### 1.3.7. Гамільтонів опис систем типу Фоккера

Як зазначено вище, для часо-нелокальних рівнянь руху систем типу Фоккера задача Коші не є відповідною. Як наслідок, вивчення фазового простору (тобто, простору можливих станів), побудова гамільтонового опису та квантування таких систем є нетривіальними задачами.

Великі зусилля були затрачені на те, щоб розвинути процедуру гамільтонізації нелокальних у часі варіаційних задач, зокрема, інтегралів дії. В загальному, така процедура будується шляхом переформулювання задачі в іншу, але локальну у часі форму. Тут варто згадати кільки таких можливостей.

Перша можливість – це формальний розклад нелокальної дії у лагранжеву дію з вищими похідними (аж до нескінченноного порядку) [259, 339], з подальшим використанням формалізму Гамільтона-Остроградського [16]. В іншій схемі, розвинутій Лльозою та співавторами [105, 340], варіаційну задачу переформульовано у статичну, в якій світові лінії частинок тлумачаться як протяжні у часі струни. Практично обидві схеми можна реалізувати наближено: у першій вживаються квазірелятивістичні наближення [16], для другої розвинено метод розкладів за константою взаємодії [48]. Отриманий таким чином опис системи  $N$  точкових (безспінових) частинок будується на  $6N$ -вимірному фазовому просторі, як і в нерелятивістичній механіці, і переход до квантової механіки можна здійснити стандартним чином.

Обидві наближені схеми гамільтонізації мають певні недоліки та обмежену область застосування. У квазірелятивістичних наближеннях втрачається точна пуанкаре-інваріантність, і вони застосовні у випадках, коли релятивістичні ефекти є малими. Розклади за константою взаємодії загалом незастосовні до опису зв'язаних станів, особливо у системах із сильним зв'зком.

Інші можливості побудувати гамільтонів опис фоккерівських систем розвиваються в наступних розділах.

## РОЗДІЛ 2

# ЧАСО-АСИМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ ПОЛЬОВОГО ТИПУ

У прикладах попереднього розділу інтеграли дії типу Фоккера із часо-симетричними функціями Гріна ведуть до різницево-або інтегро-диференційних рівнянь руху. Це робить аналіз руху частинок винятково складним.

У двочастинковому випадку існує цікава можливість уникнути цих труднощів. Фоккер [35] припустив можливість, а пізніше Старушкевич [49], Рудд і Гілл [50], та Кюнзле [51] розглянули таку двочастинкову взаємодію: на першу частинку діє запізнене електромагнетне поле другої частинки, на яку діє випередне поле першої частинки. У такій моделі природно виникає взаємно-однозначна відповідність між точками світових ліній частинок, а саме, між точками, розділеними ізотропним інтервалом. Ця відповідність дозволяє звести інтеграл Фоккера до одно-часової Пуанкарє-інваріантної дії, тобто переформулювати модель у рамки лагранжевого, а далі й гамільтонового формалізму [51, 52], і врешті проінтегрувати модель стандартними методами [50, 51, 53].

Далі буде показано, що така ж взаємно-однозначна відповідність виникає і у фоккерівських інтегралах більш загального вигляду, а саме в тих інтегралах, підінтегральна функція яких містить запізнену чи випередну функцію Гріна рівняння Даламбера. Інтеграли дії такого вигляду породжують широкий клас двочастинкових моделей, які можна назвати (згідно з [53, 54]) *часо-асиметричними*. Більшість з них допускають теоретико-польову інтерпретацію взаємодії, і можуть мати фізичне застосування.

В підрозділі 2.2 будується явно коваріантні лагранжів та гамільтонів опи-

си часо-асиметричних моделей, що дозволять ефективно дослідити їх класичну динаміку моделей, а також, в підрозділі 2.3, здійснити квантування.

Результати цього розділу опубліковані в статтях [1–5, 8, 10], матеріалах і тезах конференцій [25, 27, 29, 32, 34], та препрінтах [170, 171, 174, 175].

## 2.1. Часо-асиметричні моделі та їх лагранжів і гамільтонів опис

Ізотропний інтервал між точками світових ліній частинок можна розглядати як твірну світлового конуса із центром на одній із цих ліній. У 2-вимірному просторі-часі світловий конус вироджується у світловий фронт, а опис часо-асиметричних моделей цілком укладається у спрощену 2-вимірну версію діраківської фронтальної форми динаміки [56]. Часо-асиметричні моделі у цьому випадку добре вивчені на кількох прикладах, як на класичному [49, 50, 54, 341], так і на квантовому [55, 57, 58] рівнях.

В більш реалістичному випадку 4-вимірного простору Мінковського  $\mathbb{M}_4$  динаміка часо-асиметричних моделей, особливо тих, що пов’язані із теорією поля, значно складніша. Фактично, модель Старушкевича-Рудда-Гілла (СРГ) із взаємодією типу електромагнетної – єдина часо-асиметрична модель, динаміка якої в 4-вимірному часо-просторі розглядалася до написання цієї дисертації. Побудова та вивчення інших моделей цього типу може бути цікавим для фізичних застосувань, і буде здійснено в розділах 2 і 3. В п. 2.1.1, 2.1.4 будуться моделі, що відповідають взаємодіям через полями вищих тензорних вимірностей (спінів), включно з гравітаційною ( в п. 2.1.5).

Для вивчення часо-асиметричних моделей Третяк (разом з автором дисертації) запропонував тривимірні лагранжів та гамільтонів описи, названі *ізотропною формою динаміки* [1]. Було розвинуто і явно коваріантну версію цих описів – *релятивістичну механіку на світловому конусі* [1, 3], що базується на діраківському формалізмі з в’язями [220]; див. п. 2.1.2-3

### 2.1.1. Модель Старушкевича-Рудда-Гілла та узагальнення

Розглянемо теоретико-польове походження моделі Старушкевича-Рудда-Гілла.

В силу лінійності рівнянь Максвела (1.3.4) або Даламбера (1.3.6) вони допускають *часо-асиметричний розв'язок*, породжений 2-ма точковими зарядами:

$$A^\mu = A_{1,-\eta}^\mu + A_{2,\eta}^\mu \equiv 4\pi[D_{-\eta} * J_1^\mu + D_\eta * J_2^\mu] \quad (2.1.1)$$

$$\text{тобто } = A_{1,\text{adv}}^\mu + A_{2,\text{ret}}^\mu \quad \text{для } \eta = 1,$$

$$\text{та } = A_{1,\text{ret}}^\mu + A_{2,\text{adv}}^\mu \quad \text{для } \eta = -1$$

Підстановка цього електромагнетного потенціалу у дію (1.3.9) з наступною її регуляризацією приводить до такої дії типу Фоккера:

$$I = I_{\text{free}} + I_{\text{int}}, \quad I_{\text{free}} = - \sum_{a=1}^2 m_a \int d\tau_a \sqrt{\dot{z}_a^2} \quad (2.1.2a)$$

$$I_{\text{int}}^{(\text{e})} = -q_1 q_2 \iint d\tau_1 d\tau_2 \dot{z}_1 \cdot \dot{z}_2 2\Theta(\eta z_{12}) \delta(z_{12}^2), \quad \eta = \pm 1 \quad (2.1.2b)$$

Взаємодія частинок у цьому разі має таку причинну структуру: випередне поле 1-ї частинки діє на 2-гу частинку, а запізнене поле 2-ї частинки діє на 1-шу; див. рис. 1.2e. Крім цього, знехтувано силами реакції випромінювання, яка у даному випадку мала б мати протилежні знаки для різних частинок.

Ідея часо-асиметричної дії (2.1.2) була вперше окреслена Фоккером [35], а пізніше опрацьована Старушкевичем [49], Руддом і Гіллом [50], а також Кюнзле [51]. Вона відрізняється від часо-симетричної дії Тетроде-Фоккера (1.3.22) запізненою чи випередною ф-єю Гріна (1.3.13)  $D_\pm(z_{12})$  замість симетричної  $D_{\text{sym}}(z_{12}) \equiv D_{\eta=0}(z_{12})$ . Ця різниця дозволила Старушкевичу переформулювати часо-асиметричну модель (2.1.2) в рамки лагранжевого формалізму [52].

У цій дисертації пропонується широкий клас часо-асиметричних моделей, що узагальнюють модель Старушкевича-Рудда-Гілла. Вони задаються інтегралом дії, що містить множник  $D_\eta(z_{12})$  і має вигляд:

$$I = I_{\text{free}} - 4\pi \iint d\tau_1 d\tau_2 \sqrt{\dot{z}_1^2} \sqrt{\dot{z}_2^2} f(z, u_1, u_2) D_\eta(z), \quad \eta = \pm 1, \quad (2.1.3)$$

де  $z \equiv z_{12}$ , а  $f(z, u_1, u_2)$  є довільною скалярною (і параметрично-інваріантною) функцією вказаних 4-векторних аргументів. Зручно мати свободу вибору запізненої ( $\eta = 1$ ) чи випередної ( $\eta = -1$ ) ф-ї Гріна (1.3.13) р-ня Даламбера. У кожному випадку підінтегральна функція  $\Phi$  фоккерівської дїї (2.1.3) не дорівнює нулеві за умови:

$$z^2 = 0, \quad \eta z^0 > 0, \quad \text{тобто} \quad \eta z^0 = |z|. \quad (2.1.4)$$

Цю умову можна тлумачити як рівняння минулого або майбутнього світлового конусу (залежно від значення  $\eta = \pm 1$  та вибору точки  $z_1$  чи  $z_2$  для вершини конусу), і називати *умовою світлового конусу*.

В силу (2.1.4) пуанкаре-інваріантна функція  $f(z, u_1, u_2)$  не містить міжчастинкового інтервалу  $z^2$ , і залежить від таких інваріантних аргументів:

$$u_1 \cdot u_2 > 0, \quad \eta u_a \cdot z > 0, \quad a = 1, 2$$

що є додатніми на часо-подібних світових лініях (тобто  $\dot{z}_a^2 > 0$ ).

Клас моделей, означених дією (2.1.3), є досить широкий. Він включає часо-асиметричні версії фоккерівських інтегралів (1.3.29), (1.3.30), що описують взаємодії за посередництвом безмасових тензорних полів.

В часо-асиметричних моделях (2.1.3) природно виникає взаємно-однозначна відповідність між точками світових ліній частинок – точками, що задовільняють умову світлового конусу (2.1.4); це видно з рис. 1.2e. Така відповідність і дозволяє перейти від фоккерівського формалізму до лагранжевого.

### 2.1.2. Одно-часовий лагранжів опис

Фоккерівська дія (2.1.3) є параметрично-інваріантною щодо кожного параметру  $\tau_1$  і  $\tau_2$ . Тому дві з 8-ми шуканих функцій  $x_1^\mu(\tau_1)$ ,  $x_2^\mu(\tau_2)$  залишаються невизначеними в рамках варіаційної задачі. Структура дїї (2.1.3) дозволяє частково зафіксувати цю функційну довільність природнім чином. Для цього вимагатимемо, щоб умова (2.1.4) була тотожністю, якщо  $\tau_1 = \tau_2$ . Це означає, по-перше, що обидві світові лінії параметризовані спільним параметром, скажімо  $\tau_1$ ; по-друге,

що встановлено відношення одночасності для точок світових ліній [5, 258]. Таку параметризацію можна природньо назвати *одно-часовим описом на світловому конусі*. Згідно з роботою Старушкевича [52], функцію Гріна  $D_\eta$  у другому члені дії (2.1.3) можна записати так:

$$\begin{aligned} 4\pi D_\eta(z_{12}) &\equiv 2 \Theta \left[ \eta \left( z_1^0(\tau_1) - z_2^0(\tau_2) \right) \right] \delta \left[ \left( z_1(\tau_1) - z_2(\tau_2) \right)^2 \right] \\ &= \frac{\delta(\tau_1 - \tau_2)}{\left| \dot{z}_2(\tau_2) \cdot (z_1(\tau_1) - z_2(\tau_2)) \right|}. \end{aligned}$$

Явно інтегруючи цей член за  $\tau_2$  можна звести функціонал (2.1.3) до одно-часової дії:

$$I = \int d\tau \tilde{L}$$

з лагранжіаном  $\tilde{L} \equiv L|_{T\mathbb{K}}$ , де

$$L \equiv - \sum_{a=1}^2 m_a \sqrt{\dot{z}_a^2} - \sqrt{\dot{z}_1^2} \sqrt{\dot{z}_2^2} \frac{f(z, u_1, u_2)}{|\dot{z}_2 \cdot z|}. \quad (2.1.5)$$

Лагранжіан  $\tilde{L}$  означено на дотичній в'язці  $T\mathbb{K}$  7-вимірного конфігураційного моноговиду  $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}_4^2 \equiv \mathbb{M}_4 \times \mathbb{M}_4$  заданого умовою світлового конусу (2.1.4). Відповідна варіаційна задача приводить до звичайних диференційних рівнянь 2-го порядку, що уможливлює перехід до гамільтонового опису.

Зручніше працювати з 8-вимірним конфігураційним простором  $\mathbb{M}_4^2$  замість 7-вимірного  $\mathbb{K}$ . З цією метою задачу на безумовний екстремум можна переформулювати в задачу на умовний екстремум дії

$$I' = \int d\tau (L + \lambda z^2) \quad (2.1.6)$$

з лагранжіаном (2.1.5), означеним на  $T\mathbb{M}_4^2$ . Тут введено лагранжевий множник  $\lambda$  для того, щоб врахувати умову (2.1.4) як голономну в'язь (маємо на увазі також умову  $\eta z^0 > 0$ ).

Для побудови гамільтонового опису як подальшої мети, зручно представити лагранжіан (2.1.5) в іншій формі. Введемо колективні змінні

$$y^\mu \equiv \tfrac{1}{2}(z_1^\mu + z_2^\mu), \quad z^\mu \equiv z_1^\mu - z_2^\mu \quad (2.1.7)$$

(зовнішні та внутрішні відповідно) в термінах яких

$$z_a^\mu = y^\mu + \frac{1}{2}(-)^{\bar{a}} z^\mu, \quad a = 1, 2, \quad \bar{a} = 3 - a. \quad (2.1.8)$$

Із врахуванням диференційного наслідку в'язі (2.1.4):

$$\dot{z} \cdot z = 0, \quad (2.1.9)$$

введено далі функцію  $\theta$  (додатню на часо-подібних світових лініях) можна записати по-різному:

$$\theta \equiv \eta \dot{y} \cdot z = \eta \dot{z}_1 \cdot z = \eta \dot{z}_2 \cdot z > 0. \quad (2.1.10)$$

Тоді лагранжіан (2.1.5) набуває такого вигляду:

$$L = \theta F(\sigma_1, \sigma_2, \delta), \quad (2.1.11)$$

$$F \equiv - \sum_{a=1}^2 m_a \sigma_a - \sigma_1 \sigma_2 f(\sigma_1, \sigma_2, \omega), \quad (2.1.12)$$

де член взаємодії  $f$ , а тому і увесь вираз  $F$  є довільною функцією аргументів:

$$\begin{aligned} \sigma_a &\equiv \sqrt{\dot{x}_a^2} / \theta = \sqrt{\dot{y}^2 + (-)^{\bar{a}} \dot{y} \cdot \dot{x} + \frac{1}{4} \dot{x}^2} / \theta, & a = 1, 2, \\ \delta &\equiv \sigma_1 \sigma_2 \omega = \dot{z}_1 \cdot \dot{z}_2 / \theta^2 = (\dot{y}^2 - \frac{1}{4} \dot{x}^2) / \theta^2. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Пуанкаре-інваріантність лагранжіану (2.1.11) і в'язі (2.1.4) породжує 10 нетериних інтегралів руху – повний імпульс  $P_\mu$  системи та тензор моменту імпульсу  $J_{\mu\nu}$ :

$$P_\mu = \sum_{a=1}^2 p_{a\mu}, \quad (2.1.14)$$

$$J_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^2 (x_{a\mu} p_{a\nu} - x_{a\nu} p_{a\mu}) = y_\mu P_\nu - y_\nu P_\mu + \Omega_{\mu\nu}, \quad (2.1.15)$$

де

$$p_{a\mu} = \partial L / \partial \dot{x}_a^\mu, \quad a = 1, 2, \quad (2.1.16)$$

$$\Omega_{\mu\nu} \equiv z_\mu p_\nu - z_\nu p_\mu, \quad (2.1.17)$$

а  $p_\mu = \frac{1}{2}(p_{1\mu} - p_{2\mu})$ . Крім цього, лагранжіан (2.1.11) задовольняє тотожність:

$$\sum_{a=1}^2 \dot{z}_a \cdot p_a - L \equiv \dot{y} \cdot P + \dot{z} \cdot w - L = 0, \quad (2.1.18)$$

що є наслідком параметричної інваріантності дії (2.1.6).

### 2.1.3. Канонічний формалізм з в'язями

Лагранжів опис на конфігураційному просторі  $\mathbb{M}_4^2$  допускає природній перехід до гамільтонового формалізму з в'язями [220]. Відповідний 16-вимірний фазовий простір  $T^*\mathbb{M}_4^2$  оснащений дужками Пуасона  $\{\dots, \dots\}$ . Вони мають стандартний вигляд в термінах коваріантних координат  $z_a^\mu$  та спряжених імпульсів  $p_{a\mu}$ , означених рівностями (2.1.16):

$$\{z_a^\mu, z_b^\nu\} = 0, \quad \{p_{a\mu}, p_{b\nu}\} = 0, \quad \{z_a^\mu, p_{b\nu}\} = \delta_{ab}\delta_\nu^\mu.$$

Десять нетериних інтегралів руху (2.1.14)–(2.1.15) стають в рамках гамільтонового опису генераторами  $P_\mu$  і  $J_{\mu\nu}$  канонічної реалізації групи Пуанкаре, тобто задовольняють канонічні співвідношення алгебри Пуанкаре:

$$\begin{aligned} \{P_\mu, P_\nu\} &= 0, & \{P_\mu, J_{\lambda\sigma}\} &= -\eta_{\mu\lambda}P_\sigma + \eta_{\mu\sigma}P_\lambda, \\ \{J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}\} &= \eta_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma}. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

В силу параметричної інваріантності дії (2.1.6) лагранжіан (2.1.5) (або (2.1.11)–(2.1.12)) задовольняє тотожність (2.1.18), тобто є сингулярним. Тому канонічний гамільтоніан рівний нулеві, тоді як динаміка системи визначається *динамічною* в'яззю такого загального вигляду:

$$\phi(P^2, p_\perp^2, P \cdot z, p_\perp \cdot z) = 0, \quad (2.1.20)$$

що з'являється разом з голономною в'яззю (2.1.4); тут

$$p_{\perp\mu} \equiv P^\nu\Omega_{\nu\mu}/P \cdot z = p_\mu - z_\mu P \cdot p/P \cdot z \quad (P \cdot p_\perp \equiv 0).$$

Обидві в'язі є 1-го класу, тобто

$$[\phi, z^2] \approx 0, \quad (2.1.21)$$

і вони цілком визначають динаміку системи в  $\mathbb{M}_4$  (тобто світові лінії частинок).

Нижче описано – як для даної ф-ї  $f$  у фоккерівській дії (2.1.3), або для  $F$  у лагранжіані (2.1.11)–(2.1.12) отримати відповідний конкретний вигляд динамічної в'язі (2.1.20).

Перш за все, отримаємо систему рівнянь для шуканих швидкостей частинок:

$$\begin{aligned} P_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^\mu} &= \left( \frac{F'_1}{\sigma_1} + \frac{F'_2}{\sigma_2} + 2F'_\delta \right) \frac{\dot{y}_\mu}{\theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{F'_1}{\sigma_1} - \frac{F'_2}{\sigma_2} \right) \frac{\dot{z}_\mu}{\theta} \\ &\quad + (F - \sigma_1 F'_1 - \sigma_2 F'_2 - 2\delta F'_\delta) \eta z_\mu, \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\mu} = \frac{1}{2} \left( \frac{F'_1}{\sigma_1} - \frac{F'_2}{\sigma_2} \right) \frac{\dot{y}_\mu}{\theta} + \frac{1}{4} \left( \frac{F'_1}{\sigma_1} + \frac{F'_2}{\sigma_2} - 2F'_\delta \right) \frac{\dot{z}_\mu}{\theta}; \quad (2.1.23)$$

де  $F'_a \equiv \partial F / \partial \sigma_a$  ( $a = 1, 2$ ),  $F'_\delta \equiv \partial F / \partial \delta$ , а ф-я  $F(\sigma_1, \sigma_2, \delta)$  означена в р-нях. (2.1.12), (2.1.13). В загальному випадку дефект рангу цієї системи рівний 1 (як наслідок параметричної інваріантності опису). Щоб отримати динамічну в'язь у бажаному вигляді (2.1.20) необхідно зменшити ранг системи (2.1.22)–(2.1.23) на 1. Це можливо завдяки голономності в'язі (2.1.4). Дійсно, її диференційний наслідок (2.1.9) дає додаткове співвідношення для швидкостей, яке можна врахувати в п.ч. р-нь (2.1.22)–(2.1.23). Після цього легко бачити, що 4 аргументи ф-ї  $\phi$ , зазначені у рівності (2.1.20), можна виразити через 3 незалежні ф-ї  $\sigma_1, \sigma_2, \delta$  (2.1.13) координат і швидкостей. Зокрема,

$$P \cdot z = \eta \left( \frac{F'_1}{\sigma_1} + \frac{F'_2}{\sigma_2} + 2F'_\delta \right), \quad (2.1.24)$$

$$p_{\perp} \cdot z = \frac{\eta}{2} \left( \frac{F'_1}{\sigma_1} - \frac{F'_2}{\sigma_2} \right), \quad (2.1.25)$$

$$\begin{aligned} P^2 &= \sum_{a=1}^2 \left( \frac{F'_a}{\sigma_a} + F'_\delta \right)^2 \sigma_a^2 + 2 \left( \frac{F'_1}{\sigma_1} + F'_\delta \right) \left( \frac{F'_2}{\sigma_2} + F'_\delta \right) \delta \\ &\quad + 2 \left( \frac{F'_1}{\sigma_1} + \frac{F'_2}{\sigma_2} + 2F'_\delta \right) (F - \sigma_1 F'_1 - \sigma_2 F'_2 - 2\delta F'_\delta), \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

тоді як остання величина  $p_{\perp}^2$  задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned} p_{\perp}^2 + \frac{(p_{\perp} \cdot z)^2 P^2}{(P \cdot z)^2} &+ \frac{1}{\eta P \cdot z} \left( \frac{F'_1 F'_2}{\sigma_1 \sigma_2} - F'_\delta^2 \right) \\ &\times \left( \frac{P^2}{\eta P \cdot z} - 2F + \sigma_1 F'_1 + \sigma_2 F'_2 + 2\delta F'_\delta \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Шляхом вилучення  $\sigma_1, \sigma_2, \delta$  з системи р-нь (2.1.24)–(2.1.27) можна отримати динамічну в'язь у формі (2.1.20).

Можливість побудови динамічної в'язі (2.1.20) явно залежить від того, наскільки успішно можна вилучити величини  $\sigma_1, \sigma_2, \delta$  із співвідношень (2.1.24)–(2.1.27). Наприклад, якщо система р-нь (2.1.24)–(2.1.27) допускає існування додатнього розв'язку для  $\sigma_1, \sigma_2, \delta$  в термінах  $P \cdot z, p_{\perp} \cdot z, P^2$ , то їх підстановка у л.ч. (2.1.27) дає шукану динамічну в'язь. В деяких моделях величина  $\delta$  випадає з р-нь (2.1.24)–(2.1.25) і (2.1.27). Тоді потрібно лише розв'язати р-ня (2.1.24) і (2.1.25) відносно  $\sigma_1, \sigma_2$ , що спрощує побудову динамічної в'язі. Приклади таких моделей, що відповідають взаємодіям тензорного типу, будуть розгляdatися далі.

#### 2.1.4. Часо-асиметричні моделі з польовими взаємодіями

Фоккерівська дія (2.1.3) описує дуже широкий клас часо-асиметричних моделей, динаміка яких залежить від вигляду пуанкарє-інваріантної ф-ї  $f(z_{12}, u_1, u_2)$ . Особливий фізичний інтерес викликає вибір

$$f(z_{12}, u_1, u_2) = f(u_1 \cdot u_2) \equiv f(\omega).$$

Якщо  $f(\omega)$  є поліноміальною (або аналітичною) функцією, її можна розкласти за многочленами Чебишева:

$$f(\omega) = \sum_s \alpha_s T_s(\omega) \quad (2.1.28)$$

Кожен (скажімо,  $s$ -й) член цієї суми можна тлумачити як внесок відповідної часо-асиметричної версії взаємодії, що переноситься безмасовим лінійним тензорним полем рангу  $s$ , з парціальною константою взаємодії  $\alpha_s$  ( $= g_1 g_2$ ); див. п. 1.3.3 та поклики [17, 38].

Перехід до явно коваріантного канонічного формалізму з в'язями веде до динамічної в'язі (2.1.20), що визначає гамільтонову динаміку моделі. У даному випадку її можна представити так: [1, 3]:

$$\phi(P^2, p_\perp^2, P \cdot z, p_\perp \cdot z) \equiv \phi_{\text{free}} + \phi_{\text{int}} = 0, \quad (2.1.29)$$

де функція

$$\phi_{\text{free}} = \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2) \frac{p_\perp \cdot z}{P \cdot z} + p_\perp^2 \quad (2.1.30)$$

відповідає вільночастинковій системі, а  $\phi_{\text{int}}$  описує взаємодію. У випадку довільної ф-ї  $f(\omega)$  її можна записати так:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{int}} = & - \frac{2m_1 m_2}{\eta P \cdot z} (f - (\omega - \lambda) f') \\ & - \frac{m_1^2 b_2 + m_2^2 b_1 - (m_1^2 + m_2^2) f' + 2m_1 m_2 (f - \omega f')}{\eta P \cdot z ((b_1 - f')(b_2 - f') - (f - \omega f')^2)} \\ & \times ((f - \omega f')^2 - f'^2), \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

де

$$\lambda \equiv \frac{P^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1 m_2}, \quad (2.1.32)$$

$$b_a \equiv \eta \left( \frac{1}{2} P \cdot z + (-)^{\bar{a}} p_\perp \cdot z \right), \quad a = 1, 2, \quad \bar{a} \equiv 3 - a, \quad (2.1.33)$$

$f'(\omega) \equiv df(\omega)/d\omega$ , а  $\omega$  пов'язана з канонічними змінними системою рівнянь:

$$(b_a - f')\sigma_a - (f - \omega f')\sigma_{\bar{a}} = m_a, \quad a = 1, 2, \quad \bar{a} \equiv 3 - a, \quad (2.1.34)$$

$$b_1^2\sigma_1^2 + b_2^2\sigma_2^2 + 2(b_1 b_2 \omega - \eta P \cdot z f)\sigma_1\sigma_2 = P^2. \quad (2.1.35)$$

Рівняння (2.1.34), лінійні щодо  $\sigma_a$ , дозволяють виразити  $\sigma_a$  через  $b_a$  та  $\omega$ ,

$$\sigma_a = \frac{(b_{\bar{a}} - f')m_a + (f - \omega f')m_{\bar{a}}}{(b_1 - f')(b_2 - f') - (f - \omega f')^2}. \quad (2.1.36)$$

Підстановка (2.1.36) в (2.1.35) дає для  $\omega$  рівняння, громіздка форма якого становить основну перешкоду гамільтонізації даної загальної моделі.

В особливому випадку

$$f(\omega) = \alpha_0 + \alpha_1\omega, \quad (2.1.37)$$

що відповідає довільній суперпозиції скалярної та векторної взаємодії з константами зв'язку  $\alpha_0$  і  $\alpha_1$  відповідно,  $\omega$  випадає з п.ч. р-ня (2.1.31). Це дозволяє одразу отримати динамічну зв'язь:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{free}} & - \frac{2m_1m_2}{\eta P \cdot z}(\alpha_0 + \alpha_1\lambda) \\ & - \frac{m_1^2(b_2 - \alpha_1) + m_2^2(b_1 - \alpha_1) + 2m_1m_2\alpha_0}{\eta P \cdot z((b_1 - \alpha_1)(b_2 - \alpha_1) - \alpha_0^2)}(\alpha_0^2 - \alpha_1^2) \\ & = 0. \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

В усіх інших випадках  $\phi_{\text{int}}$  істотно залежить від величини  $\omega$  яку, однак, не можна виразити явно через канонічні змінні.

Щоб обійти цю складність, застосуємо розклад у ряд за ступенями константи зв'язку.

З цього місця припускаємо, що ф-я  $f(\omega)$  є 1-го порядку за константою зв'язку  $\alpha$ , яку вважатимемо малою, тобто,  $f(\omega) \sim O(\alpha)$ . Тоді  $\omega$  можна вилучити з л.ч. р-ня (2.1.31), вживаючи метод послідовних наближень. Тут отримаємо наближення 2-го порядку за  $\alpha$ .

Для вільночастинкового випадку, що відповідає 0-му наближенню ( $f = 0$ ), розв'язок  $\overset{0}{\sigma}_a$ ,  $\overset{0}{\omega}$  системи р-нь (2.1.35)-(2.1.36) такий:

$$\overset{0}{\sigma}_a = m_a/b_a, \quad \overset{0}{\omega} = \lambda. \quad (2.1.39)$$

Покладімо  $\omega = \overset{0}{\omega} + \delta\omega$ , де  $\delta\omega \sim O(\alpha)$ , і обчислимо п.ч. р-ня (2.1.31) з точністю до  $\alpha^2$ . Перший член містить вираз у дужках  $\sim O(\alpha)$ , який можна спростити:

$$f(\omega) - (\omega - \lambda)f'(\omega) = f(\lambda + \delta\omega) - \delta\omega f'(\lambda + \delta\omega) \approx f(\lambda) + O(\alpha^3).$$

Другий член  $\sim O(\alpha^2)$  дорівнює у цьому наближенні головному внеску його розкладу в ряд за  $\alpha$ . Тому

$$\phi_{\text{int}} = -\frac{2m_1m_2}{\eta P \cdot z} f(\lambda) - \frac{h(\lambda)}{\eta P \cdot z} \left( \frac{m_1^2}{b_1} + \frac{m_2^2}{b_2} \right) + O(\alpha^3), \quad (2.1.40)$$

де

$$h(\lambda) \equiv [f(\lambda) - \lambda f'(\lambda)]^2 - [f'(\lambda)]^2 \sim O(\alpha^2). \quad (2.1.41)$$

Отже, для часо-асиметричної моделі із взаємодією через лінійні безмасові тензорні поля довільного рангу (та їх суперпозиціями) отримано її явно коваріантний гамільтонів опис з точністю до  $\alpha^2$ . Подібно можна тлумачити випадок гравітаційної взаємодії в лінійному наближенні за  $\gamma$ . Але гамільтонова версія такої часо-асиметричної гравітаційної моделі має сенс лише у цьому наближенні. Тому член 2-го порядку в п.ч. р-ня (2.1.40) не є інформативним для цього випадку. Як основу для 2-го наближення можна взяти фоккерівську дію з гравітаційною взаємодією у 2-му наближенні, що розглядалася в підрозділі 1.3.4.

## 2.1.5. Часо-асиметрична модель з гравітаційною взаємодією

Зручно почати з часо-просторової форми дії ВТ (1.3.32), (1.3.33), (1.3.38).

Введемо часо-асиметричний "гравітаційний потенціал" 2-х частинок:

$$\underset{\sim}{h}_{\mu\nu}(x) = \sum_{a=1}^2 \underset{\sim}{h}_{a\mu\nu}(x) = -16\pi \sum_{a=1}^2 \int d^4x' D_{a\mu\nu}^{\lambda\sigma}(x - x') \overset{0}{T}_{a\lambda\sigma}(x')$$

де

$$D_{a\mu\nu}^{\lambda\sigma}(x) \equiv \Delta_{\mu\nu}^{\lambda\sigma} D_a(x), \quad a = 1, 2$$

$$D_2(x) = D_1(-x) = D_\eta(x), \quad \eta = \pm 1$$

Підставимо цей потенціал в п.ч. р-ня (1.3.33), та після регуляризації отримаємо член фоккерівської дії 1-го порядку:

$$\overset{1}{\underset{\sim}{W}} = 4\pi m_1 m_2 \iint ds_1 ds_2 (2\omega_{12}^2 - 1) D_\eta(z_{12}). \quad (2.1.42)$$

Для члену 2-го порядку необхідний часо-асиметричний відповідник поправки до тензору енергії-імпульсу  $\overset{1}{\underset{\sim}{T}}^{\mu\nu}(x)$ .

Згідно з ранньою версією підходу ВТ для  $\overset{1}{\underset{\sim}{T}}^{\mu\nu}(x)$  обираємо поправку 1-го порядку до вільночастинкового тензору енергії-імпульсу відносно метрики 1-го порядку  $\overset{1}{\underset{\sim}{g}}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma \overset{1}{\underset{\sim}{h}}_{\mu\nu}$ . Тоді підстановка  $\overset{1}{\underset{\sim}{T}}^{\mu\nu}(x)$  і  $\overset{1}{\underset{\sim}{h}}_{\mu\nu}(x)$  в п.ч. р-ня (1.3.38) та нехтування розбіжних членів дає:

$$\begin{aligned} \overset{2}{\underset{\sim}{W}}_I &= \frac{1}{2}(4\pi)^2 m_1 m_2 \iint ds_1 ds_2 \left\{ m_1 \int ds_{1'} (2\omega_{1'2}^2 - 3) D_\eta(z_{1'2}) \right. \\ &\quad \left. + m_2 \int ds_{2'} (2\omega_{12'}^2 - 3) D_\eta(z_{12'}) \right\} (2\omega_{12}^2 - 1) D_\eta(z_{12}). \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

У пізнішій версії підходу ВТ:

$$\overset{1}{\underset{\sim}{T}}^{\mu\nu}(x) = -2\delta \overset{1}{\underset{\sim}{W}} / \delta g_{\mu\nu}(x) \Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}}. \quad (2.1.44)$$

У цьому місці можна використати неоднозначність п.ч. р-ня (2.1.44) для того, щоб спростити модель. Підставимо тут регуляризований вираз для  $\overset{1}{\underset{\sim}{W}}$ . Це приводить до такаго члену 2-го порядку:

$$\begin{aligned} \overset{2}{\underset{\sim}{W}}_{II} &= \overset{2}{\underset{\sim}{W}}'_{II} = \frac{1}{2}(4\pi)^2 m_1 m_2 \iint ds_1 ds_2 \left\{ m_1 \int ds_{1'} (4\omega_{12}^2 \omega_{1'2}^2 \right. \\ &\quad \left. - 8\omega_{12}\omega_{1'2}\omega_{1'1} + 2\omega_{12}^2 + 2\omega_{1'2}^2 - 1) D_\eta(z_{1'2}) \right. \\ &\quad \left. + m_2 \int ds_{2'} (4\omega_{12}^2 \omega_{12'}^2 - 8\omega_{12}\omega_{12'}\omega_{22'} \right. \\ &\quad \left. + 2\omega_{12}^2 + 2\omega_{12'}^2 - 1) D_\eta(z_{12'}) \right\} D_\eta(z_{12}), \end{aligned} \quad (2.1.45)$$

тоді як  $\tilde{W}_{II}''^2$  не виникає. Вживання нерегуляризованого  $\tilde{W}^1$  приводить до появи  $\tilde{W}_{II}''^2$ , але відповідну дію 2-го порядку не можна просто звести до лагранжевої форми. Варто відзначити, що як часо-симетричний, так і часо-асиметричний член 2-го порядку  $\tilde{W}_{II}''^2$  не дають внеску в лагранжіан Фіхтенгольца [342].

Отже маємо дві версії часо-асиметричної дії двох частинок з гравітаційною взаємодією в 2-му наближенні, які назовемо моделями I та II. Обидві допускають обмежену фізичну інтерпретацію згідно з вимогою i'). Дійсно, після нехтування тих членів отриманої дії, що не містять змінних  $a$ -ї частинки, і квадратичних щодо  $m_a$  отримаємо дію, що веде до рівнянь руху  $a$ -ї частинки як пробної. В обидвох моделях цю дію можна представити так:

$$I_a \approx -m_a \int ds_a \sqrt{g_{\bar{a}\mu\nu}(z_a) u_a^\mu u_a^\nu} + O(\gamma^3), \quad a = 1, 2, \quad \bar{a} = 3 - a \quad (2.1.46)$$

де

$$g_{\bar{a}\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma \tilde{h}_{\bar{a}\mu\nu} - \frac{1}{4} \gamma^2 \tilde{h}_{\bar{a}\mu\nu} \tilde{h}_{\bar{a}\lambda}^\lambda$$

для моделі I, і

$$g_{\bar{a}\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma \tilde{h}_{\bar{a}\mu\nu} + \frac{1}{2} \gamma^2 \tilde{h}_{\bar{a}\mu\lambda} \tilde{h}_{\bar{a}\nu}^\lambda$$

для моделі II. Оскільки  $g_{\bar{a}\mu\nu}(x)$  не залежить від змінних  $a$ -ї частинки, р-ня руху для неї, що випливають з дії (2.1.46), є геодезичними.

Структура потрійних інтегралів дії 2-го порядку (2.1.43) and (2.1.45) дозволяє (подібно до випадку лінійних полів) переформулювати опис цих моделей в рамки гамільтонового формалізму. Відповідні лагранжіани мають вигляд (2.1.11)-(2.1.12) де, обнак, функції  $f_I$  and  $f_{II}$  (для моделей I та II відповідно) залежать також від  $\sigma_a$ :

$$\begin{aligned} f_I(\sigma_1, \sigma_2, \omega) = & -\gamma m_1 m_2 (2\omega^2 - 1) \\ & \times \left\{ 1 + \frac{\gamma}{2} (2\omega^2 - 3)(m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2) \right\}, \end{aligned} \quad (2.1.47)$$

$$\begin{aligned} f_{II}(\sigma_1, \sigma_2, \omega) = & -\gamma m_1 m_2 \\ & \times \left\{ 2\omega^2 - 1 + \frac{\gamma}{2} (4\omega^4 - 4\omega^2 - 1)(m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.48)$$

Далі перейдемо до гамільтонового опису і отримаємо динамічну в'язь з точністю до  $\gamma^2$ . Оскільки  $\sigma_a$ -залежність ф-ї  $f_I$  (2.1.47) з'являється лише у членах

лише 2-го порядку, то безпосередня підстановка  $f_I(\overset{\circ}{\sigma}_1, \overset{\circ}{\sigma}_2, \overset{\circ}{\omega})$  виразів (2.1.39) у формули (2.1.47)-(2.1.48) є коректною. Теж стосується і  $f_{II}$ . Після нехтування членами вищого порядку виявляється, що внесок 2-го порядку в 1-й член виразу (2.1.40) подібний (з точністю до  $\lambda$ -залежного множника) 2-го члену, тому обидва можна об'єднати. Остаточна функція  $\phi_{int}$  для гравітаційної взаємодії має вигляд (2.1.40), де

$$f_g(\lambda) = -\gamma m_1 m_2 (2\lambda^2 - 1), \quad (2.1.49)$$

і

$$h_{gI}(\lambda) = -2(\gamma m_1 m_2)^2 (2\lambda^2 + 1), \quad (2.1.50)$$

$$h_{gII}(\lambda) = -2(\gamma m_1 m_2)^2 (4\lambda^2 - 1) \quad (2.1.51)$$

для моделей I та II відповідно.

Істотно, що динамічна в'язь (2.1.29)-(2.1.30), (2.1.40) має спільну структуру як для лінійно-польової, так і гравітаційної взаємодій. Вона конкретизує взаємодію вибором функцій  $f(\lambda)$  та  $h(\lambda)$ , що залежать лише від інтегралу руху  $\lambda$ . Цей факт дозволяє розв'язувати двочастинкову задачу з  $f$  та  $h$  як довільними ф-ями 1-го та 2-го порядків – аж до аналізу кінцевих виразів.

## 2.1.6. Перехід до тривимірного гамільтонового опису

Система, визначена парою в'язей 1-го класу (2.1.4), (2.1.20) на 16-вимірному фазовому просторі  $T^*\mathbb{M}_4^2$ , має 6 ступенів вільності. Щоб виділити їх явно, необхідна пара додаткових *калібрувальних* в'язей [247, 343]. Їх можна задати в загальному вигляді:

$$\chi(y, z, P, p_\perp, t) = 0, \quad \{\chi, \phi\} \neq 0, \quad \partial\chi/\partial t \neq 0; \quad (2.1.52)$$

$$\psi(y, z, P, p) = 0, \quad \{\psi, z^2\} \neq 0. \quad (2.1.53)$$

Повна система в'язей (2.1.4), (2.1.20), (2.1.52), (2.1.53) є 2-го класу. Вони дозволяють вилучити зайні часо-подібні координати  $x_a^0$  та спряжені імпульси  $p_{a0}$ , і так перейти до опису на ефективному 12-вимірному фазовому просторі  $\mathbb{P}$ .

Калібрувальні в'язі не впливають на фізичну динаміку моделі, але їх вибір визначає специфіку кінцевого опису, а саме: редуктований фазовий простір  $\mathbb{P}$  (як

підмноговид вихідної кодотичної в'язки  $T^*\mathbb{M}_4^2$ , індуковані на ньому невироджені дужки Пуасона  $\{\dots, \dots\}$  (як означені в  $T^*\mathbb{M}_4^2$  і редуковані на  $\mathbb{P}$  дужки Дірака  $\{\dots, \dots\}^*$  [220, 327]), та можливий вибір змінних, в термінах яких дужки Пуасона набувають канонічного вигляду.

Свобода вибору калібрувальних в'язей є ефективним важелем для побудови зручного редукованого опису систем з в'язями. Для цього можна скористатися методом Шанмугадхасана [343], тобто здійснити у вихідному фазовому просторі канонічне перетворення, що зводить в'язі до канонічного вигляду. Це значить, що принаймні одна з кожної пари в'язей 2-го класу означає занулення тієї нової змінної, яку треба вилучити. Решта нових змінних параметризують простір  $\mathbb{P}$  належно, тобто вони є канонічними щодо дужок Пуасона  $\{\dots, \dots\}$ .

Частковий вибір  $\chi(y, z, P_0, \tau) = 0$  в'язі (2.1.52) дозволяє обійти відому *теорему про невзаємодію* [344], тобто, перейти до такого тривимірного гамільтонового опису часо-асиметричних моделей, в якому просторові коваріантні координати частинок  $z_a^i$  ( $a = 1, 2$ ;  $i = 1, 2, 3$ ) стають канонічними змінними.

Такий опис був би привабливим у кількох аспектах. Зокрема, він спрощує введення взаємодії системи із зовнішнім полем і допускає коваріантно-координатне представлення на квантово-механічному рівні. Але опис у коваріантних канонічних змінних не є зручним для розв'язання двочастинкової задачі, оскільки не забезпечує відповідного розділення на зовнішні та внутрішні ступені вільності.

Справді, з рівнянь руху зовнішніх коваріантних змінних  $y^\mu$  (2.1.7):

$$\dot{y}^\mu \sim \{y^\mu, \phi\} = \partial\phi/\partial P_\mu$$

випливає складна еволюція системи як цілого, обумовлена загальною структурою ф-ї  $\phi$  (2.1.20), що включає взаємодію частинок. Бажано б замість  $y^\mu$  мати змінні  $Q^\mu$ , що описували б рух системи як вільної частинки з 4-імпульсом  $P_\mu$ , тобто  $\dot{Q}^\mu \sim P^\mu$ . Такі змінні можна ввести шляхом допоміжного канонічного перетворення в  $T^*\mathbb{M}_4^2$ :

$$(y^\mu, P_\mu, z^\mu, p_\mu) \mapsto (Q^\mu, P_\mu, r^\mu, \varpi_\mu)$$

що не змінює 4-імпульс  $P_\mu$  системи та зводить залежність ф-ї  $\phi$  від нових зовнішніх

змінних лише через  $P^2$ .

Явний вигляд такого перетворення подано в [3]. Тут лише зазначимо, що воно переводить 4-вектор відносного положення у систему відліку центра мас:  $z^\mu \mapsto r^\mu = \Lambda^\mu_\nu z^\nu$  (це ж і для спряженого імпульсу  $p_m u$ ) з допомогою матриці Лоренца  $\|\Lambda(P/|P|)^\nu_\mu\| \in \text{SO}(1, 3)$  яка, отже, задовольняє рівність  $\Lambda^\mu_\nu P^\nu = \delta_0^\mu |P|$ . Ця умова фіксує  $\Lambda$  з точністю до довільної матриці просторового повороту (залежної від  $P$ ). Упускаючи деталі зазначимо наперед, що така довільність дозволяє отримувати, як результат редукції, різні гамільтонові форми релятивістичної динаміки (див. розділ 1.1.7 а також [20, 247]).

Кінцеве у процедурі редукції перетворення Шанмугадхасана (див. [3])

$$(Q^0, Q^i, P_0, P_i, r^0, r^i, \varpi_0, \varpi_i) \mapsto (\bar{Q}^0, Q^i, P_0, P_i, \bar{r}^0, r^i, \varpi_0, k_i)$$

надає в'язі світлового конусу (2.1.4) канонічного вигляду  $\bar{r}^0 \equiv r^0 - \eta |\mathbf{r}| = 0$ , і фіксує неозначений дотепер параметр еволюції  $t$  шляхом такої конкретизації калібрувальної в'язі (2.1.52):

$$\bar{Q}^0 \equiv y^0 + \text{tr}(\Lambda \Omega \partial \Lambda^T / \partial P_0) - t = 0; \quad (2.1.54)$$

тут  $\Omega$  означено в (2.1.17). Якщо обрати  $\Lambda$  як чистий буст, тобто

$$\|\Lambda^\mu_\nu\| = \begin{vmatrix} \frac{P_0}{|P|} & \frac{P_j}{|P|} \\ \hline \frac{P_i}{|P|} \delta_{ij} + \frac{P_i P_j}{|P|(|P|+P_0)} & \end{vmatrix}, \quad (2.1.55)$$

то отримаємо остаточний опис в рамках моделі Бакамджіана-Томаса (БТ), тобто в миттєвій формі динаміки, сформульованій на 12-вимірному фазовому просторі  $\mathbb{P}$  у термінах колективних канонічних змінних типу ЦМ – зовнішніх  $Q^i$ ,  $P_i$  та внутрішніх  $r^i$ ,  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Динаміка моделі у цьому описі задана 10-ма добре відомими генераторами групи Пуанкаре [18]

$$\begin{aligned} H = P_0 &= \sqrt{M^2 + \mathbf{P}^2}, \quad P_i, \\ J_i &= \varepsilon_{ij}^k Q^j P_k + S_i, \\ K_i &= -t P_i + Q_i H + \frac{(\mathbf{P} \times \mathbf{S})_i}{M + H}. \end{aligned} \quad (2.1.56)$$

Тут  $\mathbf{S} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{k}$  – повний спін (внутрішній момент імпульсу) системи, а  $M(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  є повною масою системи – скалярною функцією внутрішніх змінних. У нашому випадку вона означена *масовим рівнянням системи*:

$$\phi(M^2, -\mathbf{k}^2, \eta Mr, -\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) = 0, \quad (2.1.57)$$

яке можна отримати з динамічної в'язі шляхом такої заміни аргументів у л.ч. (2.1.20):  $P^2 \rightarrow M^2$ ,  $p_\perp^2 \rightarrow -\mathbf{k}^2$ ,  $P \cdot z \rightarrow \eta Mr$ ,  $p_\perp \cdot z \rightarrow -\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  ( $r \equiv |\mathbf{r}|$ ).

Окрім канонічної реалізації алгебри Пуанкаре (2.1.56), запропонована тут схема редукції дозволяє отримати коваріантні координати частинок  $z_a^\mu$  як функції канонічних змінних:

$$z_a^\mu = Z^\mu + [\Lambda^T(P/M)]_\nu^\mu e_a^\nu(\mathbf{r}, \mathbf{k}); \quad (2.1.58)$$

тут

$$\begin{aligned} Z^0 &= t, \\ Z^i &= Q^i - \frac{(\mathbf{P} \times \mathbf{S})^i}{M(M+H)} \end{aligned} \quad (2.1.59)$$

є відомими змінними цента мас Прайса [345], а

$$\begin{aligned} e_a^0 &= \tfrac{1}{2}(-)^{\bar{a}} \eta r, & a &= 1, 2, \\ e_a^i &= \tfrac{1}{2}(-)^{\bar{a}} r^i + \eta r k^i / M, & \bar{a} &= 3 - a. \end{aligned} \quad (2.1.60)$$

Формули (2.1.58)–(2.1.60) відповідають спеціальному вибору загальних виразів для коваріантних координат, запропонованих в [246, 346, 347] для часо-просторової інтерпретації *a priori* заданої моделі.

## 2.1.7. Редукція релятивістичної задачі двох тіл до квадратур

У моделі БТ 12-вимірний фазовий простір  $\mathbb{P}$  можна природньо розкласти на зовнішній та внутрішній підпростори  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\text{ex}} \times \mathbb{P}_{\text{in}}$ , де  $\mathbb{P}_{\text{ex}}$  параметризується зовнішніми змінними  $Q_i$ ,  $P_i$ , а  $\mathbb{P}_{\text{in}}$  – внутрішніми  $r_i$ ,  $k_i$ .

Завдяки пуанкаре-інваріантності опису достатньо обрати систему відліку центра мас (ЦМ), в якій

$$\mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{0} \implies \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{0}, \quad (2.1.61)$$

і тоді розглядати лише підпростір  $\mathbb{P}_{\text{in}}$ . У цьому місці задача зводиться до обертово-інваріантної задачі для деякої ефективної частинки у зовнішньому полі. Відповідна фазова траєкторія лежить у площині, ортогональній до  $\mathbf{S}$ . Для її опису природно вживати полярні координати

$$\mathbf{r} = r\boldsymbol{\epsilon}_r, \quad \mathbf{k} = k_r\boldsymbol{\epsilon}_r + S\boldsymbol{\epsilon}_\varphi/r;$$

тут  $S \equiv |\mathbf{S}|$ ; одиничні орти  $\boldsymbol{\epsilon}_r, \boldsymbol{\epsilon}_\varphi$  є ортогональними до  $\mathbf{S}$ , разом з  $\mathbf{S}$  формують праву трійку векторів, і звичним чином можуть бути розкладені в термінах декартових ортів  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  і полярного кута  $\varphi$ :

$$\boldsymbol{\epsilon}_r = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \quad \boldsymbol{\epsilon}_\varphi = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi.$$

Масове рівняння системи (2.1.57) у полярних змінних стає таким:

$$\phi(M^2, -k_r^2 - S^2/r^2, \eta Mr, -rk_r) = 0, \quad (2.1.62)$$

а коваріантні координати частинок (2.1.58)–(2.1.60) мають вирази:

$$z_a^0 = t + \frac{1}{2}(-)^{\bar{a}} \eta r, \quad (2.1.63)$$

$$\mathbf{z}_a = \left(\frac{1}{2}(-)^{\bar{a}} + \eta k_r/M\right) r\boldsymbol{\epsilon}_r + \eta S\boldsymbol{\epsilon}_\varphi/M. \quad (2.1.64)$$

З р-ня (2.1.62) внутрішній радіальний імпульс  $k_r$  можна виразити через  $r, M, S$ , а тоді, згідно з методом Гамільтона-Якобі, розв'язок рівнянь Гамільтона можна локально виразити у квадратурах

$$t - t_0 = \int dr \partial k_r(r, M, S) / \partial M, \quad (2.1.65)$$

$$\varphi - \varphi_0 = - \int dr \partial k_r(r, M, S) / \partial S. \quad (2.1.66)$$

Функція  $k_r(r, M, S)$  зазвичай складається з кількох гілок і описує проекцію фазової траєкторії на підпростір радіальних змінних  $(r, k_r) \equiv \mathbb{P}_r \subset \mathbb{P}_{\text{in}}$ . Тому квадратури (2.1.65), (2.1.66) дають лише локальний розв'язок задачі, тобто в межах тієї області значень  $r$ , в межах якої дана гілка  $k_r$  існує.

Щоб отримати глобальний розв'язок, необхідно зшити локальні розв'язки так, щоб отримати гладку криву в  $\mathbb{P}_{\text{in}}$ . Загалом, така фазова траєкторія може

містити кілька окремих компонент, і фізичне значення деяких з них може бути сумнівним. Після відображення у простір Мінковського вони можуть виявляти дивну поведінку частинок. Походження, фізичне значення таких розв'язків і правила розділення фізичних та нефізичних розв'язків будуть розглядалися далі на конкретних прикладах часо-асиметричних моделей.

## **2.2. Класична динаміка часо-асиметричних моделей із взаємодією польового типу**

Почнемо із векторної та скалярної взаємодій (п. 2.2.1). Динаміка векторної моделі (Старушкевича-Рудда-Гілла) вивчалася раніше - як у 2-вимірному часо-просторі [49, 50, 341], так і в  $\mathbb{M}_4$  [51, 53]. Викладена вище методика дозволяє виявити нові риси цієї моделі. Скалярна ж модель розглядалася лише в  $\mathbb{M}_4$  [54, 341]. Представлені тут результати [5], отримані з допомогою гамільтонового формулювання цих моделей, вичерпують аналіз їх класичної динаміки. В п. 2.2.2 вивчається скалярно-векторна модель, що володіє внутрішньою симетрією. Моделі з тензорними взаємодіями вищих рангів є значно складнішими, вони досліджуються в п.2.2.3 наблизено – в 2-му порядку за константою взаємодії.

### **2.2.1. Електромагнетна (векторна) і скалярна моделі**

Векторна і скалярна часо-асиметричні моделі представляють двочастинкові задачі, розв'язок яких можна отримати у замкненому вигляді. Частину аналізу можна провести аналітично. Зокрема, точки повороту та інші точки, ключові для інтегрування, є розв'язками алгебричних рівнянь 3-го і 4-го ступеня, однак самі квадратури не вдається виразити через відомі спеціальні функції, їх доводиться обчислювати на комп'ютері. Для простоти і наглядності розглядатимемо випадок однакових мас частинок  $m$ .

У нерелятивістичній границі усі часо-асиметричні моделі із взаємодією польового типу зводяться до кулонівської взаємодії із константою взаємодії  $\alpha$  (точніше  $\alpha_1$  та  $\alpha_0$  відповідно). Тому зручно представляти характерні риси моделей у порівнянні з нерелятивістичною кулонівською системою.

Множина розв'язків рівнянь руху двочастинкової системи становить 12-параметричну сім'ю. Перетворення Пуанкаре (що утворюють 10-параметричну групу) змінюють лише рух системи як цілого, тому розв'язки, пов'язані цими перетвореннями, вважатимемо еквівалентними. Отже, нееквівалентні розв'язки утворюють 2-параметричну сім'ю. Будемо її параметризувати значеннями повної маси  $M$  (або енергії  $E$  в нерелятивістичному випадку), та спіну (внутрішнього моменту імпульсу)  $S$  – пари інтегралів руху. Отже, розмаїття усіх можливих розв'язків вичерпується деякою підмножиною  $(M, S)$ -площини. Використовуватимемо  $t$  та  $r_0 \equiv |\alpha| / t$  як одиниці вимірювання для величин імпульсного та координатного типу відповідно, так що  $\rho \equiv r/r_0$ ,  $\pi_\rho \equiv k_r/m$ . Введемо також безрозмірні інтеграли руху  $\mu = \frac{1}{2}M/t$  та  $\sigma = S/|\alpha|$ . Для зручності будемо маркувати різні розв'язки (а саме – фазові траєкторії, світові лінії частинок) їх розташуванням на  $(\mu, \sigma)$ -площині.

Спочатку розглянемо модель з **векторною**, тобто електромагнетною взаємодією. Якісно різні типи фазової траєкторії (три верхні графіки на рис. 2.1) відповідають трьом різним областям  $\mathcal{D}(+)$ ,  $\mathcal{D}(-)$  and  $\mathcal{D}(0)$  на  $(\mu, \sigma)$ -площині (нижній графік на рис. 2.1).

Кількість та розташування  $(\mu, \sigma)$ -областей на  $(\mu, \sigma)$ -площині в цілому відповідає нерелятивістичному випадку, але фазові траєкторії складніші: вони містять кілька незв'язаних гілок. Це означає, що існує кілька розв'язків гамільтонових рівнянь руху для тих самих значень інтегралів руху  $\mu, \sigma$ .

Лише одна гілка, а саме  $\gamma_-^a$  для випадку притягання ( $\alpha < 0$ ) і  $\gamma_-^r$  для випадку відштовхування ( $\alpha > 0$ ) є *регулярною*, тобто це є релятивістичним відповідником фазової траєкторії системи з кулонівською взаємодією, і вона збігається з останньою в слабко релятивістичній області  $(\mu, \sigma)$ -площини (при  $\mu \approx 1$  і  $\sigma \gg 1$  для випадку відштовхування). Якщо  $\mu > 1$  (область  $\mathcal{D}(+)$  на  $(\mu, \sigma)$ -площині), обидві  $\gamma_-^a$  і  $\gamma_-^r$  існують і відповідають необмеженим траєкторіям частинок, що є аналогами гіперболічних орбіт в кулонівській задачі. Зауважимо, що траєкторії частинок  $\gamma_-^a$  є петле-подібними біля точок  $(\mu, \sigma)$ -площини, близьких до  $\mu = 1, \sigma = 1$  (рис. 2.2a). Цей ефект стає очевиднішим для зв'язаних станів  $\gamma_-^a$  (що існують в  $\mathcal{D}(-)$ ) як ви-

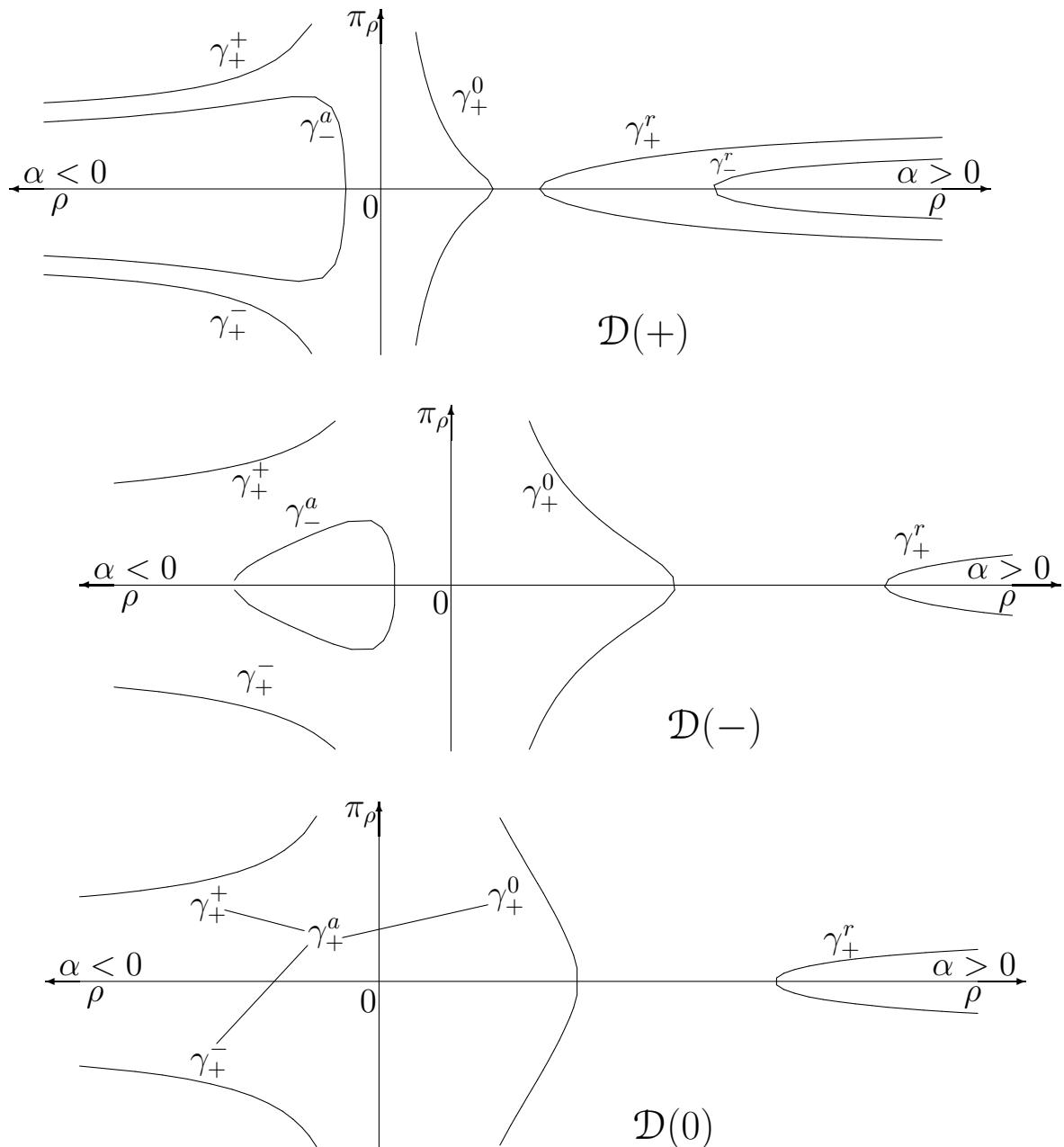


Рис. 2.1: Векторна модель. Різні області  $(\mu, \sigma)$ -площини (нижній графік) та відповідні типи фазових траєкторій (три верхні графіки).

Крива  $\mathcal{F}$  на  $(\mu, \sigma)$ -площині задана параметрично:

$$\sigma^2 = \frac{p(p+2)^2}{2p^2 + 5p + 4},$$

$$\mu^2 = \frac{p(2p^2 + 5p + 4)}{2(p+1)^3},$$

$$p \in [0, \infty[.$$

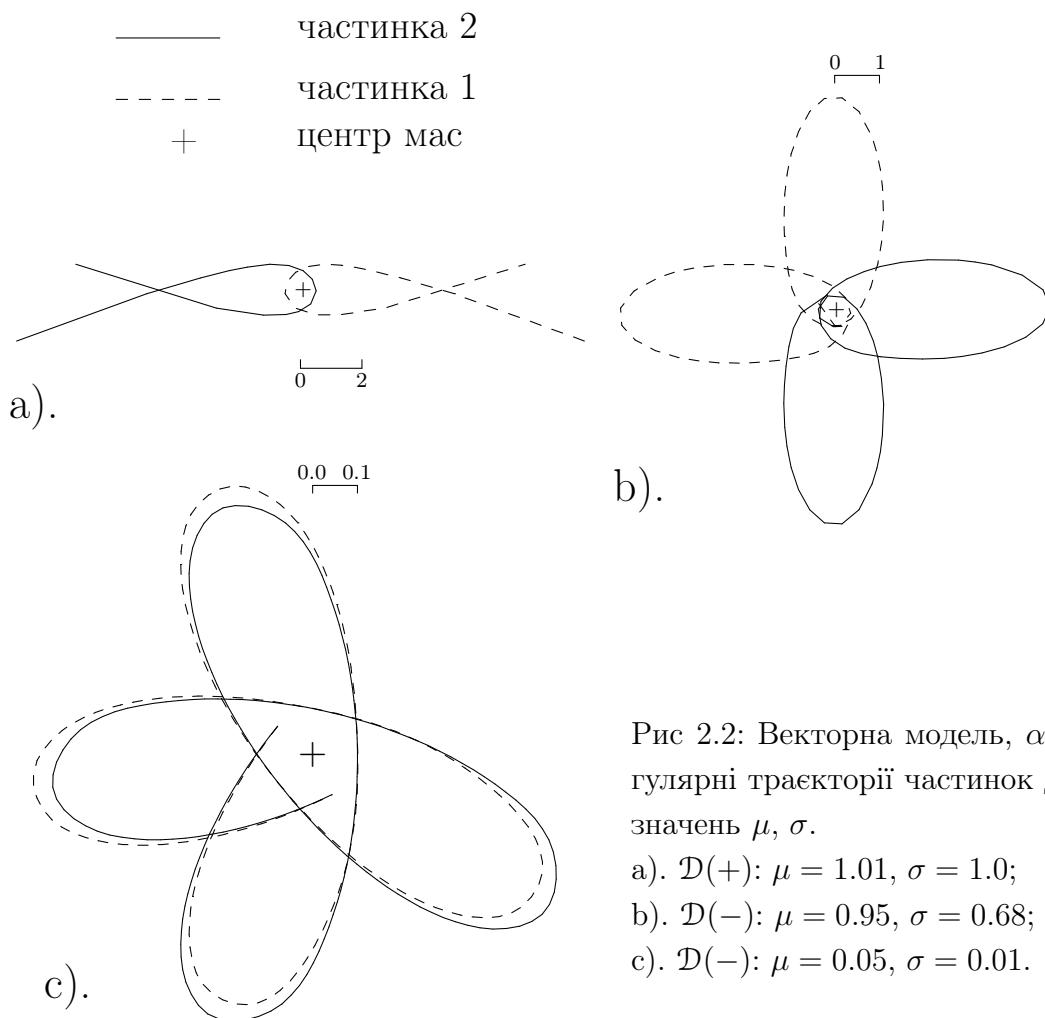


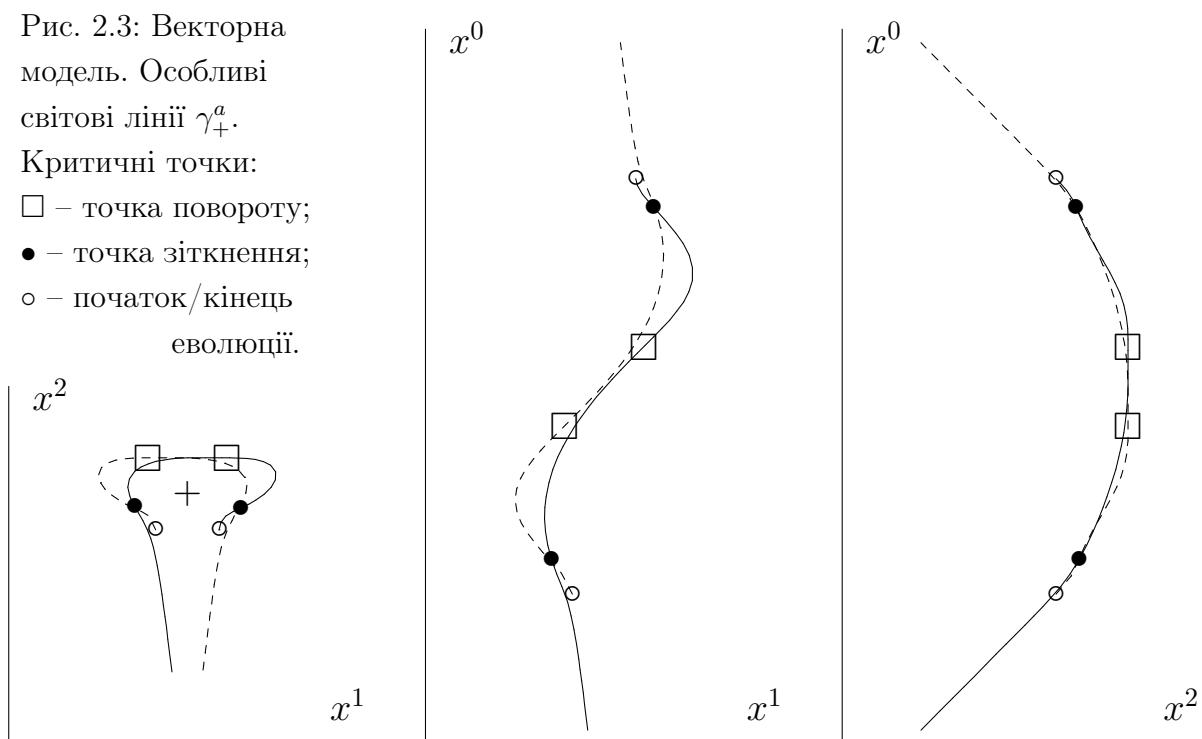
Рис 2.2: Векторна модель,  $\alpha < 0$  (притягання). Регулярні траєкторії частинок для різних значень  $\mu, \sigma$ .

- a).  $\mathcal{D}(+)$ :  $\mu = 1.01, \sigma = 1.0$ ;
- b).  $\mathcal{D}(-)$ :  $\mu = 0.95, \sigma = 0.68$ ;
- c).  $\mathcal{D}(-)$ :  $\mu = 0.05, \sigma = 0.01$ .

Рис. 2.3: Векторна модель. Особливі світові лінії  $\gamma_+^a$ .

Критичні точки:

- $\square$  – точка повороту;
- $\bullet$  – точка зіткнення;
- $\circ$  – початок/кінець еволюції.



передження перигелію (рис. 2.2b) (стани  $\gamma_-^r$  у випадку притягання зникають у цій області). В ультрарелятивістичному випадку  $\mu \rightarrow 0$  (лівий нижній куток області  $\mathcal{D}(-)$ ) частинки "злипаються" так що відстань між ними стає значно меншою, ніж відстань до центру мас (рис. 2.2c). На кривій  $\mathcal{F}$  регулярні стани відповідають коловому руху частинок, так що в області  $\mathcal{D}(0)$  (нижче кривої  $\mathcal{F}$ ) регулярний рух неможливий.

Решта гілок  $\gamma_+^0$ ,  $\gamma_+^+$ ,  $\gamma_+^-$ , і  $\gamma_+^r$  фазової траєкторії не мають нерелятивістичних відповідників. Вони існують і якісно подібні на усій  $(\mu, \sigma)$ -площині. Ці гілки представляють досить дивний рух частинок, так що знак  $\alpha$  не характеризує взаємодію як притягання чи відштовхування. Навіть більше, можна гладко зшити три гілки  $\gamma_+^0$ ,  $\gamma_+^+$  та  $\gamma_+^-$  в одну  $\gamma_+^a$  (як показано на рис. 2.1 для фазової траєкторії в  $\mathcal{D}(0)$ ) так, що остаточний рух буде таким: частинки зближуються із нескінченною відстані між ними, зіштовхуються, проходять одна крізь одну, розходяться до відстані  $\sim r_0$ , знову зіштовхуються, і розходяться на нескінченність (рис. 2.3). Гілки  $\gamma_+^r$  і  $\gamma_+^a$  та відповідні світові лінії є *патологічними* в тому сенсі, що швидкості масивних частинок прямають асимптотично до швидкості світла. Навіть більше, ці розв'язки містять критичні точки (а саме зіткнення та повороту) в яких масивні частинки досягають та не перевищують швидкість світла за скінчений час. Тим не менше, їх світові лінії є гладкими в цих точках, як і всюди. Іншою особливістю патологічних станів є те, що еволюція частинок поширюється на напів- нескінчений проміжок координатного часу, тоді як параметр еволюції пробігає усю дійсну вісь (рис. 2.3).

**Скалярна** модель є складнішою, особливо у випадку притягання. Тут є більше якісно різних типів фазової траєкторії, що відповідають які відповідають більшій кількості  $(\mu, \sigma)$ -областей, і які містять більше гілок (рис. 2.4).

Серед них лише одна гілка – регулярна, тобто аналогічна до кулонівської фазової траєкторії. Вона існує а області  $\mathcal{D}(1\pm; 1)$ . Зв'язані стани (в  $\mathcal{D}(1-; 1)$ ) виявляють рух частинок із відставанням перигелію (на противагу до випередження у векторній моделі). Їх немає нижче від кривої  $\mathcal{F}$ ,  $\sigma > 1/\sqrt{5}$ , на якій траєкторії частинок стають коловими.

На відміну від випадку векторної моделі, область регулярних станів обмежена не тільки знизу, але також і зліва, де рух не є заборонено. Границя  $\mathcal{X}_+$  і  $\mathcal{J}$ ,  $\mu > \sqrt{5/8}$  не свідчить про якісні зміни у русі частинок за винятком появи критичних точок (в яких досягається швидкість світла) на світових лініях частинок. Ці *умовно регулярні* стани існують в областях  $\mathcal{D}(1\pm; 2)$  і  $\mathcal{D}(1\pm; 3)$ . Ефект відставання перигелію в них зростає (рис. 2.5a), особливо в області  $\mathcal{D}(1\pm; 3)$ ; тут частинки рухаються так, ніби притягаються на великих відстанях, тоді як на малих відстанях  $\sim r_0$  відштовхують одна одну жорстким (хоч і не абсолютно) ядром. Частинки відскакують від цього ядра із швидкістю світла, але їх світові лінії є гладкими у цих критичних точках (рис. 2.5b). При підході до кривої  $\mathcal{J}$ ,  $\sigma < 1/\sqrt{5}$ , траєкторії частинок прямують (як і в регулярному випадку) до кіл, але дуже дивним чином: частинки відскакують частіше (рис. 2.5c), так що на границях колових траєкторіях (які відповідають кривій  $\mathcal{J}$ ) множина критичних точок стає всюди щільною.

Окрім регулярних та умовно регулярних станів (що загалом демонструють правдоподібну поведінку частинок) і патологічних станів (які згрубша подібні до тих, що у векторній моделі, рис. 2.3), скалярна модель у випадку притягання (тобто  $\alpha < 0$ ) виявляє *особливі* стани, що відповідають обмеженому рухові частинок на відносній відстані порядку  $r_0$ . Ці стани існують в областях  $\mathcal{D}(2)$ ,  $\mathcal{D}(3\pm)$  та  $\mathcal{D}(4; 1) - \mathcal{D}(4; 2)$ , тобто далеко від слабко релятивістичної області, і тому вони не мають нерелятивістичних відповідників. Наприклад, в  $\mathcal{D}(2)$  частинки рухаються так, ніби їх притягання на великих відстанях сильно зростає (рис. 2.5d); в області  $\mathcal{D}(4; 1) - \mathcal{D}(4; 2)$  траєкторія однієї частинки завжди лежить всередині траєкторії іншої (рис. 2.5e).

Розмаїття описаних тут розв'язків отримано в рамках гамільтонового формулювання векторної та скалярної моделей. В нерелятивістичній границі виживають лише регулярні розв'язки. В рамках лагранжевого (або еквівалентного фок-керівського) формалізму лише такі розв'язки можна відтворити повністю. Причина в тому, що лоренцівські корені  $\sqrt{\dot{z}_a^2}$  в лагранжіані (2.1.5) означені лише на часо-подібних світових лініях, і занюлюються у критичних точках досягнення

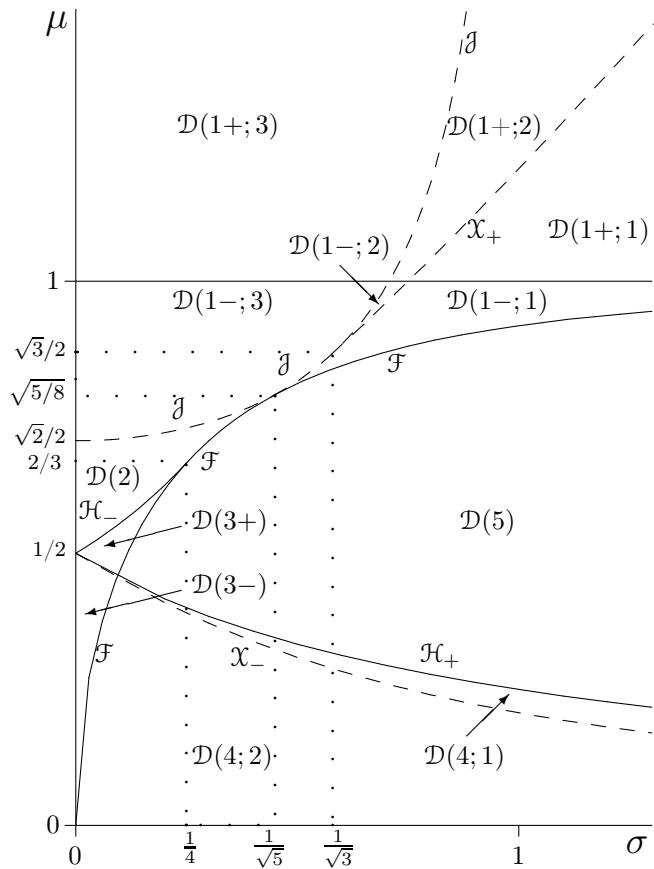
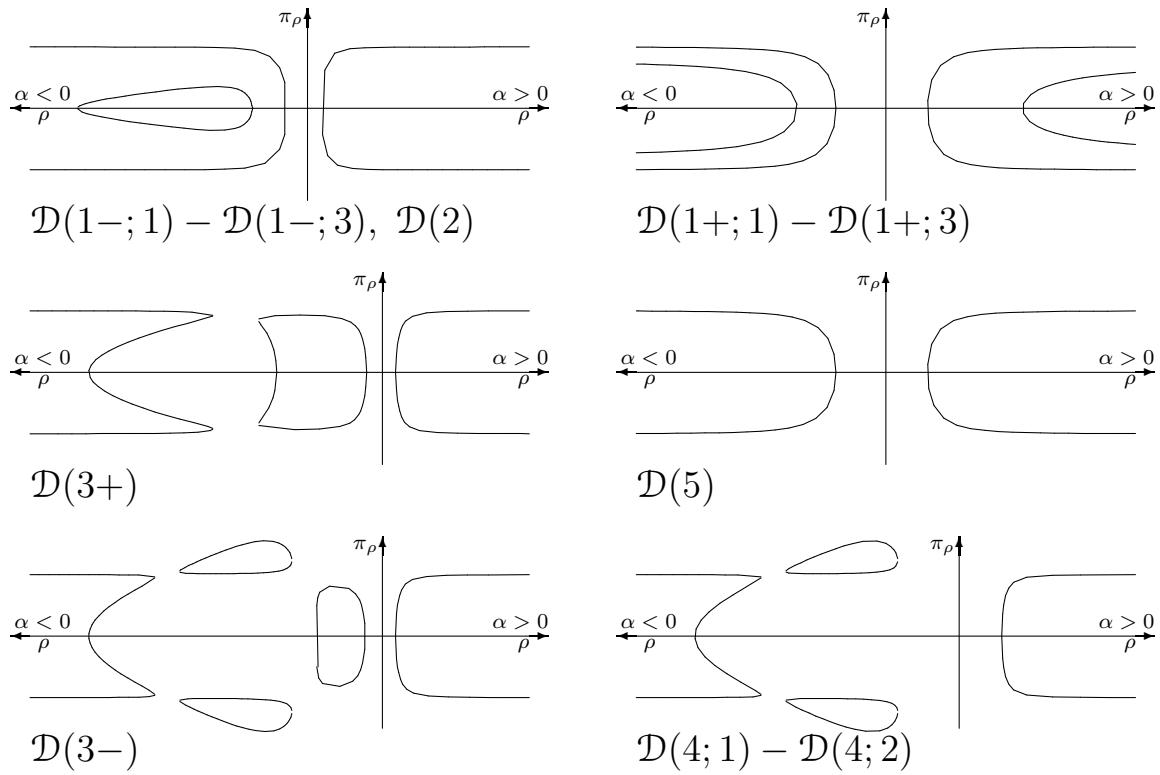


Рис. 2.4: Скалярна модель. Різні області  $(\mu, \sigma)$ -площини (нижній графік) і відповідні типи фазової траєкторії (6 верхніх графіків). Криві  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{H}_\pm$  і  $\mathcal{X}_\pm$  на  $(\mu, \sigma)$ -площині задані рівняннями:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mu^2 &= \frac{27\sigma}{2((3+\sigma^2)^{3/2} + \sigma(9-\sigma^2))}, \\ \mathcal{J} : \quad \mu^2 &= \frac{1}{2(1-\sigma^2)}, \\ \mathcal{H}_\pm : \quad \mu &= \frac{1}{2(1\pm\sigma)}, \\ \mathcal{X}_\pm : \quad \mu &= (\sqrt{1+\sigma^2} \pm \sigma)/2. \end{aligned}$$

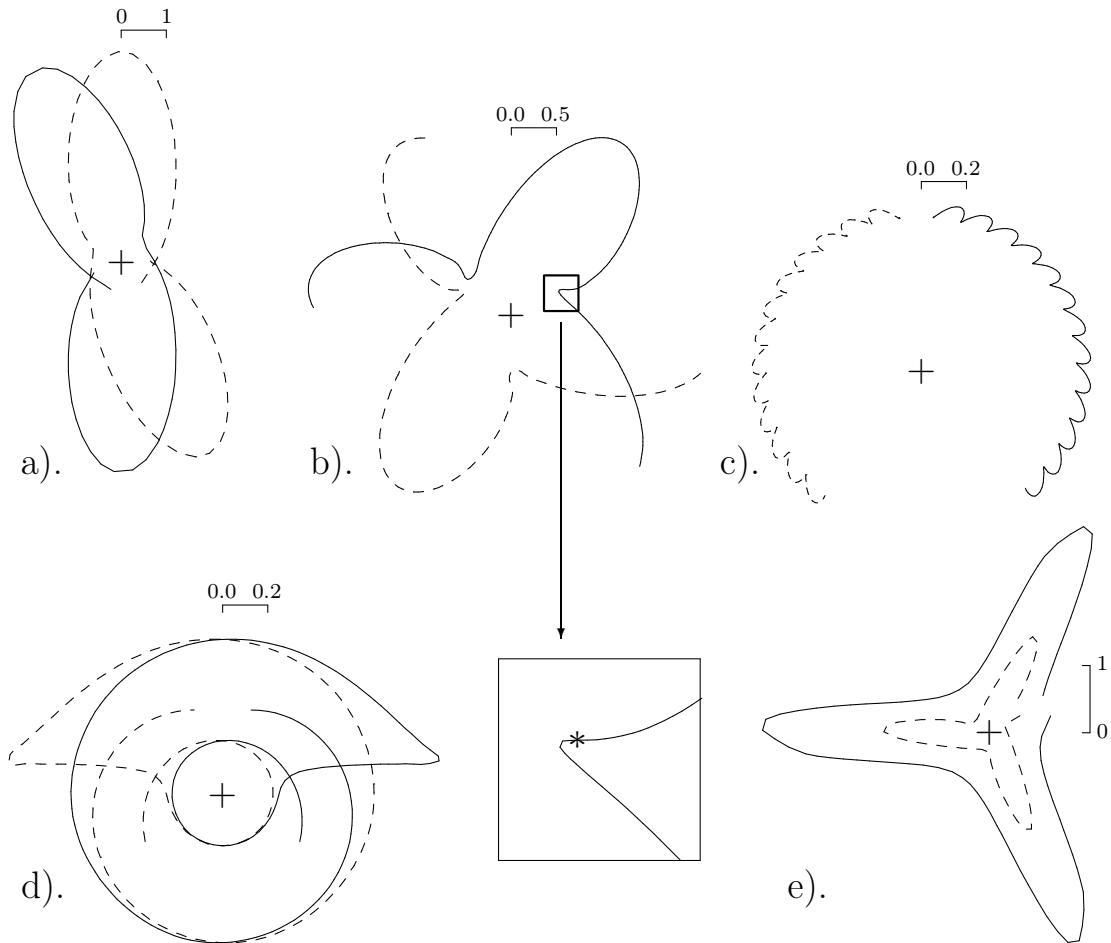


Рис. 2.5: Скалярна модель,  $\alpha < 0$  (притягання). Різні типи обмежених фазових траєкторій.  
 а).  $\mathcal{D}(1-; 2)$ :  $\mu = 0.95$ ,  $\sigma = 0.68$ ; б).  $\mathcal{D}(1-; 3)$ :  $\mu = 0.9$ ,  $\sigma = 0.5$ ;  
 в).  $\mathcal{D}(1-; 3)$  біля  $\mathcal{J}$ :  $\mu = 0.75$ ,  $\sigma = 0.3$ ; д).  $\mathcal{D}(2)$  біля  $\mathcal{H}_-$ :  $\mu = 0.6$ ,  $\sigma = 0.16666$ ;  
 е).  $\mathcal{D}(4; 2)$ :  $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 0.15$ .

швидкості світла. Інші розв'язки випадають з лагранжевого опису, хоча їх можна було б отримати з лагранжіану (2.1.5) шляхом формальної заміни  $\sqrt{\dot{z}_a^2} \rightarrow -\sqrt{\dot{z}_a^2}$  для  $a = 1$  або/та  $a = 2$ . Природньо, що такі розв'язки не мають нерелятивістичної границі.

Лагранжевий (або фоккерівський) опис є первинним по відношенню до гамільтонового. Тому нелагранжеві розв'язки, на перший погляд, не мають фізичного значення. З іншого боку, гамільтонове формулювання моделей є важливим містком до їх квантування, і нелагранжеві розв'язки можуть давати внесок у цілісну квантово-механічну картину.

### 2.2.2. Скалярно-векторна модель

Чисті векторна і скалярна моделі є калькулятивно громіздкими, і представляють досить складну динаміку частинок. Ще складнішою очікується модель із довільною суперпозицією скалярної та векторної взаємодій (2.1.37) – це випливає із складної структури динамічної в'язі (2.1.38).

У випадку рівноваженої суперпозиції  $\alpha_1 = \kappa\alpha_0 \equiv \kappa\alpha$ ,  $\kappa = \pm 1$ , другий член ф-ї  $\phi_{\text{int}}$  (2.1.38) занулюється. Така структура динамічної в'язі значно спрощує динаміку моделі, і робить її подібною в математичному сенсі до динаміки нерелятивістичної системи і кулонівською взаємодією. В цьому випадку можна очікувати існування додаткового інтегралу руху – релятивістичного аналога вектора Рунг-Ленца.

В рамках явно коваріантного гамільтонового опису структуру такого інтегралу легко вгадати [2]. Для цього зручно спростити вільночастинковий член  $\phi_{\text{free}}$  (2.1.30) динамічної в'язі (2.1.29) шляхом канонічного перетворення  $(y^\mu, P_\mu, z^\mu, p_\mu) \mapsto (Y^\mu, P_\mu, z^\mu, q_\mu)$ :

$$q_\mu = p_\mu - \frac{m_1^2 - m_2^2}{2P^2} P_\mu, \quad Y^\mu = y^\mu + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2P^2} \left( z^\mu - 2 \frac{P \cdot z}{P^2} P^\mu \right).$$

В термінах нових змінних динамічна в'язь набуває вигляду:

$$\phi = \frac{1}{4} P^2 - \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2) + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{4P^2} + q_\perp^2 - \frac{\alpha(P^2 - (m_1 - \kappa m_2)^2)}{\eta P \cdot z} = 0, \quad (2.2.1)$$

де

$$q_{\perp\mu} \equiv P^\nu \Xi_{\nu\mu} / P \cdot z, \quad \Xi_{\mu\nu} = z_\mu q_\nu - z_\nu q_\mu; \quad q_\perp \cdot P \equiv 0.$$

Тепер легко переконатися, що релятивістичний аналог вектора Рунг-Ленца має вигляд:

$$R_\mu = \Pi_\mu^\nu \left( q_\perp^\lambda \Xi_{\lambda\nu} + \frac{\alpha(P^2 - (m_1 - \kappa m_2)^2)}{2\eta P \cdot z} z_\nu \right), \quad (2.2.2)$$

де  $\Pi_\mu^\nu \equiv \delta_\mu^\nu - P_\mu P^\nu / P^2$ . Дійсно, це є інтеграл руху:

$$\{R_\mu, \phi\} \approx 0, \quad \{R_\mu, z^2\} = 0,$$

для якого виконуються співвідношення:

$$\{R_\mu, P_\nu\} = 0, \quad \{R_\mu, J_{\lambda\sigma}\} = -\eta_{\mu\lambda} R_\sigma + \eta_{\mu\sigma} R_\lambda, \quad (2.2.3)$$

$$\{R_\mu, R_\nu\} \approx \left( \frac{1}{4} P^2 - \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2) + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{4P^2} \right) \Pi_\mu^\lambda \Pi_\nu^\sigma J_{\lambda\sigma}, \quad (2.2.4)$$

де символ " $\approx$ " позначає слабку рівність в сенсі Дірака [220].

Співвідношення (2.2.3)–(2.2.4) подібні до тих, що виконуються для вектора Рунг'є-Ленца в простій осциляторній та кулонівській моделях роботи [348]. Ці співвідношення істотно нелінійні, а тому їх теоретико-групове тлумачення – ускладнене. Тут обмежимось вивченням випадку системи відліку ЦМ, в якій відповідні співвідношення в термінах дужок Пуасона можна лінеаризувати.

Для цього скористаємося БТ-описом моделі, в рамках якого вектор Рунг'є-Ленца набуває вигляду  $R_\mu = (0, \mathbf{R})$ , де

$$\mathbf{R} = \mathbf{k} \times \mathbf{S} + g_M \mathbf{r}/r, \quad (2.2.5)$$

( $\mathbf{S} = \mathbf{r} \times \mathbf{k}$  є спіном системи), а повна маса задовольняє рівняння:

$$b_M - \mathbf{k}^2 - 2g_M/r = 0.$$

Тут

$$\begin{aligned} b_M &\equiv \frac{1}{4M^2} \left( M^2 - (m_1 + m_2)^2 \right) \left( M^2 - (m_1 - m_2)^2 \right), \\ g_M &\equiv \frac{\alpha}{2M} \left( M^2 - (m_1 - \kappa m_2)^2 \right). \end{aligned}$$

Крім цього, в системі ЦМ коваріантні координати частинок є такими функціями канонічних змінних:

$$\mathbf{z}_a = \frac{(-)^{\bar{a}}}{2} \left( 1 + \frac{m_{\bar{a}}^2 - m_a^2}{M^2} \right) \mathbf{r} + \epsilon r \frac{\mathbf{k}}{M}, \quad a = 1, 2; \quad \bar{a} \equiv 3 - a. \quad (2.2.6)$$

Співвідношення дужок Пуасона для спіну системи  $\mathbf{S}$  та вектору Рунг'є-Ленца  $\mathbf{R}$  подібні до нерелятивістичних:

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ij}^k S_k, \quad \{R_i, S_j\} = \varepsilon_{ij}^k R_k, \quad \{R_i, R_j\} = -b_M \varepsilon_{ij}^k S_k. \quad (2.2.7)$$

Дійсно, якщо  $b_M = 0$ , то р-ня (7.21) є співвідношеннями для генераторів групи Евкліда  $E(3)$ . У випадку  $b_M \neq 0$  генератори  $S_i$  і нормований  $\hat{R}_i \equiv R_i/\sqrt{|Q|}$  породжують групу  $SO(4)$ , якщо  $b_M < 0$ , і групу  $SO(1,3)$ , якщо  $b_M > 0$ . Враховуючи р-ня (2.2.7) отримаємо такі випадки для алгебри внутрішньої симетрії:

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(4) &\quad \text{для } |m_1 - m_2| < M < m_1 + m_2, \\ \mathfrak{e}(3) &\quad \text{для } M = |m_1 - m_2| \text{ та } M = m_1 + m_2, \\ \mathfrak{so}(1, 3) &\quad \text{для } 0 < M < |m_1 - m_2| \text{ та } M > m_1 + m_2. \end{aligned}$$

Існування вектору Рунг-Ленца дає змогу отримати траєкторії частинок та траєкторію їх відносного руху (окреслених векторами  $\mathbf{z}_a$  та  $\mathbf{r}$  відповідно) без інтегрування. Зауважимо, що ці траєкторії є пласкими кривими у площині, отриманою до  $\mathbf{S}$ :  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{z}_a \cdot \mathbf{S} = 0$ . Вектор  $\mathbf{R}$  лежить у цій же площині:  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = 0$ . Домноживши р-ня (2.2.5) на  $\mathbf{r}$  отримаємо рівність:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} = gr + S^2, \quad (2.2.8)$$

де  $S \equiv |\mathbf{S}|$ . Нехай  $\varphi$  – кут між  $\mathbf{R}$  та  $\mathbf{r}$ , тобто  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} = Rr \cos \varphi$ . Тоді рівність (2.2.8) можна звести до канонічного р-ня конічного перетину

$$p/r = e \cos \varphi - \operatorname{sgn} g \quad (2.2.9)$$

з таким канонічним параметром  $p$  та ексцентриситетом  $e$ :

$$p = \frac{S^2}{|g|} = \frac{2MS^2}{|\alpha||M^2 - (m_1 - \kappa m_2)^2|}, \quad (2.2.10)$$

$$e = \frac{R}{|g|} = \sqrt{1 + \frac{S^2}{\alpha^2} \frac{M^2 - (m_1 + \kappa m_2)^2}{M^2 - (m_1 - \kappa m_2)^2}}. \quad (2.2.11)$$

Пошук рівнянь траєкторій частинок є подібним, але дещо складнішим. Спочатку означимо вектори:

$$\mathbf{r}_a \equiv \mathbf{z}_a - \delta_a \mathbf{R}, \quad \text{де} \quad \delta_a = \frac{2(-)^{\bar{a}}}{(M + m_{\bar{a}})^2 - m_a^2}. \quad (2.2.12)$$

тоді легко отримати співвідношення:

$$(-)^{\bar{a}} \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_a = gr_a + \frac{m_{\bar{a}}}{M} S^2, \quad (2.2.13)$$

що є подібними до (2.2.8) і, отже, допускають форму:

$$p_a/r_a = e \cos \varphi_a - \operatorname{sgn} g, \quad (2.2.14)$$

де  $\varphi_a$  – кути між  $(-)^\bar{a}\mathbf{R}$  та  $\mathbf{r}_a$ . Р-ня (2.2.14) описують траєкторії частинок, що є конічними перетинами тієї ж форми, що і відносна траєкторія, тобто з тим же ексцентризитетом  $e$  (2.2.11), але іншими канонічними параметрами  $p_a = \frac{m_{\bar{a}}}{M} p$ . Фокуси цих конічних перетинів зміщені відносно центру мас на вектори  $\delta_a \mathbf{R}$  – на противагу до нерелятивістичного випадку, в якому траєкторії мають спільний фокус у центрі мас.

### 2.2.3. Моделі з тензорними взаємодіями вищих рангів

Серед часо-асиметричних моделей із взаємодією польового типу лише у випадку довільної скалярно-векторної суперпозиції можна здійснити гамільтонізацію моделі точно. Якщо ж ранг (або спін) поля-носія взаємодії  $n \geq 2$ , перейти до гамільтонового опису та отримати квадратури можна наближено, шляхом розкладу за константою взаємодії.

Структура гамільтонового потенціалу 2-го порядку (2.1.40) є спільною для лінійно-польових взаємодій різної тензорної вимірності: тип взаємодії у ньому визначається функціями  $f(\lambda)$  та  $h(\lambda)$ , що залежать лише від інтегралу руху  $\lambda$ . Нелінійну гравітаційну взаємодію теж можна описати (принаймні в наближенні 2-го порядку) цим потенціалом (2.1.40) (див. [2, 40]) з  $f_g(\lambda)$  і  $h_g(\lambda)$ , означеними в р-нях (2.1.49)-(2.1.51). А проінтегрувати ці задачі 2-х тіл можна для довільних  $f$  і  $h$  як сталих 1-го та 2-го порядку малості відповідно.

В 2-му наближенні квадратури можна виразити через елементарні функції. Для зв'язаних станів отримаємо траєкторію відносного руху простого вигляду:

$$1/r = |a| + b \cos((1-\delta)\varphi) \quad (b < |a|),$$

де  $a$ ,  $b$  і  $\delta$  є функціями інтегралів руху. Це еліпс, що прецесує з випередженням перигелію на кут

$$\Delta\varphi = 2\pi\delta = -\pi\alpha^2 h(1)/S^2.$$

У випадку лінійної тензорної взаємодії довільного рангу (спіну)  $n$  випередження перигелію  $\Delta\varphi$  можна обчислити формулами (2.1.28), (2.1.41):

$$\Delta\varphi = \pi(2n^2 - 1)(g_1 g_2 / S)^2.$$

Для гравітаційної взаємодії з (2.1.50) та (2.1.51) випливає значення

$$\Delta\varphi = 6\pi(Gm_1 m_2 / S)^2.$$

Просторові траєкторії частинок, обчислені з допомогою (2.2.5), виявляються складнішими, ніж відносні траєкторії – це типова риса часо-асиметричних моделей. Тим не менше, їх аналіз приводить до тих же ж значень для випередження перигелію. Навіть більше ці значення узгоджуються з отриманими в рамках різних квазірелятивістичних підходів до РТПВ [186, 254, 271, 349].

### 2.3. Квантування часо-асиметричних моделей із взаємодією польового типу

Цей розділ присвячено проблемі квантування часо-асиметричних моделей із польовою взаємодією. Вихідним пунктом є явно коваріантне гамільтонове формулювання моделей із в'язями. Буде показано, що в 2-му наближенні за константою взаємодії динамічну в'язь (2.1.29), (2.1.30), (2.1.40) можна представити як співвідношення між повною масою системи і одним з канонічних генераторів групи  $SO(2,1)$ .

Структура динамічної в'язі дає можливість використати як базу квантування алгебру Лі  $\mathfrak{so}(2, 1)$  замість алгебри Гайзенберга. Тоді квантовий аналог цієї в'язі становить задачу для спектру мас, яку можна легко розв'язати завдяки властивостям унітарних представлень  $SO(2,1)$ . Такий підхід близький до методу динамічної групи Барута [350], і був застосований до квантування часо-асиметричних моделей в  $\mathbb{M}_2$  [58]. Він дозволяє обійти багато технічних деталей, звичайно важливих для квантування релятивістичних моделей (впорядкування операторів, означення скалярного добутку тощо).

Таким чином в п. 2.3.3 буде отримано спектри мас вказаних квантованих моделей, а в п. 2.3.4 – досліджено їх зв’язок з квазі-потенціальними рівняннями Тодорова для векторної та скалярної взаємодії. Цей зв’язок дозволить узагальнити квазі-потенціальні рівняння на випадок довільних тензорних взаємодій, включно з гравітаційною. Для повнішої відповідності з квантово-польовими результатами в часоасиметричних моделях слід врахувати спінові ефекти. В п. 2.3.5 для цього запропоновано евристичний спосіб, що дозволяє враховувати спінові поправки до спектру пертурбативно, з точністю до  $\alpha^4$ . А в п. 2.3.6 побудовано точно розв’язну модель, що відтворює пертурбативний спектр із вказаною точністю.

### 2.3.1. Часо-асиметричні моделі з польовою взаємодією і канонічна реалізація алгебри $\mathfrak{so}(2, 1)$

Для того, щоб квантувати модель вказаним вище способом, спочатку необхідно представити динамічну в’язь (2.1.29), (2.1.30), (2.1.40) в еквівалентній формі:

$$\Phi(P^2, K_0, K_1, K_2) = 0, \quad (2.3.1)$$

через такі пуанкаре-інваріантні функції  $K_0, K_1$  і  $K_2$ :

$$\begin{aligned} K_0 &= (K_+ + K_-)/2, & K_1 &= (K_+ - K_-)/2, & K_2 &= x \cdot p_\perp, \\ K_+ &= -p_\perp^2 K_- / P^2 + B(P^2)/K_-, & K_- &= \eta P \cdot x. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Тут  $B(P^2)$  є довільною ф-єю. Функції  $K_0, K_1, K_2$  задовольняють співвідношення дужок Пуасона для алгебри Лі  $\mathfrak{so}(2, 1)$ :

$$\{K_0, K_1\} = K_2, \quad \{K_1, K_2\} = -K_2, \quad \{K_2, K_0\} = K_1. \quad (2.3.3)$$

Разом з генераторами (2.1.14)-(2.1.15) групи Пуанкаре  $\mathcal{P}$  вони утворюють базис алгебри Лі  $\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{so}(2, 1)$ .

Обмежимо тепер вихідну систему спостережних до канонічних генераторів  $\mathcal{P}$  та  $\text{SO}(2, 1)$ , тобто розглядатимемо спостережні, означені на просторі  $\mathcal{R} = (\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{so}(2, 1))^*$ , дуальному до алгебри Лі  $\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{so}(2, 1)$ . Тоді динамічна в’язь (2.3.1)

стає однією із в'язей, що визначають динаміку системи в  $\mathcal{R}$ . Генератори групи симетрії  $\mathcal{P}$  є інтегралами руху, і характеризують стан системи як цілого. Генератори  $\text{SO}(2,1)$  описують внутрішню динаміку і загалом не зберігаються. Інша в'язь випливає із співвідношень (2.3.2). Вона пов'язує ф-ї Казимира алгебр  $\mathfrak{p}$  і  $\mathfrak{so}(2,1)$ :  $P^2, J^2 = -W^2/P^2 > 0$  ( $W^\mu$  – вектор Паулі-Любанського) і

$$Q^2 = K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 = J^2 + B(P^2). \quad (2.3.4)$$

Динамічна в'язь для часо-асиметричних моделей із взаємодією польового типу в 2-му наближенні за константою взаємодії задана формулами (2.1.29), (2.1.30), (2.1.40), (2.1.41), (2.1.32), (2.1.33). В означенні функції  $f(\lambda)$  (2.1.28) кожен член суми є внеском поля рангу (спіну)  $n$  у взаємодію. Надалі введемо у цих формулах константу взаємодії явно:  $f(\lambda) \rightarrow -\alpha f(\lambda)$ ,  $h(\lambda) \rightarrow \alpha^2 h(\lambda)$ , вважаючи  $\alpha > 0$  (притягання) і  $f(\lambda) > 0$  і  $f(1) = \sum_n c_n = 1$ , що відповідає в нерелятивістичній граници потенціалу кулонівського притягання  $U = -\alpha/r$ .

В термінах генераторів (2.3.2) динамічна в'язь набуває вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{(m_1^2 + m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2 \lambda^2}{8P^4} K_- - \frac{\eta(m_1^2 - m_2^2)}{2P^2} K_2 + \frac{1}{2} K_+ \\ & - \frac{\alpha m_1 m_2 f(\lambda)}{P^2} - \frac{B(P^2)}{2K_-} + \sum_{a=1}^2 \frac{\alpha^2 h(\lambda) m_a^2 / P^2}{K_- - 2\eta(-)^a K_2} + O(\alpha^3) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Щоб її спростити, здійснемо канонічне перетворення:

$$\begin{aligned} (\text{I}) \quad & K_2 \rightarrow K'_2 = \exp\{\dots, \vartheta K_-\} K_2 = K_2 - \vartheta K_-, \quad K_- = K'_-, \\ & K_+ \rightarrow K'_+ = \exp\{\dots, \vartheta K_-\} K_+ = K_+ - 2\vartheta K_2 + \vartheta^2 K_-; \\ (\text{II}) \quad & K'_\pm \rightarrow \tilde{K}_\pm = \exp\{\dots, \varphi K'_2\} K'_\pm = e^{\mp\varphi} K'_\pm, \quad K'_2 = \tilde{K}_2, \end{aligned}$$

генероване коприєднаною дією  $\text{SO}(2,1)$ . Вона зберігає співвідношення (2.3.3) навіть якщо параметри  $\vartheta$  і  $\varphi$  залежать від функцій Казимира. Покладімо

$$\begin{aligned} \vartheta(P^2) &= \eta(m_1^2 - m_2^2)/2P^2, \quad \varphi(P^2) = \ln \sqrt{|\epsilon(P^2)|}, \quad \epsilon \neq 0; \\ \epsilon(P^2) &= \frac{m_1^2 m_2^2}{P^4} (\lambda^2 - 1) \begin{cases} < 0 & \text{якщо } (m_1 - m_2)^2 < P^2 < (m_1 + m_2)^2 \\ > 0 & \text{якщо } P^2 > (m_1 + m_2)^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Для зв'язаного руху  $\epsilon < 0$ , для розсіяння  $\epsilon > 0$  [4].

В першому наближенні за  $\alpha$  р-ня (2.3.5) дає рівність:

$$\sqrt{|\epsilon|} = \alpha \frac{m_1 m_2 f(\lambda)}{P^2 \tilde{K}_{\theta(\epsilon)}} + O(\alpha^2), \quad \text{де } \theta(\epsilon) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } \epsilon < 0 \\ 1 & \text{якщо } \epsilon > 0 \end{cases}. \quad (2.3.7)$$

Врахування її та вибір довільної ф-ї  $B(P^2)$  у вигляді

$$B(P^2) = \alpha^2 h(\lambda) \sum_{a=1}^2 (1 + \lambda m_{\bar{a}}/m_a)^{-1}, \quad \bar{a} = 3 - a,$$

спрошує динамічну в'язь до такого остаточного вигляду:

$$\tilde{K}_{\theta(\epsilon)} - F(P^2) + O(\alpha^3) = 0, \quad (2.3.8)$$

де  $F(P^2) = \alpha f(\lambda) |\lambda^2 - 1|^{-1/2}$ ,  $\lambda \neq 1$  і, в свою чергу,  $\lambda = \lambda(P^2)$  (див. (2.1.32)).

Як випливає з (2.3.6) і (2.3.7),  $\lambda = 1 + O(\alpha^2)$ . Тому із необхідною точністю маємо  $B(P^2) \approx \alpha^2 h(1)$ , і в'язь (2.3.4) стає такою:

$$Q^2 - J^2 - \alpha^2 h(1) + O(\alpha^3) = 0. \quad (2.3.9)$$

### 2.3.2. Квантування

Вище часо-асиметричну модель з взаємодією польового типу було переформульовано в динамічну систему на пресимплектичному підмноговиді  $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}$ , означеному парою в'язей (2.3.8) і (2.3.9). Такий класичний опис дозволяє і відповідне квантування.

Замінимо канонічні генератори  $P_\mu, J_{\nu\lambda}, \tilde{K}_0, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2$  ермітовими операторами  $\hat{P}_\mu, \hat{J}_{\nu\lambda}, \hat{K}_0, \hat{K}_1, \hat{K}_2$ , а дужки Пуасона  $\{\dots, \dots\}$  – комутаторами  $[\dots, \dots]/i$ . Ці оператори можуть служити генераторами унітарного представлення  $\mathcal{P} \otimes \mathrm{SO}(2,1)$ . Такий розгляд є формальним, поки не означено гільбертів простір системи. А його будову можна углядіти в груповій структурі класичного опису.

Дуальний простір  $\mathcal{R}$  може розглядати як об'єднання орбіт коприєднаного представлення групи  $\mathcal{P} \otimes \mathrm{SO}(2,1)$ . Оскільки орбіти є однорідними просторами, для їх квантових відповідників можна взяти унітарні нехвідні представлення

(УНП) цієї групи [351]. Тоді квантовим аналогом простору  $\mathcal{R}$  звідне представлення  $\mathfrak{R} = \bigoplus_{\ell, M, q} \mathfrak{H}_M^{(\ell)} \otimes \mathfrak{D}^{(q)}$  групи  $\mathcal{P} \otimes \text{SO}(2,1)$ . Тут  $\mathfrak{H}_M^{(\ell)}$  і  $\mathfrak{D}^{(q)}$  – УНП груп  $\mathcal{P}$  і  $\text{SO}(2,1)$  відповідно; квантові числа  $M, \ell, q$  маркують власні значення операторів Казимира (вони вказані нижче), а  $\bigoplus$  позначає пряму суму за дискретною змінною  $\ell$  та прямий інтеграл за неперервними  $M, q$ . Нарешті, підпростір  $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{R}$ , означений квантовими аналогами в'язей, розглядається як фізичний гільбертів простір системи.

З фізичних міркувань простір  $\mathfrak{R}$  побудуємо з вігнерівських УНП  $\mathfrak{H}_M^{(\ell)}$  власної групи Пуанкаре для додатніх мас  $M > |m_1 - m_2|$  та цілих спінів  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  (півцілі спіни заборонено дискретними симетріями системи):

$$\hat{P}^2 |\Psi(M\ell)\rangle = M^2 |\Psi(M\ell)\rangle, \quad \hat{J}^2 |\Psi(M\ell)\rangle = \ell(\ell + 1) |\Psi(M\ell)\rangle, \quad |\Psi(M\ell)\rangle \in \mathfrak{H}_M^{(\ell)}.$$

Є кілька УНК  $\text{SO}(2,1)$  для власних значень оператора Казимира  $\hat{Q}^2$  [352]:

$$\hat{Q}^2 |\Xi(q)\rangle = Q^2 |\Xi(q)\rangle, \quad Q^2 = q(q + 1), \quad |\Xi(q)\rangle \in \mathfrak{D}^{(q)}.$$

Якщо  $Q^2 \geq 0$  ( $q \geq 0$ ), існує лише дві серії УНП:  $\mathfrak{D}_+^{(q)}$  і  $\mathfrak{D}_-^{(q)}$ . В області  $-1/4 < Q^2 < 0$  ( $-1/2 < q < 0$ ) вони співіснують з додатковою серією  $\mathfrak{D}^{(q, \varepsilon)}$ . Головна серія ( $Q^2 \leq -1/4$ ,  $q = -1/2 + i\omega \in \mathbb{C}$ ) не є приналежною до даної проблеми.

Виберім представлення  $\mathfrak{D}_+^{(q)}$  дискретної серії, що існує для  $q > -1/2$  ( $\mathfrak{D}_-^{(q)}$  дає те ж саме). Тоді квантовий відповідник в'язі (2.3.9):

$$(\hat{I} \otimes \hat{Q}^2 - \hat{J}^2 \otimes \hat{I} - \alpha^2 h(1) \hat{I} \otimes \hat{I}) |\Psi\rangle = 0, \quad |\Psi\rangle \in \mathfrak{R} \quad (2.3.10)$$

( $\hat{I}$  – одиничний оператор) визначає в  $\mathfrak{R}$  підпростір  $\mathfrak{H}' = \bigoplus_{\ell, M} \mathfrak{H}_M^{(\ell)} \otimes \mathfrak{D}_+^{(q_\ell)}$ , де

$$q_\ell = -1/2 + \sqrt{(\ell + 1/2)^2 + \alpha^2 h(1)}. \quad (2.3.11)$$

Побудова фізичного гільбертового простору  $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}'$  потребує для  $\mathfrak{D}_+^{(q)}$  реалізації оператора, що комутує з квантовим відповідником динамічної в'язі (2.3.8). Тому, покладімо  $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'_- \oplus \mathfrak{H}'_+$ , де  $\mathfrak{H}'_-$  віджповідає  $|m_1 - m_2| < M < m_1 + m_2$ , а  $\mathfrak{H}'_+$  віджповідає  $M > m_1 + m_2$ . У підпросторі  $\mathfrak{H}'_-$  квантована динамічна в'язь має

вигляд рівняння масової оболонки системи:

$$\hat{\Phi}|\Psi\rangle := (\hat{I} \otimes \hat{K}_0 - F(\hat{P}^2) \otimes \hat{I})|\Psi\rangle = 0, \quad |\Psi\rangle \in \mathfrak{H}'_- \quad (2.3.12)$$

Генератор  $\hat{K}_0$  підгрупи  $U(1) \subset SO(2,1)$  комутує з  $\hat{\Phi}$  і має дискретний спектр:

$$\hat{K}_0|q; \kappa\rangle = \nu|q; \kappa\rangle, \quad \nu = \kappa + 1 + q, \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, \quad |q; \kappa\rangle \in \mathfrak{D}_+^{(q)}.$$

Разом з (2.3.12) це зводить кожен підпростір  $\bigoplus_M \mathfrak{H}_M^{(\ell)} \otimes |q_\ell; \kappa\rangle \subset \mathfrak{H}'_-$  до  $\tilde{\mathfrak{H}}_{M_{\kappa\ell}}^{(\ell)} \otimes |q_\ell; \kappa\rangle \simeq \mathfrak{H}_{M_{\kappa\ell}}^{(\ell)}$ . Фізичний підпростір  $\mathfrak{H}_- = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \bigoplus_{\kappa=1}^{\infty} \mathfrak{H}_{M_{\kappa\ell}}^{(\ell)}$  має структуру звідного унітарного представлення групи  $\mathcal{P}$ .

Дискретний спектр мас  $M_{\kappa\ell}$  можна представити неявно:

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\lambda, \quad (2.3.13)$$

(співвідношення, зворотне до (2.1.32)), де  $\lambda$  є додатнім розв'язком рівняння:

$$\frac{1 - \lambda^2}{f^2(\lambda)} = \frac{\alpha^2}{\nu^2}, \quad (2.3.14)$$

а  $\nu = \nu_{\kappa\ell} \equiv \kappa + 1 + q_\ell$ .

Для  $\mathfrak{H}'_+$  обираємо реалізацію некомпактного оператора  $\hat{K}_1$  з неперервним спектром. Тоді відповідне рівняння масової оболонки системи зводить  $\mathfrak{H}'_+$  до  $\mathfrak{H}_+ = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \int \bigoplus dr(M) \mathfrak{H}_M^{(\ell)}$ , де прямий інтеграл охоплює проміжок  $m_1 + m_2 < M < \infty$  з деякою мірою  $dr(M)$ .

### 2.3.3. Спектри мас зв'язаних станів

Щоб отримати явний вигляд дискретного спектру, необхідно розв'язати рівняння (2.3.14). Воно має додатній розв'язок за умови, що  $q_\ell$  (2.3.11) є дійсним. Якщо  $h(1) < 0$ , то ця умова приводить до обмеження:

$$\alpha < (2\sqrt{|h(1)|})^{-1}. \quad (2.3.15)$$

Точний р-зок р-ня (2.3.14) можна знайти лише в кількох часткових випадках (див. нижче). В загальному випадку можна використати розклад за константою

взаємодії  $\alpha$  яку слід розглядати як малий параметр. Тоді умова (2.3.15) виконується, і  $-1/2 < q_\ell \in \mathbb{R}$ . В 2-му наближенні розклад  $M_{\kappa\ell}$  в ряд дійсний до  $\alpha^4$ , і дає спектр мас:

$$M \approx m_+ - \frac{m_r \alpha^2}{2n^2} + \frac{m_r \alpha^4}{n^3} \left[ \frac{\gamma}{2\ell + 1} + \frac{1}{2n} \left( f'(1) - \frac{1}{4} - \frac{m_r}{4m_+} \right) \right]. \quad (2.3.16)$$

Тут і далі  $m_\pm = m_1 \pm m_2$ ,  $m_r = m_1 m_2 / m_+$ , квантове число  $n = \kappa + \ell + 1 = 1, 2, \dots$ . Другий член в п.ч. р-ня (2.3.16) є кулонівською (нерелятивістичною) енергією, а третій член є поправкою 2-го порядку, залежною загалом від 2-х довільних сталих  $\gamma \equiv h(1)$  і  $f'(1) = df(\lambda)/d\lambda|_{\lambda=1}$ .

Якщо уточнити квантове число  $\kappa$  з радіальним:  $\kappa \equiv n_r$ , а  $n$  – відповідно з головним квантовим числом а  $n = n_r + \ell + 1$ , то формула (2.3.16) добре узгоджується із спектром мас, отриманим в рамках квазі-релятивістичного підходу до двочастинкової задачі [353]. Але той останній включає додатковий член дарвінівського типу  $C m_r \alpha^4 \delta_{0\ell} / n^3$  що дає внесок у спектр S-станів. Стала  $C$  залежить як від типу взаємодії, так і від правил квантування. В нашому випадку цей член можна ввести шляхом заміни  $\mathfrak{D}_+^{(q_0)}$  у конструкції простору  $\mathfrak{H}'$  на УНК додаткової серії  $\mathfrak{D}^{(q_0, \varepsilon)}$  для якої  $-1/2 < q_0 < 0$  і  $\hat{K}_0 |q_0 \varepsilon; \kappa\rangle = \tilde{\nu}_{\kappa 0} |q_0 \varepsilon; \kappa\rangle$  з  $\tilde{\nu}_{\kappa 0} = \kappa + 1 + \varepsilon$ ,  $|\varepsilon| < |q_0|$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ . Дійсно, випадок  $-1/2 < q_\ell < 0$  виникає лише якщо  $h(1) < 0$  і  $\ell = 0$  (і виконується умова (2.3.15)). Тому лише спектр S-станів можна модифікувати (що й потрібно). Заміна  $\nu_{\kappa 0}$  у п.ч. р-ня (2.3.14) (для  $M_{\kappa 0}$ ) на  $\tilde{\nu}_{\kappa 0}$  з  $\varepsilon = \delta q_0$ ,  $|\delta| < 1$  і врахування рівності  $q_0 \approx -\alpha^2 |h(1)|$  веде до дарвінівського члену з  $C = (1 - \delta) |h(1)|$ .

Нижче подано кілька часткових випадків, що можуть мати фізичне значення. Явно подаються функція  $f(\lambda)$ , стала  $\gamma = h(1)$ , і відповідний точний розв'язок рівняння (2.3.14) – функція  $\lambda(\nu)$  квантового числа

$$\nu = n_r + \frac{1}{2} + \sqrt{(\ell + \frac{1}{2})^2 + \alpha^2 \gamma}. \quad (2.3.17)$$

Хоч розгляд загалом є наближенним, але точні розв'язки р-ня (2.3.14) і відповідні спектри (2.3.13) зручно порівнювати з результатами, отриманими в літературі в рамках інших підходів.

Векторна (електромагнетна) взаємодія:

$$f_v(\lambda) = T_1(\lambda) = \lambda, \quad \gamma_v = h_v(\lambda) = -1, \quad (2.3.18)$$

$$\lambda(\nu) = 1/\sqrt{1 + \alpha^2/\nu^2}. \quad (2.3.19)$$

Цей спектр мас отримано на базі квазі-потенціального підходу [8, 354], з нескінченно-компонентного хвильового р-ня [350], в рамках квазі-класичного квантування двочастинкової релятивістичної задачі [66] і т. д. Він представляє релятивістичний спектр воднево-подібного атома. Дарвінівський член з  $C = m_r/m$ , отриманий в рамках квазі-потенціального підходу [8], відповідає у нашому випадку вибору  $\delta = 1 - m_r/m_+$ , так що  $3/4 < \delta < 1$ .

Скалярна взаємодія:

$$f_s(\lambda) = T_0(\lambda) = 1, \quad \gamma_s = h_s(\lambda) = 1, \quad (2.3.20)$$

$$\lambda = \sqrt{1 - \alpha^2/\nu^2}. \quad (2.3.21)$$

Цей спектр мас має такий же вигляд, як і отриманий в рамках квазі-потенціального підходу [3, 8, 354] та моделі Юкави у варіаційному наближенні [68]. Різниця лише полягає в тому, що взаємодія Юкави дає ціле квантове число  $n = 1, 2, \dots$  замість  $\nu_{\kappa\ell}$ . Крім цього, вона накладає обмеження на константу взаємодії  $\alpha < 1$ . Запропонований тут випадок відповідає “мінімальній” скалярній взаємодії (див. [66]) і не дає обмеження на  $\alpha$ . Інші відомі версії скалярної взаємодії [355] відповідають формальній заміні сталої  $h(1) = 1$  у п.ч. р-нь (2.3.14), (2.3.11) на деяку ф-ю від  $M_{\kappa\ell}$ .

Скалярно-векторна рівно-зважена суперпозиція:

$$f_{sv}(\lambda) = \frac{1}{2}(1+\lambda), \quad \gamma_{sv} = h_{sv}(\lambda) = 0, \quad (2.3.22)$$

$$\lambda = \frac{4n^2 - \alpha^2}{4n^2 + \alpha^2}. \quad (2.3.23)$$

Ця модель представляє додаткову симетрію  $O(4)$  [2]. Навіть більше, у цьому випадку динамічна в'язь (2.3.5) і, отже, спектр (2.3.23) є точний [58]. Він збігається з феноменологічним спектром, представленим в роботах [66, 356].

Тензорна взаємодія 2-го рангу. Гравітація:

$$f_t(\lambda) = f_g(\lambda) = T_2(\lambda) = 2\lambda^2 - 1, \quad (2.3.24)$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{4 - \frac{\nu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu}{\alpha} \sqrt{8 + \nu^2/\alpha^2}}. \quad (2.3.25)$$

Цей випадок міг би відповідати гравітаційній взаємодії з  $\alpha = Gm_1m_2/c\hbar$ , де  $G$  є гравітаційною сталою. Через нелінійність гравітаційного поля стало  $\gamma_t = h_t(1) = -7$ , обчислену згідно з р-нями (2.1.28), (2.1.41), слід замінити на  $\gamma_g = -6$  [4]. Тоді умова (2.3.15) обмежує максимальну масу елементарної частинки величиною  $m_{\max} \leq \sqrt{\frac{c\hbar}{2\sqrt{6}G}} = 0.45 m_{Pl} = 10^{-5}$  гр, близькою до відомої з інших теорій планківської маси  $m_{Pl} = \sqrt{c\hbar/G}$ .

Тензорна взаємодія довільного рангу (спіну) ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ):  $f(\lambda) = T_s(\lambda)$ ,  $h(1) = 1 - 2s^2$ . В гіпотетичному випадку  $s > 2$  р-ня (2.3.14) є занадто складне для точного розв'язання, і тут подамо лише обмеження на константу взаємодії:  $\alpha < (2\sqrt{2s^2-1})^{-1}$ . Воно стає сильнішим з ростом рангу  $s$  поля-носія взаємодії.

#### 2.3.4. Зв'язок з квазі-потенціальними рівняннями.

Розглянемо стаціонарне рівняння Кляйна-Гордона для частинки маси  $m$  у скалярному та векторному потенціалах  $U_s(r)$  та  $U_v(r)$ :

$$\{\mathbf{p}^2 + [m + U_s(r)]^2 - [E - U_v(r)]^2\} \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.3.26)$$

де  $\mathbf{p} = -i\nabla$ . Як зауважив Тодоров, у квазіпотенціальному підході [8, 201] можна побудувати відповідне двочастинкове релятивістичне хвильове рівняння шляхом такої підстановки:

$$E \rightarrow E_M = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad m \rightarrow m_M = \frac{m_1 m_2}{M}. \quad (2.3.27)$$

Отримаємо рівняння типу Шредингера:

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) + [b_M - U_M(r)]\Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.3.28)$$

де

$$b_M \equiv E_M^2 - m_M^2 = \frac{1}{4M^2} [M^2 - m_+^2][M^2 - m_-^2] \quad (2.3.29)$$

– значення квадрату відносного імпульсу на масовій оболонці як ф-я  $M$  [201],

$$U_M(r) = 2[m_M U_s(r) + E_M U_v(r)] + U_s^2(r) - U_v^2(r) \quad (2.3.30)$$

– ефективний потенціал.

У нерелятивістичній границі р-ня (2.3.28) стає звичайним рівнянням Шредингера із потенціалом  $U(r) = U_s(r) + U_v(r)$ , де  $r$  є відстань між частинками.

Р-ня (2.3.28) визначає власні стани і власні значення повної маси  $M$ . Воно є квазі-потенціального типу, тобто ефективний потенціал  $U_M(r)$  залежить (нелінійно) від  $M$ . Послідовне квантово-механічне тлумачення таких рівнянь вимагає деякого ускладнення скалярного добутку і теорії збурень тощо [201].

У випадку векторної чи скалярної кулонівської взаємодії р-ня (2.3.28) збігаються з відомими квазі-потенціальними рівняннями для безспінових частинок [8, 354]. Навіть більше, вони є точно розв'язними, а спектри узгоджуються з квантово-польовими результатами.

Простий рецепт Тодорова охоплює випадки скалярної та векторної взаємодії (та їх суперпозиції). Узагальнення на випадки тензорних взаємодій вищого рангу можна побудувати на основі часо-асиметричних моделей польового типу [3, 4], що розглядалися в п. 2.1.4. Вони ведуть до того ж рівняння типу Шредингера (2.3.28) з квазі-потенціалом

$$U_M(r) = -2m_M f(\lambda) \frac{\alpha}{r} + \gamma \frac{\alpha^2}{r^2}, \quad (2.3.31)$$

де ф-я  $f(\lambda)$  (така, що  $f(1) = 1$ ) та стала  $\gamma$  залежать від тензорної структури взаємодії та описані вище; див. також [4, 8]. Ефективний потенціал (2.3.31) є типу Кратцера:  $U(r) = -A/r + B/r^2$ . Така задача є точно розв'язною [357], а її розв'язок застосовний і до нашого випадку, з тим лише застереженням, що коефіцієнт  $A$  залежить від  $M$  (тобто від спектрального параметру). Спектр мас цієї задачі (2.3.28), (2.3.29), (2.3.31) точно збігається із отриманим в рамках часо-асиметричних моделей, і описаним р-нями (2.3.13), (2.3.14) і (2.3.17).

### 2.3.5. Евристичне врахування спінових ефектів

Слабко релятивістичні системи двох частинок із спіном  $\frac{1}{2}$ , що взаємодіють через векторне або/і скалярне поле, можна описати узагальненим гамільтоніаном типу Фермі-Брайта [207, 274]; див. п. 1.1.1–3. Він містить релятивістичні кінематичні члени, незалежні та залежні від спіну поправки до взаємодії. Деякі з цих членів є сингулярні, і можуть бути враховані лише пертурбативно.

В цьому розділі не розглядається гамільтоніан Фермі-Брайта. Натомість, щоб врахувати спінові ефекти, пропонується модифікувати релятивістичне хвильове рівняння (2.3.28), (2.3.29), (2.3.31). Хоча воно має просту структуру, однак неявно враховує (через нелінійну залежність від  $M$ ) релятивістичні кінематичні члени та незалежні від спіну поправки до кулонівської взаємодії. Тому бракує лише врахувати залежну від спіну частину  $W$  квазірелятивістичного гамільтоніану. Для скалярної та векторної взаємодій вона має вигляд [207, 274]:

$$W_s = -\frac{1}{4} \mathbf{L} \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}_1}{m_1^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_2}{m_2^2} \right) \frac{U'_s(r)}{r}, \quad (2.3.32)$$

$$\begin{aligned} W_v = & \frac{1}{4} \mathbf{L} \cdot \left( \left[ \frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \right] \boldsymbol{\sigma}_1 + \left[ \frac{1}{m_2^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \right] \boldsymbol{\sigma}_2 \right) \frac{U'_v(r)}{r} \\ & + \frac{1}{12m_1 m_2} \left( \frac{1}{r} U'_v(r) - U''_v(r) \right) T + \frac{1}{6m_1 m_2} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \Delta U_v(r), \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

де  $\mathbf{L} = -i \mathbf{r} \times \nabla$  – оператор орбітального моменту імпульсу,  $\boldsymbol{\sigma}_a$  – спіновий оператор, що діє на спінові змінні  $a$ -ї частинки, а  $T = 3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}) - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$  – тензорний оператор. У випадку гравітаційної взаємодії (з нерелятивістичним потенціалом  $U_g(r) = -\alpha_g/r$ , де  $\alpha_g = Gm_1 m_2$ ) маємо [204]:

$$\begin{aligned} W_g = & \frac{1}{4} \mathbf{L} \cdot \left( \left[ \frac{3}{m_1^2} + \frac{4}{m_1 m_2} \right] \boldsymbol{\sigma}_1 + \left[ \frac{3}{m_2^2} + \frac{4}{m_1 m_2} \right] \boldsymbol{\sigma}_2 \right) \frac{\alpha_g}{r^3} \\ & + \frac{\alpha_g}{4m_1 m_2 r^3} T + \frac{2\pi\alpha_g}{3m_1 m_2} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

Тепер, щоб побудувати двоферміонне рівняння, замінимо в ефективному потенціалі  $U_M$  (п-ня (2.3.30) або (2.3.31)) статичний потенціал  $U$  на  $\tilde{U} = U + W$ .

У випадку кулоно-подібної взаємодії спінові члени  $W$  вважаються малими у порівнянні з нерелятивістичним потенціалом  $U(r) = -\alpha/r$ . Тому можна наближено модифікувати ефективний потенціал (2.3.31) так:

$$U_M(r) \rightarrow \tilde{U}_M(r) \approx U_M(r) + 2m_M f(\lambda)W. \quad (2.3.35)$$

В результаті отримаємо ефективне двоферміонне квазі-потенціальне рівняння

$$\left\{ \mathbf{p}^2 - 2m_M f(\lambda) \left( \frac{\alpha}{r} - W \right) + \gamma \frac{\alpha^2}{r^2} - b_M \right\} \Psi = 0, \quad (2.3.36)$$

що не є точно розв'язним, і потребує застосування наблизених методів.

Малу спінову поправку можна врахувати за теорією збурень. При цьому слід мати на увазі наступне. По-перше, вихідне (незбурене) р-ня (2.3.28) неправильно описує S-стани. Тому можна знехтувати членами з  $\delta$ -функціями в  $W$  (тобто останній член в п.ч. р-ня (2.3.34) та останній член в п.ч. р-ня (2.3.33) в електромагнетному випадку), оскільки вони дають внесок лише в S-стани. По-друге, теорія збурень потребує деякої модифікації за-через залежність казі- потенціалу від  $M$ .

Шляхом підстановки  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}/R_M$ ,  $\mathbf{p} = R_M \boldsymbol{\pi}$ , де  $R_M = \alpha m_M f(\lambda)$ , представимо р-ня (2.3.36) у безрозмірному гамільтоновному вигляді:

$$H\Psi = \varepsilon\Psi, \quad \text{де} \quad H \equiv H^{(0)} + H^{(1)}, \quad (2.3.37)$$

$$H^{(0)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 - \frac{1}{\rho} \quad (2.3.38)$$

– базовий кулонівський гамільтоноіан,

$$H^{(1)} = \alpha^2 \Gamma, \quad \text{де} \quad \Gamma = \frac{\gamma}{2\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \Sigma(\mathbf{n}) \quad (2.3.39)$$

– збурення (оскільки  $\alpha$  вважається малим параметром), а

$$\varepsilon = \frac{b_M}{2R_M^2} = \frac{\lambda^2 - 1}{2\alpha^2 f^2(\lambda)} \quad (2.3.40)$$

– безрозмірна енергія (тобто спектральний параметр).

З достатньою точністю (до членів  $\sim O(\alpha)$ ) останній член  $\Gamma$  рівний  $W/(\alpha^3 R_M)$  і, з врахуванням наблизеної рівності  $M \approx m_+$  у малих членах, не

залежить від  $M$ . Оператор  $\Sigma$ , що діє на кутові та спінові змінні, має загальний вигляд:

$$\Sigma = [(\xi - \delta^2) \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ + 2\eta\delta \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}_- + \zeta(1 - \delta^2)T] / 16, \quad (2.3.41)$$

де  $\boldsymbol{\sigma}_{\pm} = \boldsymbol{\sigma}_1 \pm \boldsymbol{\sigma}_2$ ,  $\delta = m_-/m_+$ , а сталі  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$  для скалярної, векторної і гравітаційної взаємодій є такими:

$$\xi_s = -1, \quad \eta_s = 1, \quad \zeta_s = 0, \quad (2.3.42)$$

$$\xi_v = 3, \quad \eta_v = -1, \quad \zeta_v = 1, \quad (2.3.43)$$

$$\xi_g = 7, \quad \eta_v = -3, \quad \zeta_v = 1. \quad (2.3.44)$$

### 2.3.6. Базисні стани і теорія збурень 1-го порядку

Базисний гамільтоніан (2.3.38) комутує з операторами орбітального моменту імпульсу  $\mathbf{L}$ , повного спіну  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_+$ , повного моменту імпульсу  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_+$  і парності  $P$ .

Щоб записати базисні власні функції  $\Psi^{(0)}(\boldsymbol{\rho})$ , використаємо кутові “біспінорні гармоніки”  $\mathcal{Y}^i(\mathbf{n})$  ( $i = A, 0, -, +$ ). Їх властивості та явне  $2 \times 2$ -матричне представлення [79] подано в додатку А.

Тепер чотири незалежні базисні власні функції  $\Psi_i^{(0)}(\boldsymbol{\rho})$  ( $i = A, 0, -, +$ ) гамільтоніану  $H^{(0)}$  можна обрати так:

$$\Psi_{A,0}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\rho} u_{n,j}(\rho) \mathcal{Y}^{A,0}(\mathbf{n}), \quad \Psi_{\mp}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\rho} u_{n,j \pm 1}(\rho) \mathcal{Y}^{\mp}(\mathbf{n}), \quad (2.3.45)$$

де  $u_{n,\ell}(\rho)$  – розв’язок радіальної кулонівської задачі  $H_\ell u_{n,\ell}(\rho) = \varepsilon^{(0)} u_{n,\ell}(\rho)$  з ефективним гамільтоніаном

$$H_\ell = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right\} - \frac{1}{\rho} \quad (2.3.46)$$

і безрозмірною власною енергією  $\varepsilon^{(0)} = -1/(2n^2)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Зауважимо, що базисні власні функції  $\Psi_{A,0}^{(0)}(\boldsymbol{\rho})$  мають парність  $P = (-)^j$ , а  $\Psi_{\mp}^{(0)}(\boldsymbol{\rho})$  – парність  $P = (-)^{j+1}$ . Функція  $\Psi_A^{(0)}(\boldsymbol{\rho})$  описує синглетний ( $s = 0$ ,  $\ell = j$ ) стан, тоді як  $\Psi_{0,\mp}^{(0)}(\boldsymbol{\rho})$  відповідає триплетним ( $s = 1$ ,  $\ell = j, j \pm 1$ ) станам.

Обчислимо поправку 1-го порядку  $\varepsilon^{(1)}$  до енергії  $\varepsilon \approx \varepsilon^{(0)} + \alpha^2 \varepsilon^{(1)}$ . Повний гамільтоніан  $H = H^{(0)} + \alpha^2 \Gamma$  комутує з операторами парності  $P$  та повним моментом імпульсу  $\mathbf{J}$ . Хвильові ф-ї  $\Psi(\boldsymbol{\rho})$  можна обрати як власні ф-ї операторів  $\mathbf{J}^2$ ,  $J_3$  та  $P$ , і розклади на станами  $\Psi_{A,0}^{(0)}$ , якщо  $P = (-)^j$ , або за  $\Psi_{\mp}^{(0)}$ , якщо  $P = (-)^{j\mp 1}$ . У кожному з випадків базисні власні значення  $\varepsilon^{(0)}$  двічі вироджені. Тому в 1-му порядку теорії збурень маємо:

$$\varepsilon_{(i,k)}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[ \Gamma_{ii} + \Gamma_{kk} \pm \sqrt{(\Gamma_{ii} - \Gamma_{kk})^2 + 4\Gamma_{ik}^2} \right] \quad (i \neq k)$$

з  $i = A$ ,  $k = 0$ , якщо  $P = (-)^j$ , та  $i = -, k = +$ , якщо  $P = (-)^{j+1}$ , де матриця  $\Gamma = [\Gamma_{ik}]$  означена через матричні елементи так:

$$\Gamma_{ik} = \langle i | \Gamma | k \rangle = \int d\boldsymbol{\rho} \operatorname{Tr} \left( \Psi_i^\dagger(\boldsymbol{\rho}) \Gamma \Psi_k(\boldsymbol{\rho}) \right).$$

З врахуванням (2.3.39) і (2.3.45) отримаємо:

$$\Gamma = \frac{\gamma}{2} \langle j | \rho^{-2} | j \rangle \mathbf{1} + \langle j | \rho^{-3} | j \rangle \begin{bmatrix} \langle A | \Sigma | A \rangle & \langle A | \Sigma | 0 \rangle \\ \langle 0 | \Sigma | A \rangle & \langle 0 | \Sigma | 0 \rangle \end{bmatrix}$$

якщо  $P = (-)^j$ , і

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} \langle j+1 | \rho^{-2} | j+1 \rangle & 0 \\ 0 & \langle j-1 | \rho^{-2} | j-1 \rangle \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \langle j+1 | \rho^{-3} | j+1 \rangle \langle - | \Sigma | - \rangle & \langle j+1 | \rho^{-3} | j-1 \rangle \langle - | \Sigma | + \rangle \\ \langle j-1 | \rho^{-3} | j+1 \rangle \langle + | \Sigma | - \rangle & \langle j-1 | \rho^{-3} | j-1 \rangle \langle + | \Sigma | + \rangle \end{bmatrix} \end{aligned}$$

якщо  $P = (-)^{j+1}$ , де

$$\langle i | \Sigma | k \rangle = \int d\boldsymbol{n} \operatorname{Tr} \left( \mathcal{Y}_i^\dagger(\boldsymbol{n}) \Sigma \mathcal{Y}_k(\boldsymbol{n}) \right), \quad \langle \ell' | f(\rho) | \ell \rangle = \int d\rho u_{n,\ell'}(\rho) f(\rho) u_{n,\ell}(\rho).$$

Зокрема,

$$\langle \ell | \rho^{-2} | \ell \rangle = \frac{1}{n^3(\ell + \frac{1}{2})}, \quad \langle \ell | \rho^{-3} | \ell \rangle = \frac{\langle \ell | \rho^{-2} | \ell \rangle}{\ell(\ell + 1)}, \quad (2.3.47)$$

$$\langle \ell+1 | \rho^{-2} | \ell-1 \rangle = 0, \quad \langle \ell+1 | \rho^{-3} | \ell-1 \rangle = 0. \quad (2.3.48)$$

Рівності (2.3.47) добре відомі в літературі (див. напр. [358]), а (2.3.48) можна обчислити за формулами, даними в [358, *Математические приложения*, § f].

Шляхом врахування (2.3.47), (2.3.48) та обчислення матричних елементів  $\langle i|\Sigma|k\rangle$  з допомогою р-нь (2.3.41)–(2.3.44), (A.2) отримаємо  $\Gamma$ ,  $i$ , отже, поправку  $\varepsilon^{(0)}$  до безрозмірної енергії. Тоді, врахування (2.3.13), (2.3.40) та розклад повної маси  $M$  в ряд за  $\alpha$  дає спектр мас 1-го порядку (тобто з точністю до  $\alpha^4$ ).

Згідно з рівностями (2.3.47) і (2.3.48) матриця  $\Gamma$  не є діагональною якщо  $P = (-)^j$ . Тому відповідні стани 1-го порядку є сумішшю синглетних ( $s = 0, \ell = j$ ) і триплетних ( $s = 1, \ell = j$ ) станів. У випадку  $P = (-)^{j+1}$  матриця  $\Gamma$  діагональна, і триплетні ( $s = 1, \ell = j \pm 1$ ) стани не змішуються. Тому спектри 1-го порядку зручно класифікувати за значеннями  $j$  та  $\ell$ . Ці спектри можна отримати з р-ня (2.3.16) шляхом підстановки:

$$\gamma \rightarrow \gamma + \phi(\ell, j) \quad (2.3.49)$$

де ф-я  $\phi(\ell, j)$  залежить як від спінового стану системи, так і від тензорного рангу поля-носія взаємодії. Маємо:

$$\phi_s = \begin{cases} \frac{1+\delta^2 \pm \sqrt{(1+\delta^2)^2 + 16\delta^2\ell(\ell+1)}}{8\ell(\ell+1)}, & \ell = j, \\ \frac{1+\delta^2}{4\ell}, & \ell = j+1, \\ -\frac{1+\delta^2}{4(\ell+1)}, & \ell = j-1, \end{cases} \quad (2.3.50)$$

$$\phi_v = \begin{cases} -\frac{1 \pm \sqrt{1+4\delta^2\ell(\ell+1)}}{4\ell(\ell+1)}, & \ell = j, \\ -\frac{1}{2\ell} - \frac{1-\delta^2}{2(2\ell-1)}, & \ell = j+1, \\ \frac{1}{2(\ell+1)} + \frac{1-\delta^2}{2(2\ell+3)}, & \ell = j-1, \end{cases} \quad (2.3.51)$$

$$\phi_g = \begin{cases} -\frac{3(1 \pm \sqrt{1+4\delta^2\ell(\ell+1)})}{4\ell(\ell+1)}, & \ell = j, \\ -\frac{3}{2\ell} - \frac{1-\delta^2}{2(2\ell-1)}, & \ell = j+1, \\ \frac{3}{2(\ell+1)} + \frac{1-\delta^2}{2(2\ell+3)}, & \ell = j-1. \end{cases} \quad (2.3.52)$$

Р-ня (2.3.16), (2.3.49) і (2.3.51) відтворюють спектр мюонію, вперше виведений з двоферміонного р-ня БС з допомогою квазі-потенціальних наближень [202]. Якщо  $m_1 = m_2 = m$ , отримаємо відомий спектр позитронію [196].

### 2.3.7. Точно розв'язна модель спектру з точністю до $\alpha^4$

Врахування у р-ні Шредингера (2.3.37) спінової поправки (2.3.39) пертурбативним шляхом обумовлено її залежністю від  $\rho$  як  $\rho^{-3}$ . Тут запропонована точно розв'язна модель, що відтворює цей результат для спектру.

Модифікуємо оператор (2.3.39):

$$\Gamma \longrightarrow \tilde{\Gamma} = \frac{Z(\mathbf{n})}{2\rho^2}, \quad \text{де} \quad Z(\mathbf{n}) = \gamma + 2\{\Sigma(\mathbf{n})/\mathbf{L}^2\}_{\text{ordered}}.$$

Оператор  $Z$  діє на кутові та спінові змінні. Він не означений на S-станах, але їх виключено з розгляду від початку. На інших станах  $Z$  має бути ермітовим, отже його слід впорядкувати – з огляду на те, що  $\Sigma(\mathbf{n})$  і  $\mathbf{L}^2$  не комутують.

Легко переконатися з допомогою рівностей (2.3.47)–(2.3.48), що в 1-му порядку теорії збурень Гамільтоніан  $\tilde{H} = H^{(0)} + \alpha^2 \tilde{\Gamma}$  має той же ж спектр, що й вихідний гамільтоніан (2.3.37)–(2.3.39). Цей результат не залежить від способу впорядкування  $Z$ .

Далі показано, що нове р-ня Шредингера є точно розв'язним. Звичайно, точний розв'язок і відповідний спектр залежить від способу впорядкування. Для прикладу, можна розглянути такі правила впорядкування:

$$\{\Sigma/\mathbf{L}^2\}_{\text{ordered}} = \frac{1}{2}(\Sigma|\mathbf{L}|^{-2} + |\mathbf{L}|^{-2}\Sigma), \quad (2.3.53)$$

$$\{\Sigma/\mathbf{L}^2\}_{\text{ordered}} = |\mathbf{L}|^{-1}\Sigma|\mathbf{L}|^{-1} \quad (2.3.54)$$

$$\{\Sigma/\mathbf{L}^2\}_{\text{ordered}} = \int_0^\infty dt \exp(-\frac{1}{2}t\mathbf{L}^2)\Sigma \exp(-\frac{1}{2}t\mathbf{L}^2), \quad (2.3.55)$$

де  $|\mathbf{L}| = \sqrt{\mathbf{L}^2}$ . Останнє правило навіяне фейнманівським представленням оберненого оператора:  $A^{-1} = \int_0^\infty dt \exp(-tA)$ .

Радіальну редукцію р-ня Шредингера здійснимо вибором хвильової функції  $\Psi(\mathbf{r})$  як власної ф-ї операторів  $\mathbf{J}^2$ ,  $J_3$  and  $P$ :

$$\Psi(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\rho} \sum_i \psi_i(\rho) \mathcal{Y}^i(\mathbf{n}). \quad (2.3.56)$$

Тут сума в п.ч. р-ня (2.3.56) пробігає  $i = A, 0$ , якщо  $P = (-)^j$ , і  $i = -, +$ , якщо  $P = (-)^{j+1}$ . Якщо підставити ф-ю (2.3.56) в нове р-ня Шредингера та зібрати

коєфіцієнти при гармоніках  $\mathcal{Y}^A$  і  $\mathcal{Y}^0$  (або при  $\mathcal{Y}^-$  і  $\mathcal{Y}^+$ ), отримаємо пару рівнянь, представлених в такій матричній формі:

$$\mathbf{H}\Psi(\rho) = \varepsilon\Psi(\rho), \quad \text{де } \Psi(\rho) = [\psi_i(\rho)]$$

– дво-компонентна хвильова ф-я, а гамільтоніан

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \mathbf{K} \right\} - \frac{1}{\rho}, \quad \text{де } \mathbf{K} = [K_{ik}] = [\langle i | \mathbf{L}^2 + \alpha^2 Z | k \rangle].$$

Вигляд симетричної  $2 \times 2$ -матриці  $\mathbf{K}$  залежить від парності і тензорної структури взаємодії:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} j(j+1) + \alpha^2 \gamma & \frac{\alpha^2 \eta \delta}{2\sqrt{j(j+1)}} \\ \frac{\alpha^2 \eta \delta}{2\sqrt{j(j+1)}} & j(j+1) + \alpha^2 \left( \gamma - \frac{\xi - \delta^2 - \zeta(1-\delta^2)}{4j(j+1)} \right) \end{bmatrix} \quad (2.3.57)$$

для парності  $P = (-)^j$ ,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (j+1)(j+2) + \alpha^2 \left( \gamma - \frac{1}{4(j+1)} \left[ \xi - \delta^2 + \zeta \frac{1-\delta^2}{2j+1} \right] \right), & \alpha^2 \zeta \frac{1-\delta^2}{4(2j+1)} \frac{3\sqrt{j(j+1)}}{j(j+1)+1} \\ \alpha^2 \zeta \frac{1-\delta^2}{4(2j+1)} \frac{3\sqrt{j(j+1)}}{j(j+1)+1}, & (j-1)j + \alpha^2 \left( \gamma + \frac{1}{4j} \left[ \xi - \delta^2 - \zeta \frac{1-\delta^2}{2j+1} \right] \right) \end{bmatrix} \quad (2.3.58)$$

для  $P = (-)^{j+1}$ . Зауважимо, що загалом, коли  $\zeta \neq 0$  (включно з випадками векторної та гравітаційної взаємодії; див. р-ня (2.3.43), (2.3.44)) оператори  $\Sigma$  і  $\mathbf{L}^2$  не комутують. Тому для обчислення  $\mathbf{K}$  обираємо правило впорядкування (2.3.55). Правила (2.3.53) і (2.3.54) дають елементи матриці  $\mathbf{K}$ , сингулярні при  $j = 1$  (помимо  $j = 0$ ). Але така сингулярність не має фізичних підстав.

Застосувавши ортогональне перетворення, матрицю  $\mathbf{K}$  можна діагоналізувати, так що зв'язані р-ня типу Паріти-Швінгера розчеплюються у пару одновимірних рівнянь Шредінгера з гамільтоніанами  $H_{\tilde{\ell}_{(i,k)}}$  вигляду (2.3.46), але з нецілими  $\tilde{\ell}_{(i,k)}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}_{(i,k)} &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + K_{(i,k)}} \quad (i \neq k), \\ K_{(i,k)} &= \frac{1}{2} \left[ K_{ii} + K_{kk} \pm \sqrt{(K_{ii} - K_{kk})^2 + 4K_{ik}^2} \right], \end{aligned}$$

де  $i = A, k = 0$ , якщо  $P = (-)^j$ , і  $i = -, k = +$ , якщо  $P = (-)^{j+1}$ .

Ці р-ня є точно розв'язні і ведуть до спектру мас (2.3.13), (2.3.14), але з іншим ефективним “головним квантовим числом”:

$$\nu \longrightarrow \tilde{\nu} = \tilde{\nu}(n_r, j, P) = n_r + \tilde{\ell}_{(i,k)} + 1.$$

Тут ці досить громіздкі формули не подано.

## 2.4. Висновки

Формалізм інтегралів дії типу Фоккера виник як один з перших підходів до РТПВ. Хоча він тісно пов'язаний з класичною теорією поля, його практичне застосування ускладнюється нелокальністю рівнянь руху. З іншого боку, є низка інших підходів, математично близьких до нерелятивістичної механіки. Вони допускають побудову значно простіших (в т.ч. точно розв'язних), але феноменологічних моделей релятивістичних систем взаємодіючих частинок.

Запропонований тут клас часо-асиметричних двочастинкових моделей можна розглядати як компроміс між теорією поля та релятивістичною механікою систем з прямою взаємодією. Вкажемо основні переваги цих моделей. По-перше, це точна пуанкарє-інваріантність. По-друге – існування підкласу моделей з теоретико-польовою інтерпретацією, та можливість напів-феноменологічного врахування тих ефектів, що не виводяться з перших принципів (наприклад, конфайнмент; див. наступний ролздріл). По-третє – описова гнучкість: існування лагранжевого і гамільтонового описів, як явно коваріантних, так і тривимірних. І по-четверте – точна інтегровність у квадратурах.

Дослідження в п. 2.2.1 векторної, тобто відомої СРГ-моделі, показало нові її риси: для заданих інтегралів руху р-ня Гамільтона допускають кілька розв'язків. Один з них – т.зв. регулярний – переходить в нерелятивістичній граници в розв'язок кулонівської задачі. Саме цей р-зок вперше описано Кюнзле в [51], хоч для ультрарелятивістичної області подані тут траєкторії частинок інші – вони гладкі, на відміну від знайдених Кюнзле (який, мабуть, допустив помилку при зшиванні розв'язку в точках повороту). Інші розв'язки є істотно релятивістичними, і мо-

жуть описувати незвичну поведінку системи, наприклад, асимптотичний вихід масивних частинок на швидкість світла.

Далі, світові лінії частинок є гладкими і часоподібними або всюди, або за винятком окремих точок, в яких частинки досягають швидкості світла. Ці точки і ділянки між ними відповідають зближенню частинок на відстань порядку класичного радіусу  $r_0 = \alpha/m$ , і є особливими – вони випадають з лагранжевого опису. В рамках гамільтонового опису світові лінії можна гладко продовжити через особливі точки. Нееквівалентність між лагранжевою та гамільтоновою картинами можна формально усунути, якщо при переході цих точок допустити зміну знаку маси однієї чи двох частинок.

Це стосується і моделі із скалярною взаємодією, дослідженої тут вперше: вона теж виявляє один регулярний розв'язок, та значно більше особливих.

Для моделі з рівно-зваженою суперпозицією скалярної та векторної взаємодій виявлено додаткову (внутрішню) симетрію, аналогічну до симетрії нерелятивістичної задачі. Завдяки цьому знайдено релятивістичний аналог вектору Рунгे-Ленца, і побудовано замкнені траєкторії частинок без інтегрування.

Моделі із тензорним взаємодіями вищих рангів дуже громіздкі, і для них в п. 2.1.4 і 2.2.3 застосовано 2-ге наближення за константою взаємодії  $\alpha$ . Це наближення автоматично відбирає серед усіх розв'язків лише регулярний. Відповідні траєкторії частинок мають форму розетки із зсувом перигелію, залежним від тензорного рангу взаємодії. Це ж стосується і гравітаційної взаємодії, часо-асиметричну модель якої побудовано в п. 2.1.5 на базі фоккерівського ВТ-підходу. Результати п. 2.2.3 узгоджуються з отриманими в рамках квазірелятивістичних підходів до РТПВ (див. [186, 254]).

Реформулювання в п. 2.3.1 явно коваріантного канонічного опису часо-асиметричних моделей в 2-му наближенні за  $\alpha$  на алгебричну мову дало змогу в п. 2.3.2 прокvantувати класичну задачу за теоретико-груповою схемою. Неоднозначність квантування виявилася мінімальною але корисною – вона стосувалася S-станів, і дозволила відтворити у спектрі дарвінівський член.

Отримані в п. 2.3.3 спектри мас для векторної та скалярної взаємодій уза-

гальнюють точні результати для цих моделей в  $M_2$  [58] на випадок  $M_4$ . Вони узгоджуються (принаймні в 2-му наближенні) з результатами, отриманими з КТП в рамках квазі-релятивістичного та квазі-потенціального наближень. Для вищих тензорних взаємодій і гравітації спектри отримано вперше.

В п. 2.3.4 встановлено зв'язок квантованих часо-асиметричних моделей з квазі-потенціальними рівняннями Тодорова для безспінових частинок із електромагнетною та скалярною взаємодіями. Це дало змогу узагальнити рівняння Тодорова на випадок тензорних взаємодій вищих рангів, включно із гравітаційною.

Наступна модифікація цих рівнянь в п. 2.3.5 – для опису двоферміонної системи. Для цього використовуються відомі з КТП оператори, що описують спін-залежні поправки до скалярної, векторної і гравітаційної взаємодій [84, 204, 207, 274]. Спочатку (в п. 2.3.6) ці оператори тлумачаться пертурбативно, що дає спектр міоонію та його скалярного і гравітаційного відповідників з точністю до  $\alpha^4$ . Тоді (в п. 2.3.7) рівняння модифіковано так, щоб вони стали точно розв'язними і давали правильний (з тією ж точністю) спектр мас. Ці рівняння можуть бути корисні для врахування вищих ніж до  $\alpha^4$  (напр. радіаційних) поправок до міжчастинкової взаємодії з допомогою теорії збурень 1-го порядку.

## РОЗДІЛ 3

# ПОТЕНЦІАЛЬНА МОДЕЛЬ МЕЗОНІВ ТИПУ ФОККЕРА

В підрозділі 1.2 дано огляд відомих в літературі релятивістичних потенціальних моделей. Серед них найбільш елегантними є простий релятивістичний осцилятор (з модифікаціями) [27, 284, 290] та струнні моделі [263, 283, 359] для опису легких мезонів; п. 1.2.4. Вони ведуть точно чи асимптотично (при  $\ell \gg 1$ ) до формули (1.2.5) з  $\varkappa = 2$ . Крім цього, струнні моделі пов'язують нахил траєкторій з натягом струни:  $\sigma = ka$ , де коефіцієнт нахилу  $k = 2\pi \approx 6.3$  (див. р-ня (1.2.6)), так що значення  $a = 0.18 \text{ ГeB}^2$  узгоджується з експериментом.

Подальший розвиток потенціальних моделей пов'язаний із релятивістичними узагальненнями рівняння Шредінгера з утримним (корнельським (1.2.2) або складнішим) потенціалом: одно- [296–298, 301] та двочастинковими [14, 15, 22, 29, 88, 106, 360] р-нями Дірака тощо [23, 24, 280]. Ці моделі охоплюють опис важких та легких гадронів, та дають в основному асимптотично лінійні траєкторії (1.2.5) з нахилом  $\sigma = ka$ ,  $k = 4 \div 8$  (див. р-ня (1.2.11), (1.2.7)), та з кроковим коефіцієнтом для дочірніх траєкторій  $\varkappa = 2$ . Однак деякі мезони не вписуються в опис із виродженням осциляторного  $(\ell+2n_r)$ -типу [14, 283]. Більш адекватним до експерименту видається значення  $\varkappa = 1$ , що дає қулоно-подібне виродження  $(\ell+n_r)$ -типу. Однак його важко вивести теоретично. Наприклад, в масових формулах, виведених з рівняння типу Дірака, було отримано в асимптотиці  $\ell \gg 1$  кроковий коефіцієнт  $\varkappa = 1$  лише з допомогою накладених додатково правил відбору [280]. В такий спосіб отримано задовільний опис  $\pi$ -,  $\rho$ - [281] та K-траєкторій [293].

Завданням цього розділу є побудова релятивістичної потенціальної моделі, що охоплює опис як важких, так і легких мезонів з універсальним значенням параметру  $a$  (т.зв. натягу струни), і в асимптотиці  $\ell \gg 1$  відтворює лінійні траєкторії Редже (1.2.5) та вежову структуру спектру.

Можливий шлях побудови релятивістичних потенціальних моделей пролягає через класичну теорію поля і пов'язаний з нею формалізм інтегралів типу Фоккера. Що стосується взаємодії кварків, то тут слід було б виходити з класичних рівнянь Янга-Міллса. Однак розв'язки цих рівнянь, що дають конфайнмент, не відомі в літературі. Навіть більше, є пошириною думка, що таких розв'язків не існує через істотно квантову природу конфайнменту. Але це стосується лише стандартної теорії Янга-Міллса. Існують, однак, різні нестандартні теорії ефективних калібрувальних полів, пов'язаних з КХД. Ці теорії можуть служити джерелом утримних взаємодій між кварками. Вони повинні бути доповнені описом кварків як точкових частинок із внутрішніми ступенями вільності, пов'язаних із кольором.

Цей розділ починається з опису класичної механіки релятивістичної точкової частинки в неабелевому калібрувальному полі, заданої інтегралом дії. На відміну від роботи Балахандрана [361], тут лагранжіан містить довільну функцію, що описує зв'язок внутрішніх (кольорових) змінних частинки із калібрувальним полем. Якщо зв'язок нелінійний, то в рівняннях руху замість маси вільної частинки з'являється інтеграл руху, залежний від кольорових змінних. Це може служити класичною моделлю генерації динамічної (можливо – конституентної) маси кварків. У випадку лінійного зв'язку вона зводиться до вільночастинкової (струмової) маси.

Запропонований тут лагранжів опис частинки в неабелевім полі має і самостійне значення. Зокрема, його було застосовано в роботах [100, 101] до випадку калібрувальної групи Лоренца для опису частинки у полі діона.

Далі розглядається стандартна і нестандартна класичні теорії Янга-Міллса. Остання базується на ефективному лагранжіані [104], отриманому в результаті вивчення інфрачервоної поведінки глюонного пропагатора в КХД [103]. В п. 3.1.5

показано, що шляхом абелевої редукції теорія зводиться до простішої версії, розвинутої раніше Кіскісом з феноменологічних міркувань [102]. Теорія приводить до польових рівнянь 4-го ступеня. Для них отримано запізнену та часо-симетричну функції Гріна. Обидві дають взаємодію утримного типу, і в статичній границі приводять до лінійного потенціалу. Далі, вживаючи ці функції Гріна, буде отримано часо-симетричну та часо-асиметричну дії типу Фоккера. Перша вже відома в літературі. Дві еквівалентні версії цієї дії було запропоновано Рівакобою [44] та Вейссом [45]. Варто зазначити, що обидва автори виходили із загальних зasad РТПВ, без використання теоретико-польових міркувань.

Часо-симетрична модель приводить до нелокальної в часі динаміки, зі всіма пов'язаними із цим труднощами. Вона буде вивчатися в підрозділі 3.3. Але раніше, у підрозділі 3.2, буде побудовано часо-асиметричну дію типу Рівакоби-Вейssa – вона простіша від оригіналу, і буде досліджена із використанням розвинутих в розділі 2 лагранжевого та гамільтонового описів та засобів аналізу.

Часо-асиметричний аналог дії Рівакоби-Вейssa дає класичний релятивістичний опис далекосяжної утримної взаємодії між кварками. Її можна доповнити дією Старушкевича-Рудда-Гілла, що описує класичну часо-асиметричну абелеву версією короткосяжної взаємодії 1-глюонного обміну. Така модель є більш громіздкою, але розв'язною. Модифікована модель у статичній границі дає корнельський потенціал (1.2.2), і тому придатна для опису важких мезонів.

В п. 3.2.4-6 буде здійснено квантування моделі, і отримані спектри мас важких та легких мезонів порівнюватимуться з дослідними даними.

Наперед зазначимо, що в асимптотиці  $\ell \gg 1$  модель природньо відтворює спектральну формулу (1.2.5) з бажаним кроковим коефіцієнтом  $\kappa = 1$ , але для нахилу траєкторій Редже  $\sigma = ka \approx 1.15 \text{ GeV}^2$  натяг струни  $a$  не є універсальним через занадто великий коефіцієнт  $k = 3\sqrt{6} \approx 10.4$ .

Тому слід розглянути модифіковану модель Рівакоби-Вейssa – інтегралу дії типу Фоккера із скалярною утримною взаємодією. Виявиться, однак, що часова нелокальність такої моделі є неуникненною, оскільки вона не має часо-асиметричного відповідника. Тому в підрозділі 3.3 вивчитиметься часо-

симетрична модель Рівакоби-Вейсса та її модифікації.

Результати цього розділу опубліковані в статтях [6, 7, 16, 24], матеріалах і тезах конференцій [26, 28, 31, 50], та препрінтах [172, 173, 184].

### 3.1. Класична механіка релятивістичної кольорової частинки в полі Янга-Міллса

#### 3.1.1. Лагранжева динаміка частинки на головній в'язці

У цьому пункті розглянемо класичну механіку релятивістичної точкової частинки з внутрішніми ступенями вільності типу кольору в зовнішньому неабелевому калібрувальному полі. Конфігураційним простором такої частинки є головна волокниста в'язка  $\mathfrak{P}$  над простором Мінковського  $\mathbb{M}_4$  із деякою структурною групою  $\mathcal{G}$  [362, 363] (в нашему випадку  $SU(3)$ ). Точки в'язки  $\wp \in \mathfrak{P}$  можна описати локальними координатами  $(x, g) = (x^\mu, g^i)$ ,  $\mu = \overline{0, 3}$ ,  $i = \overline{1, \dim \mathcal{G}}$ , де  $x \in \mathbb{M}_4$ ,  $g \in \mathcal{G}$ . Okрім стандартних перетворень Пуанкарє, на  $\mathfrak{P}$  діють калібрувальні перетворення, локально означені лівою дією групи на собі:

$$\Phi_{h(x)} : \wp \mapsto \wp' \equiv \Phi_{h(x)}(x, g) = (x, h(x)g), \quad h(x) \in \mathcal{G}. \quad (3.1.1)$$

Подібно, можна задати і праву дію  $\mathcal{G}$  на кожному волокні (і на усій  $\mathfrak{P}$ ).

На  $\mathfrak{P}$  задано зв'язність, коефіцієнти якої утворюють 4-потенціал калібрувального поля  $\mathbf{A}_\mu(x)$ . Вони набувають значень в алгебрі Лі  $\mathcal{A}\mathcal{G}$  групи  $\mathcal{G}$ , і під дією калібрувальних перетворень (3.1.1) змінюються так:

$$\mathbf{A}'_\mu(x) = h(x)\mathbf{A}_\mu(x)h^{-1}(x) - \frac{\partial h(x)}{\partial x^\mu}h^{-1}(x). \quad (3.1.2)$$

Світова лінія частинки параметризується довільним параметром  $\tau$  і описується в  $\mathfrak{P}$  локальними змінними  $z(\tau), g(\tau)$ . Динаміку частинки можна задати інтегралом дії [26]

$$I = - \int d\tau L(z, \dot{z}, g, \dot{g}) \quad (3.1.3)$$

із лагранжіаном загального вигляду

$$L = |\dot{z}|F(\mathbf{w}), \quad (3.1.4)$$

де  $F(\mathbf{w})$  – довільна функція калібрувально-інваріантного аргументу

$$\mathbf{w} = \text{Ad}_{g^{-1}}(\mathbf{v} + \mathbf{A}_\mu(z)\dot{z}^\mu)/|\dot{z}|. \quad (3.1.5)$$

Тут  $|\dot{z}| \equiv \sqrt{\dot{z}^2}$ , вектор  $\mathbf{v} \equiv gg^{-1} \in \mathcal{AG}$  – т.зв. квазішвидкість кольору, а оператор  $\text{Ad}$  реалізує приєднане представлення  $\mathcal{G}$  в  $\mathcal{AG}$ . Отже лагранжіан (3.1.4) є параметрично- і калібрувально-інваріантним, а також стає Пуанкаре-інваріантним за умови  $\mathbf{A}_\mu(z) = 0$ .

Варіація дії (3.1.3) за змінними  $z$  і  $g$  дає рівняння Ойлера-Лагранжа:

$$\dot{p}_\mu = \mathbf{q} \cdot (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu) \dot{z}^\nu, \quad (3.1.6)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \text{ad}_{\mathbf{A} \cdot \dot{z}}^* \mathbf{q} \quad (3.1.7)$$

відповідно, де

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\mu} = \left( F - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{w}} \cdot \mathbf{w} \right) \frac{\dot{z}_\mu}{|\dot{z}|} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{A}_\mu \quad (3.1.8)$$

– часо-просторова імпульсна змінна,

$$\mathbf{q} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \frac{\partial F}{\partial \mathbf{w}} \quad (3.1.9)$$

– внутрішня змінна імпульсного типу, що набуває значень в ко-алгебрі  $\mathcal{AG}^*$ , крапка "·" в п.ч. р-нь (3.1.6) і (3.1.8) позначає згортку між ко-векторами і векторами, а лінійні оператори  $\text{ad}^*$  і  $\text{Ad}^*$  визначають ко-приєднане представлення  $\mathcal{AG}$  і  $\mathcal{G}$  відповідно рівностями

$$(\text{ad}_{\mathbf{b}}^* \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \equiv \mathbf{c} \cdot [\mathbf{b}, \mathbf{a}] \quad \text{i} \quad (\text{Ad}_h^* \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \equiv \mathbf{c} \cdot \text{Ad}_h \mathbf{a}$$

для довільних  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{AG}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathcal{AG}^*$ , і  $h \in \mathcal{G}$ ; тут  $[\dots, \dots]$  – дужки Лі в  $\mathcal{AG}$ .

Можна показати, що функція у дужках в п.ч. р-ня (3.1.8):

$$M(\mathbf{w}) \equiv F - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{w}} \cdot \mathbf{w} \quad (3.1.10)$$

є інтегралом руху. Тоді р-ня руху (3.1.6) зводиться до р-ня типу Лоренца:

$$M \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{z}_\mu}{|\dot{z}|} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} \dot{z}^\nu, \quad (3.1.11)$$

із тензором напружень поля Янга-Міллса

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu]. \quad (3.1.12)$$

Нехай група  $\mathcal{G}$  – принаймні напівпроста. Тоді на  $\mathcal{AG}$  Кіллінга-Картана  $\langle \dots, \dots \rangle$ . Вона дозволяє ототожнити  $\mathcal{AG}^*$  з  $\mathcal{AG}$ , тобто кожному ко-вектору  $\mathbf{q} \in \mathcal{AG}^*$  зіставити вектор  $\mathbf{q} \in \mathcal{AG}$ , такий, що  $\mathbf{q} = \langle \mathbf{q}, \dots \rangle$ . Тоді рівняння руху (3.1.11) і (3.1.7) набувають вигляду відомих рівнянь Вонга, виведених в 1970 р. з квантової теорії [364]:

$$M \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{z}_\mu}{|\dot{z}|} = \langle \mathbf{q}, \mathbf{F}_{\mu\nu} \rangle \dot{z}^\nu, \quad (3.1.13)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}, \mathbf{A}_\mu] \dot{z}^\mu. \quad (3.1.14)$$

Вони описують динаміку релятивістичної частинки з масою  $M$  та кольором (чи ізоспіном)  $\mathbf{q}$ . Різниця в тому, що в р-ні (3.1.13) маса  $M$  є не просто константою (як в р-нях Вонга), а інтегралом руху. Це зумовлено загальним виглядом лагранжіану, що породжує зовнішню і внутрішню динаміку частинки.

Рівняння Ойлера-Лагранжа (3.1.6) (3.1.11) загалом є р-нями 2-го порядку щодо конфігураційної змінної  $z$  та групової  $g$  – вони визначають рух частинки у головній в'язці  $\mathfrak{P}$ . Якщо вважати масу  $M$  сталою, то система рівнянь Вонга (3.1.13), (3.1.14) є замкненою щодо змінних  $z$  і  $\mathbf{q}$ , причому 1-го порядку щодо кольорового вектору  $\mathbf{q}$ . Ця система залежить від зовнішнього калібрувального поля  $\mathbf{A}_\mu$ , але не від вигляду функції  $F(\mathbf{w})$  в ларанжіані (3.1.4). Отже, вона описує зовнішню динаміку частинки. Те ж стосується і р-нь (3.1.11), (3.1.7) – з тією різницею, що вони придатні до ширшого класу калібрувальних груп (не обов'язково напівпростих).

Зовнішня динаміка доповнюється означенням кольорового заряду (3.1.9), яке можна розглядати як р-ня 1-го порядку на групову змінну  $g$ . Замість  $g$  зручніше використовувати аглебро-значну змінну, наприклад  $\mathbf{w}$ . Для неї можна отримати рівняння

$$\dot{\mathbf{s}} = \text{ad}_{\dot{z}|\mathbf{w}}^* \mathbf{s}, \quad (3.1.15)$$

де

$$\mathbf{s} \equiv \frac{\partial F}{\partial \mathbf{w}} \quad (= \text{Ad}_g^* \mathbf{q}). \quad (3.1.16)$$

Якщо параметризувати світову лінію власним часом, тобто покласти  $|\dot{z}| = 1$ , то р-ня (3.1.15) стає замкненим р-ням 1-го порядку щодо вектору  $\mathbf{w} \in \mathcal{AG}$ . Воно не містить потенціалу  $\mathbf{A}_\mu$ , але, в силу (3.1.16), залежить від явного вибору лагранжіану (3.1.4) і, отже, описує внутрішню динаміку частинки в  $\mathcal{AG}$ .

Отже, зовнішня динаміка кольорової частинки формулюється в термінах змінних  $z$  і  $\mathbf{q}$  (або  $\mathbf{q}$ ), які є спостережуваними: вони відчувають вплив зовнішнього калібрувального поля. Внутрішня динаміка формулюється в термінах змінних  $\mathbf{w}$  або  $\mathbf{s}$ . Єдиний зв'язок цих динамік здійснюється через інтеграли руху, а саме масу  $M$ , що впливає на зовнішню динаміку, але зберігається в силу внутрішньої, і (якщо існує Ad-інваріантна метрика) спільний інтеграл

$$|\mathbf{q}| \equiv \sqrt{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} = |\mathbf{s}|. \quad (3.1.17)$$

У випадку напів-простої калібрувальної групи об'єднання зовнішньої та внутрішньої динаміки відтворює повну динаміку на  $\mathfrak{P}$ .

### 3.1.2. Приклади

#### Лінійний лагранжіан. Електродинаміка

Найпростіший вибір лагранжіану (3.1.4), що дає нетривіальну внутрішню динаміку, відповідає функції:

$$F(\mathbf{w}) = m + \mathbf{k} \cdot \mathbf{w}, \quad (3.1.18)$$

де  $m \in \mathbb{R}$  і  $\mathbf{k} \in \mathcal{G}^*$  є сталими. З точністю до позначень лагранжіан (3.1.4), (3.1.18) тотожній до запропонованого Балахандраном [361]. У цьому випадку  $\mathbf{q} = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \mathbf{k}$ , отже внутрішня змінна і маса є константами:  $\mathbf{s} = \mathbf{k}$ ,  $M = m$ .

Лагранжіан (3.1.4), (3.1.18) лінійний щодо калібрувальних потенціалів  $\mathbf{A}_\mu$ . У випадку 1-параметричної калібрувальної групи  $U(1)$  він зводиться до відомого

виразу. Справді, у цьому випадку

$$g = e^{i\theta}, \quad \mathbf{v} = i\dot{\theta}, \quad \mathbf{A}_\mu = iA_\mu,$$

Обираючи  $\mathbf{k} = -ie$ , де  $e$  – заряд електрона, отримаємо для ларанжіану вираз:

$$L = m|\dot{z}| + eA_\mu\dot{z}^\mu + e\dot{\theta},$$

третій член якого є повною похідною. Отже, внутрішня змінна зникає, і опис стає стандартним.

### Право-інваріантний лагранжіан. Теорія Калуци-Кляйна

Вибір функції

$$F(\mathbf{w}) = f(|\mathbf{w}|), \quad \text{де } |\mathbf{w}| \equiv \sqrt{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} = |\mathbf{v} + \mathbf{A}_\mu \dot{x}^\mu| / |\dot{x}|, \quad (3.1.19)$$

а  $f(|\mathbf{w}|)$  є довільною, відповідна лагранжіану, що є інваріантним щодо правої дії групи  $\mathcal{G}$ . Це тому, що лагранжіан не залежить від  $g$ , а змінна  $\mathbf{v}$  за побудовою є право-інваріантна. Згідно з теоремою Нетер, існують відповідні інтеграли руху. В даному випадку, вони утворюють  $\mathcal{AG}^*$ -значний ко-вектор  $\mathbf{s}$ , означений р-ням (3.1.16) або, еквівалентно,  $\mathcal{AG}$ -значний вектор  $\mathbf{s}$ . Якщо р-ня (3.1.16) обертовне, то масу  $M$  можна представити як ф-ю  $|\mathbf{s}| = |\mathbf{q}|$ . В іншому разі обидві величини є константами. Тому маса  $M$ , як і колір за модулем  $|\mathbf{q}|$ , цілковито визначаються зовнішньою динамікою.

Частковий приклад право-інваріантного лагранжіану природньо виникає в деяких версіях теорії Калуци-Кляйна, в яких теоретико-групові виміри доповнюють часо-просторові [365]. Він має такий вигляд [362, 363]:

$$L = m\sqrt{\dot{z}^2 - a^2|\mathbf{v} + \mathbf{A}_\mu \dot{z}^\mu|^2}, \quad (3.1.20)$$

де вираз в дужках є метрикою на  $\mathfrak{P}$ . В позначеннях (3.1.19) це відповідає вибору  $f(|\mathbf{w}|) = m\sqrt{1 - a^2|\mathbf{w}|^2}$ , і дає масу  $M(|\mathbf{q}|) = \sqrt{m^2 + |\mathbf{q}|^2/a^2}$ .

## Кольорова дзига

На відміну від двох попередніх, у цьому прикладі внутрішня динаміка впливає на зовнішню. Нехай

$$F(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, T\mathbf{w} \rangle, \quad (3.1.21)$$

де  $T$  – само-спряжений (у метриці  $\langle \dots, \dots \rangle$ ) лінійний оператор. У цьому випадку маємо  $\mathbf{s} = T\mathbf{w}$ , і якщо це співвідношення обертовне, то маса  $M$  є інтегралом, додатковим до (3.1.17). Із врахуванням цього р-ня (3.1.15) в параметризації  $|\dot{z}|=1$  зводиться до рівняння  $T\dot{\mathbf{w}} = [T\mathbf{w}, \mathbf{w}]$ , що є стислою формою р-ня Ойлера (для руху вільної дзиги), узагальненого на випадок довільної групи [366].

### 3.1.3. Гамільтонів опис та квантування

Внутрішня динаміка не дуже цікава в рамках класичного опису, оскільки майже не пов’язана із спостережуваними. Але вона може представляти інтерес в рамках квантованого опису. Хоча тут не досліджено послідовну квантову динаміку кольору, однак на деякі її риси можна вказати.

Для цього зручно спочатку перейти до класичного канонічного опису в термінах канонічно-спряжених позиційних змінних  $z$  і  $p$  (3.1.8), а також зовнішньої та внутрішньої ко-алгебро-значних змінних імпульсного типу  $\mathbf{q}$  і  $\mathbf{s}$ .

Оберім базисні вектори  $\mathbf{e}_i \in \mathcal{AG}$  і введімо для  $\mathbf{q}$  і  $\mathbf{s}$  локальні координати  $q_j \equiv \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_j$ ,  $s_j \equiv \mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_j$ . Тоді співвідношення дужок Пуасона (ДП) мають вигляд:

$$\{x^\mu, p_\nu\} = \delta_\nu^\mu, \quad \{q_i, q_j\} = c_{ij}^k q_k, \quad \{s_i, s_j\} = -c_{ij}^k s_k \quad (3.1.22)$$

(інші ДП рівні нулю), де  $c_{ij}^k$  – структурні константи  $\mathcal{AG}$ .

Р-ня (3.1.10), (3.1.16) описують перетворення Лежандра. Тому функцію маси  $M$  можна виразити цілком через внутрішню змінну  $\mathbf{s}$ . Разом із співвідношенням (3.1.8), котре представимо у вигляді

$$\Pi_\mu \equiv p_\mu - \mathbf{q} \cdot \mathbf{A}_\mu = M(\mathbf{s}) \frac{\dot{z}_\mu}{|\dot{z}|}, \quad (3.1.23)$$

це дає калібрувально-інваріантну динамічну в'язь масової оболонки частинки

$$\phi \equiv \hat{\Pi}^2 - M^2(\mathbf{s}) = 0. \quad (3.1.24)$$

Якщо співвідношення (3.1.16) вироджене (необертовне), то з'являться додаткові в'язі  $\chi_r(\mathbf{s}) = 0$ ,  $r = \overline{1, \kappa} \leq \dim \mathcal{G}$ , що разом з (3.1.24) генеруватимуть параметрично- і калібрувально-інваріантну динаміку частинки через діраківський гамільтоніан  $H_D = \lambda_0 \phi + \lambda^r \chi_r$  (тут  $\lambda_0, \lambda^r$  – лагранжеві множники) [220]. Для випадку (3.1.18) в'язі мають вигляд  $\chi_i \equiv s_i - k_i = 0$ ,  $i = \overline{1, \dim \mathcal{G}}$ .

На базі гамільтонового формалізму можна будувати квантово-механічний опис частинки із кольором. Розглянемо лише деякі риси такого опису.

Згідно з процедурою канонічного квантування, динамічні змінні  $x, p, \mathbf{q}, \mathbf{s}$  і т. д. слід замінити на оператори  $\hat{x}, \hat{p}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{s}}$ , а дужки Пуасона – на комутатори. Припустимо для простоти, що перетворення (3.1.16) є обертовним, і додаткових в'язей немає. Тому класична механіка цілком визначається в'яззю масової оболонки (3.1.24). На квантовому рівні вона стає хвильовим рівнянням:

$$\left( \hat{\Pi}^2 - M^2(\hat{\mathbf{s}}) \right) \psi = 0, \quad (3.1.25)$$

що визначає фізичні стани системи. Оскільки зовнішні оператори  $\hat{x}, \hat{p}, \hat{\mathbf{q}}$  комутують з внутрішніми  $\hat{\mathbf{s}}$ , то змінні в р-ні (3.1.25) розділяються:  $\psi = \psi^{(b)} \psi^{(3)}$ . Внутрішню хвильову ф-ю  $\psi^{(b)}$  можна розкласти за представленням групи  $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}^{(b)}$ , генерованим оператором  $\hat{\mathbf{s}}$ :  $\psi^{(b)} = \sum_l c_l^{(b)} |l\rangle$ , де квантове число  $l$  маркує стани представлення  $\mathcal{G}^{(b)}$  – внутрішнього мультиплету. Ф-я  $\psi^{(b)}$  задовольняє р-ня на власні стани масового оператора:

$$M(\hat{\mathbf{s}}) \psi_n^{(b)} = M_n \psi_n^{(b)}. \quad (3.1.26)$$

Зовнішня хвильова ф-я розкладається за зовнішнім представленням  $\mathcal{G}^{(3)}$ , генерованим оператором  $\hat{\mathbf{q}}$ :  $\psi_n^{(3)} = \sum_{\varrho} c_{\varrho}^{(3)}(x) |\varrho\rangle$ , де число  $\varrho$  маркує стани зовнішнього мультиплету  $\mathcal{G}^{(3)}$ . Ф-я  $\psi^{(3)}$  задовольняє р-ня Кляйна-Гордона:

$$\left( \hat{\Pi}^2 - M_n^2 \right) \psi_n^{(3)} = 0. \quad (3.1.27)$$

Отже, всі стани внутрішнього мультиплету відповідають скалярній релятивістичній кольоровій частинці із спільною масою  $M_n$ .

Для частинки зі спіном  $\frac{1}{2}$  замість р-ня (3.1.27) буде відповідне р-ня Дірака:

$$\left( \gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu - M_n \right) \psi_n^{(3)} = 0. \quad (3.1.28)$$

В силу рівності (3.1.17), обидва внутрішнє і зовнішнє представлення повинні відповідати спільному значенню  $q$  операторів Казимира  $\hat{\mathbf{q}}^2$  і  $\hat{\mathbf{s}}^2$ .

У випадку лінійного (3.1.18) або право-інваріантного (3.1.19) лагранжіанів всі стани внутрішнього мультиплету матимуть однакову масу. Однак якщо динаміка не є право-інваріантною (як у прикладі (3.1.21)), то квантове число  $n$  маркує стани мультиплету з різною масою спокою. Таким чином, зовнішній мультиплет можна пов'язати з кольоровою  $SU(3)$ -симетрією. Можливість інтерпретувати квантове число  $n$  як аромат або покоління є привабливою, але вимагає глибшого вивчення і тут не розглядається. Варто також зазначити, що у розкладі повної хвильової ф-ї  $\psi = \psi^{(b)} \psi^{(3)}$  задіяні базисні вектори  $|l\rangle |\varrho\rangle$ , що утворюють представлення групи  $\mathcal{G}^{(b)} \times \mathcal{G}^{(3)}$ . У випадку калібруваної  $SU(3)$ -симетрії лагранжіану (3.1.4) ця група тотожна до групи кіральної симетрії  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  в КТП. Тому ця аналогія також заслуговує на вивчення.

### 3.1.4. Система точкових частинок в теорії Янга-Міллса

В цьому підрозділі розглянемо систему точкових кольорових частинок, що взаємодіють між собою через поле Янга-Міллса. Розглядаючи спочатку це поле як зовнішнє щодо частинок, можна побудувати функціонал дії такої системи як суму одночастинкових дій (3.1.3) з лагранжіанами виду (3.1.4). З найпростішими одночастинковими лагранжіанами Балахандрана (3.1.18) N-частинкова дія матиме вигляд:

$$I_{\text{part}} = - \sum_a \int d\tau_a \left\{ m_a \sqrt{\dot{z}_a^2} + \langle \mathbf{q}_a, \mathbf{v}_a \rangle + \langle \mathbf{q}_a, \mathbf{A}_\mu(z_a) \rangle \dot{z}_a^\mu \right\}, \quad (3.1.29)$$

де кольорові заряди  $\mathbf{q}_a = \text{Ad}_{g_a^{-1}} \mathbf{k}_a$  загалом змінні (як і  $g_a$ ) при сталих  $\mathbf{k}_a$ . Варіація цієї (або складнішої) дії за частинковими змінними  $z_a$  та  $g_a$  дає рівняння Вонга

(3.1.13), (3.1.14) для кожної частинки (з масами  $M_a = m_a$  для (3.1.29)).

Кольорові частинки є джерелами поля Янга-Міллса. Щоб отримати рівняння цього поля, необхідно доповнити дію (3.1.29) польовим членом (1.3.1).

Розглянемо стандартну і нестандартну класичні теорії поля Янга-Міллса. Стандартна теорія базується на добре відомому лагранжіані:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{16\pi} \langle \mathbf{F}_{\mu\nu}, \mathbf{F}^{\mu\nu} \rangle. \quad (3.1.30)$$

В нестандартній теорії використовується ефективний лагранжіан [103, 104]:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{16\pi\kappa^2} \langle \nabla_\lambda \mathbf{F}_{\mu\nu}, \nabla^\lambda \mathbf{F}^{\mu\nu} \rangle - \frac{\xi}{24\pi\kappa^2} \langle \mathbf{F}_\mu^\nu, [\mathbf{F}_{\nu\lambda}, \mathbf{F}^{\lambda\mu}] \rangle. \quad (3.1.31)$$

Тут зв'язок  $\mathcal{AG}$ -значних тензора напружені  $\mathbf{F}_{\mu\nu}(x)$  і потенціалу поля Янга-Міллса  $\mathbf{A}_\mu(x)$  дано в р-ні (3.1.12),  $\nabla_\mu \mathbf{X} \equiv \partial_\mu \mathbf{X} + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{X}]$  – коваріантна похідна, означена для довільного  $\mathbf{X} \in \mathcal{AG}$ ,  $\kappa$  – деякий параметр розмірності зворотньої довжини, а  $\xi$  – довільний безрозмірний параметр. Припускаємо, що калібрувальна група  $\mathcal{G}$  є напівпростою і компактною, так що метрика Кіллінга-Картана невироджена і додатно означена.

Варіація повної дії, що містить польовий член (1.3.1) і частинкові члени (3.1.29), приводить до рівнянь поля

$$\nabla_\nu \mathbf{F}^{\nu\mu} = 4\pi \mathbf{J}^\mu \quad (3.1.32)$$

у випадку стандартного лагранжіану (3.1.30), і

$$\{2\nabla_\nu \nabla^\mu - (1 + \xi)\nabla_\lambda \nabla_\nu \nabla^\lambda + \xi \nabla^2 \nabla_\nu\} \mathbf{F}^{\nu\mu} = 4\pi\kappa^2 \mathbf{J}^\mu \quad (3.1.33)$$

для ефективної теорії з лагранжіаном (3.1.31), де частинковий струм

$$\mathbf{J}^\mu(x) \equiv -\frac{\delta I_{\text{part}}}{\delta \mathbf{A}_\mu(x)} = \sum_a \mathbf{J}_a^\mu(x) = \sum_a \int d\tau_a \mathbf{q}_a \dot{z}_a^\mu \delta(x - z_a) \quad (3.1.34)$$

отримано з дії (3.1.29), але він не зміниться при виборі інших частинкових лагранжіанів виду (3.1.4). Завдяки рівнянню Вонга для кольору (3.1.14) струм  $\mathbf{J}^\mu$  є коваріантно збережуваним, тобто виконується умова  $\nabla_\mu \mathbf{J}^\mu = 0$ , яка забезпечує сумісність рівнянь поля обидвох теорій (3.1.32) або (3.1.33).

Щоб побудувати динаміку частинок в дусі РТПВ, необхідно вилучити з опису польові змінні  $\mathbf{A}_\mu(x)$ , залишивши в ньому лише положення частинок  $z_a^\mu(\tau_a)$  та, можливо, їх заряди  $\mathbf{q}_a(\tau_a)$ . Для цього необхідно мати розв'язок польових рівнянь в термінах частинкових змінних. Однак в силу нелінійності р-нь (3.1.32) чи (3.1.33) задача дуже складна. З допомогою ітеративної процедури в літературі отримано лише наближені рівняння руху частинок [367], але не варіаційний принцип для них.

### 3.1.5. Абелеві потенціали у стандартній та нестандартній теоріях поля Янга-Міллса

Обмежемось пошуком абелевих розв'язків польових рівнянь. Покладімо:

$$\mathbf{A}_\mu(x) = \mathbf{n}A_\mu(x), \quad \mathbf{J}^\mu(x) = \mathbf{n}J^\mu(x), \quad \mathbf{q}_a(\tau_a) = \mathbf{n}q_a(\tau_a), \quad (3.1.35)$$

де  $\mathbf{n}$  – сталий одиничний вектор в  $\mathcal{AG}$ . У цьому випадку усі вирази із дужками Лі занулюються, наприклад  $\nabla_\mu$  зводиться до  $\partial_\mu$ , а

$$\mathbf{F}_{\mu\nu}(x) = \mathbf{n}F_{\mu\nu}(x), \quad F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \quad (3.1.36)$$

Спрощується і польовий член (1.3.1), (3.1.31) інтегралу дії:

$$I_{\text{field}} = \frac{1}{16\pi\kappa^2} \int d^4x (\partial^\lambda F^{\mu\nu})(\partial_\lambda F_{\mu\nu}). \quad (3.1.37)$$

З рівнянь Вонга (3.1.14) для зарядів випливає

$$\dot{q}_a = 0 \implies q_a = \text{const.} \quad (3.1.38)$$

Тоді стандартні польові рівняння (3.1.32) стають звичайними рівняннями Максвела (1.3.4), де струм  $J^\mu$ , тотожній до струму точкових зарядів  $q_a$  (1.3.7), зберігається в звичайному значенні (1.3.3). Отже, абелева редукція (3.1.35)-(3.1.38) зводить стандартну теорію Янга-Міллса до електродинаміки.

Нестандартні рівняння набувають вигляду

$$\partial_\nu \square F^{\nu\mu} = 4\pi\kappa^2 J^\mu, \quad (3.1.39)$$

$\epsilon$  є інваріантними щодо калібрувальних перетворень однопараметричної (компактної) групи залишкової симетрії. Як і в електродинаміці, цю свободу можна усунути з допомогою умови Лоренца (1.3.5), з якою р-ня (3.1.38) спрощуються:

$$\square^2 A^\mu = 4\pi\kappa^2 J^\mu, \quad (3.1.40)$$

Рівняння (3.1.39) або (3.1.40) – лінійні неоднорідні р-ня 4-го порядку. Такі р-ня відомі з ранньої феноменологічної теоретико-польової моделі кваркового конфайнменту Кіскіса (для скалярного поля) [102], а також близької до неї дипольної моделі Благи [368]. Щоб їх розв'язати, треба знати функцію Гріна  $G(x)$ . Моделі Кіскіса і Благи за побудовою дають ф-ю Гріна з Фур'є-образом  $\tilde{G}(k) = 1/k^4$ . Як зазначено в п. 1.2.9 на стор. 75, таке означення є формальним через сильну сингулярність в точці  $k = 0$ . Для регуляризації автори [102, 368] означають  $\tilde{G}(k)$  опосередковано – через пропагатор масивного поля (1.2.13) шляхом граничного переходу (1.2.14). Ця ж процедура пропонується для побудови  $G(x)$ , якщо використати ф-ї Гріна р-ня Кляйна-Гордона в координатному представленні: симетричну  $D_{\text{sym}}(x, m)$  (1.3.27b) або запізнену ( $\eta = 1$ ) чи впередну ( $\eta = -1$ ):  $D_\eta(x, m) = 2\Theta(\eta x^0)D_{\text{sym}}(x, m)$ . Однак, така процедура вимагає обережності через особливість на світловому конусі, і в роботах [102, 368] явних виразів не подано. В додатку В функції Гріна р-ня (3.1.40) обчислено іншим методом, і отримані явно:

$$G_\eta(x) = \frac{1}{16\pi}(1 + \eta \operatorname{sgn} x^0)\Theta(x^2), \quad \eta = 0, \pm 1. \quad (3.1.41)$$

Тепер розв'язок польових рівнянь  $A^\mu = 4\pi\kappa^2 G_\eta * J^\mu$  можна використати у п.ч. р-нь Вонга (3.1.13), (3.1.14), і отримати замкнену систему рівнянь руху частинок. Вона формально збігається з р-нями (1.3.11), (1.3.15), де слід покласти  $R_a^\mu = 0$  і зробити заміну у п.ч. (1.3.15):

$$D_\eta \longmapsto \frac{1}{4}\kappa^2 G_\eta \quad \text{тобто} \quad \delta(x^2) \longmapsto \frac{1}{4}\kappa^2 \Theta(x^2). \quad (3.1.42)$$

Завдяки цьому вираз для сили  $F_a^\mu$  є регулярний, а самодії немає.

### 3.1.6. Потенціальні моделі типу Фоккера з ефективної класичної теорії Янга-Міллса

Для даної роботи важливими є не р-ня руху, а інтеграл дії. Його можна вивести шляхом підстановки розв'язку  $A^\mu = 4\pi\kappa^2 G_\eta * J^\mu$ ,  $q_a = \text{const}$ , в повну дію  $I = I_{\text{field}} + I_{\text{part}}$ , де  $I_{\text{field}}$  дано в р-ні (3.1.37), а в  $I_{\text{part}}$  (3.1.29) враховано абелеву редукцію (3.1.35)-(3.1.36). В результаті отримаємо інтеграл дії типу Фоккера (1.3.22a), де у виразі (1.3.19) для  $I_{ab}$  слід зробити заміну (3.1.42):

$$I_{ab} = -4\pi\kappa^2 q_a q_b \iint d\tau_a d\tau_b \dot{z}_a \cdot \dot{z}_b G_{\text{sym}}(z_{ab}), \quad (3.1.43)$$

де  $G_{\text{sym}} = G|_{\eta=0}$  дано в (3.1.41). Зauważимо, що у цій дії знехтувано доданками  $-\sum_a \langle \mathbf{q}_a, \mathbf{v}_a \rangle = -\sum_a q_a \langle \mathbf{n}, \mathbf{v}_a \rangle$  у виразі  $I_{\text{part}}$  (3.1.29). Ці доданки описують кольорові ступені вільності частинок  $g_a$ , що за умов (3.1.35)-(3.1.36) не впливають на їх часо-просторові змінні  $z_a$ .

Фоккерівський інтеграл (1.3.22a), (3.1.43) вперше запропонував Вейсс [45] як класичну модель прямої взаємодії кварків, без зв'язку із теоретико-польовими моделями. Така взаємодія має причинну структуру як на рис.1.2c і в статичній граници опisується, згідно з формулами (1.3.31), потенціалом  $U(r) \sim r - \infty$ . Розбіжність виникає із внесків у взаємодію нескінчених сегментів світових ліній в середині світлового конусу, показаних на рис.1.2c. Вона не впливає на рівняння руху, однак з'являється в інтегралах руху тощо. Можна обійти цю трудність шляхом інтегрування виразу (3.1.43) за частинами:

$$\begin{aligned} I_{ab} &= -\frac{\kappa^2 q_a q_b}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_a d\tau_b \dot{z}_a \cdot \dot{z}_b (1 + \eta \operatorname{sgn} z_{ab}^0) \Theta(z_{ab}^2) \\ &= \frac{\kappa^2 q_a q_b}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_a d\tau_b (z_{ab} \cdot \dot{z}_a)(z_{ab} \cdot \dot{z}_b) (1 + \eta \operatorname{sgn} z_{ab}^0) \delta(z_{ab}^2) \quad (3.1.44) \\ &\quad + \frac{\kappa^2 q_a q_b}{8} \left[ [(1 + \eta \operatorname{sgn} z_{ab}^0) \Theta(z_{ab}^2) z_{ab}^2]_{\tau_a=-\infty}^{\tau_a=+\infty} \right]_{\tau_b=-\infty}^{\tau_b=+\infty} \end{aligned}$$

(для довільного значення  $\eta$ ). Симетричний фоккерівський інтеграл з такими членами взаємодії  $I_{ab}$  був феноменологічно запропонований Рівакобою [44], раніше від Вейсса [45]. Він містить під інтегралом (3.1.44) ф-ю Гріна р-ня Даламбера (1.3.13)

(замість (3.1.41)), із причинною структурою взаємодії як на рис. 1.2b (замість 1.2c для (3.1.43)). Перетворення (3.1.44) вказує шлях до відповідної часо-асиметричної моделі (із структурою взаємодії як рис. 1.2e).

### 3.2. Часо-асиметрична потенціальна модель

Тут пропонується часо-асиметрична двочастинкова модель для класичного опису мезонів. Далекосяжна взаємодію у ній, що забезпечує конфайнмент, походить з ефективної теорії поля (див. п. 3.1.4) і описується часо-асиметричним аналогом дії Рівакоби. Вона доповнюється членом взаємодії (2.1.2b) з моделі Старушкевича-Рудда-Гілла. Цим враховано короткосяжну взаємодію, що описується абелевим розв'яком класичної теорії Янга-Міллса. Оскільки мезони є безколірними, покладаємо  $q_1 = -q_2 = q$ . Тоді повна часо-асиметрична дія має вигляд (2.1.2a), де  $I_{\text{int}} = I_{\text{int}}^{(\text{v})} + I_{\text{int}}^{(\text{e})}$ ,

$$I_{\text{int}}^{(\text{v})} = -4\pi a \iint d\tau_1 d\tau_2 D_\eta(z_{12})(z_{12} \cdot \dot{z}_1)(z_{12} \cdot \dot{z}_2), \quad (3.2.1a)$$

$$I_{\text{int}}^{(\text{e})} = 4\pi\alpha \iint d\tau_1 d\tau_2 D_\eta(z_{12}) \dot{z}_1 \cdot \dot{z}_2, \quad (3.2.1b)$$

$\eta = \pm 1$ . У нерелятивістичній границі модель дає корнельський потенціал (1.2.2). Надалі константи  $\alpha \equiv q^2$ ,  $a \equiv \frac{1}{2}q^2\kappa^2$  розглядатимемо як параметри припасування. Значок (v) підкреслює векторну лоренц-структурну утримної взаємодії, заданої інтегралом дії (3.2.1a) – на відміну від більшості потенціальних моделей, в яких утримна взаємодія – скалярна (див. підрозділ 1.2). Значок (e), що вказував на електромагнетне походження інтегралу дії (2.1.2), тепер в (3.2.1b) декларує взаємодію 1-глюонного обміну (*exchange*).

Однократне інтегрування в членах (3.2.1a), (3.2.1b) дає змогу перетворити повну дію (2.1.2a), (3.2.1) до явно коваріантної лагранжевої форми (п. 2.1.2) з лагранжіаном (2.1.11), де ф-я  $F(\sigma_1, \sigma_2, \delta)$  має вигляд:

$$F \equiv - \sum_{a=1}^2 m_a \sigma_a - a + \alpha \delta. \quad (3.2.2)$$

В результаті переходу до явно коваріантного канонічного опису (п. 2.1.3) отримаємо динамічну в'язь (2.1.29)-(2.1.30) із членом взаємодії

$$\phi_{\text{int}} = -2a \left( \frac{b_1 b_2}{\eta P \cdot z} + \alpha \right) + \frac{\alpha(P^2 - m_1^2 - m_2^2)}{\eta P \cdot z} + \frac{\alpha^2}{\eta P \cdot z} \sum_{a=1}^2 \frac{m_a^2}{b_a + \alpha}. \quad (3.2.3)$$

Тоді перехід до тривимірного гамільтонового опису у миттєвій формі динаміки – моделі Бакамджіана-Томаса (п. 2.1.6) дозволяє цілком дослідити класичну динаміку системи в квадратурах (п. 2.1.7). Для цього треба визначити функцію  $k_r(r, M, S)$  як розв'язок р-ня (2.1.62), отриманого з динамічної в'язі (2.1.29), (2.1.30), (3.2.3) шляхом радіальної редукції.

### 3.2.1. Класична динаміка часо-асиметриної моделі

#### Спрощена модель з лише утримною взаємодією ( $\alpha = 0$ )

Надалі розглянемо частиники однакових мас  $m_1 = m_2 \equiv m$ . Випадок  $\alpha = 0$  відповідає лише утримній далекосяжній взаємодії. Р-ня (2.1.62) у цьому випадку має вигляд

$$\frac{S^2}{r^2} + m^2 - \left(1 - 2\frac{ar}{M}\right) \left(\frac{1}{4}M^2 - k_r^2\right) = 0 \quad (3.2.4)$$

і приводить до розв'язку

$$k_r^2 \equiv f(r, M, S) = \frac{1}{4}M^2 - \frac{m^2 + S^2/r^2}{1 - 2ar/M} \geq 0. \quad (3.2.5)$$

Вимога  $\sigma_a > 0$  в лагранжевому описі (2.1.13) накладає обмеження на фазову траєкторію в гамільтоновому:  $\frac{1}{4}M^2 - k_r^2 > 0$ . Разом з (3.2.5) це обмежує відносний рух частинок:

$$0 < r < \frac{1}{2}M/a. \quad (3.2.6)$$

Квадратури (2.1.65), (2.1.66), (3.2.5) можна звести до еліптичних інтегралів (тут не поданих). Інтегрування здійснюється в області можливих рухів (OMP), визначеній умовами (3.2.5), (3.2.6). OMP при  $S > 0$  є зв'язаним інтервалом  $r_1 \leq r \leq r_2$ , обмеженим точками повороту  $r_1$ ,  $r_2$  – двома додатніми коренями

р-ня  $f(r, M, S) = 0$ . Вони існують за умови  $M \geq M_{(0)}(S)$ , де функція  $M_{(0)}(S)$  представляє класичну траєкторію Редже. Вона неявно задана рівнянням

$$S = \frac{M_{(0)}^2}{6\sqrt{3}a} \left(1 - \frac{4m^2}{M_{(0)}^2}\right)^{3/2}, \quad M_{(0)} \geq 2m. \quad (3.2.7)$$

Рівність  $M = M_{(0)}(S)$  досягається у випадку  $r_1 = r_2 \equiv R$  колових орбіт частинок з відстанню між ними  $R$ , що визначається з умов  $f(R, M_{(0)}, S) = 0$ ,  $\partial f(R, M_{(0)}, S)/\partial R = 0$ .

В границі  $S \rightarrow 0$  квадратура (2.1.66) дає  $\varphi = \varphi_0$ , рух частинок стає одновимірним (тобто в двовимірному часо-просторі  $\mathbb{M}_2$ ), а  $r_1 \rightarrow 0$ . Тому ОМР стає  $0 < r \leq r_2$ . Точка зіткнення частинок  $r = 0$  не є сингулярною для квадратури (2.1.65) і коваріантних координат (2.1.63), (2.1.64). Тому рух частинок можна гладко продовжити так, ніби вони вільно проходять одна крізь одну.

### Загальна модель

Для загального випадку  $\alpha > 0$ ,  $a > 0$  р-ня (2.1.62) для визначення ф-ї  $k_r(r, M, S)$  є квадратичним щодо  $k_r^2$ :

$$\frac{S^2}{r^2}\Delta - \left(\Delta - \frac{\alpha^2}{r^2}\right) \left\{ \left(1 - 2\frac{ar}{M}\right)\Delta - 2\frac{m^2}{M} \left(\frac{M}{2} + \frac{\alpha}{r}\right) \right\} = 0, \quad (3.2.8)$$

$$\text{де } \Delta \equiv \left(\frac{M}{2} + \frac{\alpha}{r}\right)^2 - k_r^2 > 0. \quad (3.2.9)$$

Тому не подаючи явно громіздкий вираз для розв'язку, запишемо його так:  $k_r^2 = f_{\pm}(r, M, S)$ . Лише гілка  $f_{-}(r, M, S)$  є фізичною і зводиться до (3.2.5) в границі  $\alpha \rightarrow 0$ . Як і в спрощеній моделі, ОМР є зв'язним інтервалом, обмеженим 2-ма точками повороту. Вони сходяться на колових орбітах, для яких класичну траєкторію Редже можна представити параметрично:

$$M_{(0)}^2(\lambda) = 2m^2 \frac{\lambda[4 + 5\lambda + 2\lambda^2 + \nu(1 + \lambda)^2(4 + 3\lambda)]}{(1 + \lambda)^3},$$

$$S^2(\lambda) = \alpha^2 \frac{\lambda(2 + \lambda)^2[1 + \nu(1 + \lambda)^2]}{4 + 5\lambda + 2\lambda^2 + \nu(1 + \lambda)^2(4 + 3\lambda)},$$

$$\text{де } \nu \equiv \frac{\alpha a}{m^2}, \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (3.2.10)$$

Рух частинок обмежено як у фазовому, так і в конфігураційному просторі. Типова фазова траєкторія подібна до траєкторії  $\gamma_-^a$  моделі Старушкевича-Рудда-Гілла в області інтегралів руху  $\mathcal{D}(-)$ ; див. рис. 2.1. Просторові траєкторії частинок є незамкнутими розетками із від'ємним зсувом перигелію.

У випадку  $S = 0$  гілки  $f_-(r, M, S)$  і  $f_+(r, M, S)$  функції  $k_r^2(r, M, S)$  сходяться в деякій точці  $r_0 < \alpha/m$ , в якій вони зазнають зламу, але можуть бути продовжені одна одною. Таким чином, фазова траєкторія зазнає перебудови, а на світових лініях частинок з'являються особливі точки, де частинки стикаються і/або досягають швидкості світла. Ці патології подібні до тих, що виникають на особливих розв'язках моделі Старушкевича-Рудда-Гілла (п. 2.2.1) чи скалярної (п. 2.2.2). Детальний аналіз патологій в даній дисертаційній роботі не подається, але його можна знайти в [6].

### 3.2.2. Квазікласичні траєкторії Редже

В потенціальних моделях траєкторії Редже часто обчислюють в наближенні, яке називають по-різному: осциляторним, наближенням великого  $\ell$ , чи просто квазікласичним (або ВКБ) [207, 286], хоча остання назва вірна лише частково. Суть наближення полягає в тому, що енергія радіального руху системи вважається малою у порівнянні з орбіальною. На мові класичної механіки це означає, що амплітуда радіального руху частинки (чи відносного руху частинок) значно менша від розміру орбіт, які є близькими до колових. У квантовому описі це стосується квантових чисел:  $n_r \ll \ell$ . Будемо таке наближення називати наближенням *майже колових орбіт* (МКО) або  $\ell \gg 1$  [60].

В МКО-наближенні головна траєкторія Редже фактично походить з класичної механіки: вона близька до кривої колових рухів в  $(M^2, S)$ -площині, тобто до функції  $M_{(0)}(S)$ .

В нашому випадку ця функція задана р-ням (3.2.7) для  $\alpha = 0$ , або (3.2.10) в загальному випадку. В ультраелітивістичній границі  $S \rightarrow \infty$ ,  $M_{(0)} \rightarrow \infty$  вона

має бажану лінійну асимптотику:

$$M_{(0)}^2 \approx 6\sqrt{3}aS + 6(m^2 - \alpha a). \quad (3.2.11)$$

Навпаки, в границі  $M_{(0)} - 2m \ll 2m$  отримуємо оцінку:

$$M_{(0)} - 2m \approx 3 \left( \frac{aS}{2\sqrt{m}} \right)^{2/3}. \quad (3.2.12)$$

Саме така небажана залежність характерна для нерелятивістичних потенціальних моделей з (асимптотично) лінійним потенціалом [207]. Отже, лише врахування релятивізму для моделі з лінійним потенціалом дає бажану лінійну асимптотику (3.2.11) траєкторій Редже.

Точні класичні траєкторії Редже, показані на рис. 3.1 для різних значень  $\alpha$ , виявляють помітну кривину в їх нижніх сегментах. Причина полягає в тому, що усі вони (окрім випадку  $\alpha = 0$ ) виходять з однієї точки ( $M = 0, S = 0$ ). Ці особливості будуть дискутуватися в п. 3.3.4.

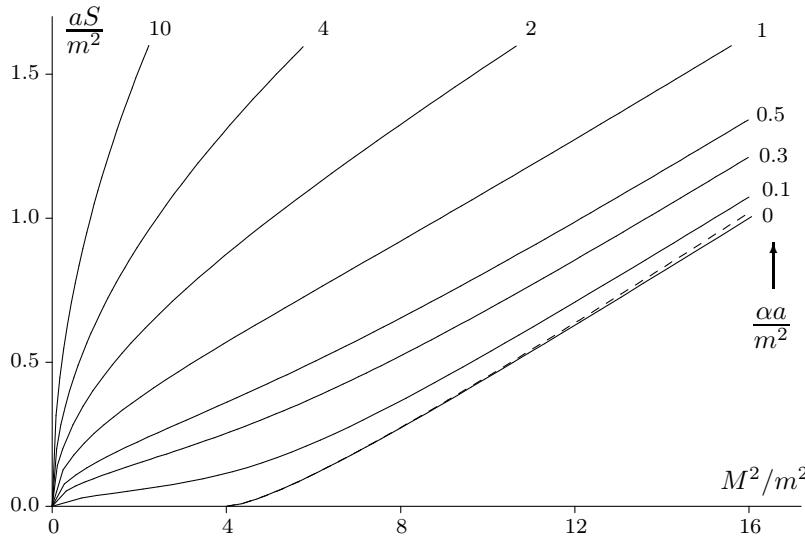


Рис. 3.1. Класичні траєкторії Редже; — загальна часо-асиметрична модель; - - - - часо-симетрична модель при  $\alpha = 0$ .

Добре досліджена класична динаміка моделі дає основу для її квазікласичного квантування. За аналогією до ВКБ-наближення покладімо:

$$S = \ell + \frac{1}{2}, \quad \ell = 0, 1, \dots \quad (3.2.13)$$

для квантованого внутрішнього моменту імпульсу, і

$$\oint k_r dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{f(r, M, S)} = 2\pi(n_r + \frac{1}{2}), \quad n_r = 0, 1, \dots \quad (3.2.14)$$

для радіальних збуджень (інтегрування вздовж класичної фазової траєкторії).

В рамках МКО-наближення [207, 279] розкладемо функцію  $f(r, M, S)$  (3.2.5) в околі колової орбіти до перших ненульових внесків за  $\Delta M \equiv M - M_{(0)}$  та  $\Delta r \equiv r - R$ . Отримаємо  $f(r, M, S) \approx A^2(M, S) - B^2(S)(\Delta r)^2$  з деякими функціями  $A^2(M, S)$  і  $B^2(S)$ . Тоді інтеграл в л.ч. р-ня (3.2.14) легко обчислити:

$$\int_{-A/B}^{A/B} d(\Delta r) \sqrt{A^2 - B^2(\Delta r)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{A^2}{B}. \quad (3.2.15)$$

З врахуванням  $\Delta M \ll M_{(0)}$  отримаємо вираз  $M^2$  для спектру обмеженої моделі з  $\alpha = 0$ :

$$M^2 = M_{(0)}^2 \left\{ 1 + \frac{6\sqrt{3}a}{M_{(0)}^2 + 2m^2} \sqrt{\frac{M_{(0)}^2 + 8m^2}{M_{(0)}^2 - 4m^2}} \left( n_r + \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (3.2.16)$$

що разом з (3.2.13) та означенням (3.2.7) функції  $M_{(0)}(S)$  описує головну (для  $n_r = 0$ ) та дочірні (для  $n_r = 1, 2, \dots$ ) траєкторії Редже.

Для загальної моделі отриманий спектр задано неявно формулами:

$$M^2 = M_{(0)}^2(\lambda) \left\{ 1 + \Phi(\lambda) \left( n_r + \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (3.2.17)$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{\sqrt{[1+2\lambda+\nu(1+\lambda)^2][3+(1+\nu)(1+\lambda)^2+3\nu(1+\lambda)^4]}}{\alpha(1+\lambda)^2[1+\nu(1+\lambda)]\sqrt{\lambda(2+\lambda)}}, \quad (3.2.18)$$

та (3.2.10), (3.2.13). При  $\ell \gg 1$  він дає лінійні траєкторії Редже

$$M_{(0)}^2 \approx 6\sqrt{3}a(\ell + n_r + 1) + 6(m^2 - \alpha a), \quad (3.2.19)$$

так що дочірні траєкторії паралельні до головної. Навіть більше, стани, момент імпульсу яких відрізняється на одиницю, утворюють вироджені вежі даної маси. Як зазначено в [279, 283], така вежова структура притаманна мезонним спектрам. Однак численні релятивістичні потенціальні моделі дають (точно або асимптотично) виродження осциляторного типу  $\ell + 2n_r$ ; див. п. 1.2.3. І лише залучення додаткових правил відбору дозволило отримано в [280, 281, 293–295] виродження типу  $\ell + n_r$ . У даній моделі воно природнє.

Формули (3.2.16) і (3.2.18), отримані в МКО-наближені, хибні при  $n_r \gtrsim \ell$ . Це видно із того, що коефіцієнти біля  $n_r$  є сингулярними при  $S \rightarrow 0$ . Одне можливе подолання цієї труднощі – відмова у цій області від МКО-наближення, і буквальне застосування ВКБ-наближення шляхом точного або числового інтегрування у п.ч. р-ня (3.2.14). На рис. 3.2 показано траєкторії Редже для чармонію: в наближенні  $\ell \gg 1$  – на рис. 3.2a, а ті, що отримані числовим інтегруванням – на рис. 3.2b. Для перших очевидна неприродна кривина в нижніх сегментах (при  $n_r \gtrsim \ell$ ), що є проявом вказаної сингулярності і приводить до зростання  $M$  при  $\ell \rightarrow 0$ ; це не характерно для других. Спосіб усунути цю сингулярність в рамках МКО-наближення дискутується в п. 3.3.4.

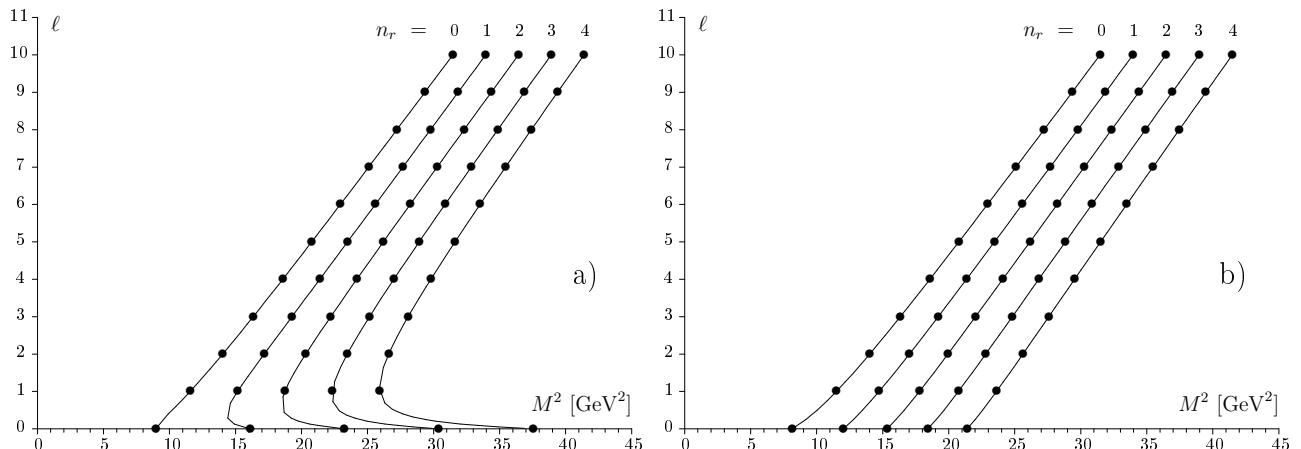


Рис. 3.2. Квазікласичні траєкторії Редже;  $m = 1.27 \text{ GeV}$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $a = 0.2 \text{ GeV}^2$ ;  
a) МКО-наближення; b) числове інтегрування

### 3.2.3. Спрощена модель ( $\alpha=0$ ) у точковій формі динаміки

Дослідження класичної динаміки та квазікласичне квантування моделі не залежить від обраної форми динаміки для тривимірного гамільтонового опису системи [20, 246, 369]. В попередніх підрозділах було обрано миттєву форму. Але для більш послідовного квантування моделі зручно обрати точкову форму динаміки [18]. Для переходу до неї від явно коваріантного канонічного опису зафіксуємо параметр еволюції  $t$  шляхом вибору калібрувальної в'язі (2.1.52) з необхідними (для точкової форми) Пуанкаре-симетрійними властивостями:

$$\sum_{a=1}^2 \frac{z_a \cdot p_a}{|P|} - t = 0. \quad (3.2.20)$$

Далі, виконуючи подану в п. 2.1.6 схему, отримаємо тривимірний гамільтонів опис типу Бакамджіана-Томаса на 12-вимірному фазовому просторі  $\mathbb{P}$ , параметризованому зовнішніми канонічно-спряженими змінними  $\Theta^i$ ,  $G_i$ , та внутрішніми  $\rho^i$ ,  $\pi_i$  (іншими, ніж у миттєвій формі; див. п. 2.1.6). У цих термінах динаміка моделі в  $\mathbb{P}$  задається 10-ма генераторами групи Пуанкаре:

$$\begin{aligned} P_\mu &= MG_\mu, \quad G_0 \equiv \sqrt{1 + \mathbf{G}^2}, \\ J_i &\equiv \varepsilon_i^{jk} J_{jk} = \varepsilon_i^{jk} \Theta_j G_k + S_i, \\ K_i &\equiv J_{i0} = G_0 \Theta_i + \frac{(\mathbf{G} \times \mathbf{S})_i}{1 + G_0}, \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

де  $\mathbf{S} \equiv \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\pi}$  і  $M(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\pi})$  – повний спін і маса системи.

Функція  $M(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\pi})$  неявно задана рівнянням (3.2.4), але у нових змінних:

$$\Gamma(M, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\pi}) \equiv (1 - \rho) \left( \frac{M^4}{16a^2} - \pi_\rho^2 \right) - \frac{M^2 m^2}{4a^2} - \frac{S^2}{\rho^2} = 0, \quad (3.2.22)$$

де  $\rho \equiv |\boldsymbol{\rho}|$ ,  $S \equiv |\mathbf{S}|$ ,  $\pi_\rho \equiv \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{n}$  а  $\mathbf{n} \equiv \boldsymbol{\rho}/\rho$ . Р-ня (3.2.22) необхідно доповнити умовою (3.2.6), що в нових змінних має простий вигляд

$$0 < \rho < 1. \quad (3.2.23)$$

Фізичний рух частинок цілком належить до цієї області.

### 3.2.4. Квантування

Введемо квантові оператори  $\hat{\Theta}^i$ ,  $\hat{G}_i$ ,  $\hat{\rho}^i$ ,  $\hat{\pi}_i$ , що задовольняють комутаційні співвідношення:  $[\hat{\Theta}^i, \hat{G}_j] = i\delta_j^i$ ,  $[\hat{\rho}^i, \hat{\pi}_j] = i\delta_j^i$  (інші комутатори занулюються). Використання  $(\mathbf{G}, \boldsymbol{\rho})$ -представлення з базисом  $|\mathbf{G}, \boldsymbol{\rho}\rangle = |\mathbf{G}\rangle \otimes |\boldsymbol{\rho}\rangle$ ,

$$\begin{aligned} \hat{G}|\mathbf{G}\rangle &= \mathbf{G}|\mathbf{G}\rangle, & \langle \mathbf{G}'|\mathbf{G}\rangle &= G_0 \delta^3(\mathbf{G}' - \mathbf{G}), \\ \hat{\rho}|\boldsymbol{\rho}\rangle &= \boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\rho}\rangle, & \langle \boldsymbol{\rho}'|\boldsymbol{\rho}\rangle &= \delta^3(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}), \end{aligned}$$

розщеплює простір Гільберта  $\mathcal{H}$  із станами

$$|\Psi\rangle = \int \frac{d^3G}{G_0} \int d^3\rho \Psi(\mathbf{G}, \boldsymbol{\rho}) |\mathbf{G}, \boldsymbol{\rho}\rangle, \quad |\Psi\rangle \in \mathcal{H},$$

і пуанкаре-інваріантним добутком

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int \frac{d^3G}{G_0} \int d^3\rho \Phi^*(\mathbf{G}, \boldsymbol{\rho}) \Psi(\mathbf{G}, \boldsymbol{\rho}), \quad |\langle \Phi | \Psi \rangle| < \infty$$

у зовнішній та внутрішній простори  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ext}} \otimes \mathcal{H}_{\text{int}}$ .

Унітарне представлення групи Пуанкаре задано ермітовими генераторами:

$$\begin{aligned} \hat{P}_0 &= \hat{M}G_0, & \hat{\mathbf{P}} &= \hat{M}\mathbf{G}, \\ \hat{\mathbf{J}} &= i \frac{\partial}{\partial \mathbf{G}} \times \mathbf{G} + \hat{\mathbf{S}}, \\ \hat{\mathbf{K}} &= i G_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{G}} + \frac{\mathbf{G} \times \hat{\mathbf{S}}}{1 + G_0}, & \text{де} \quad \hat{\mathbf{S}} &= -i \boldsymbol{\rho} \times \partial / \partial \boldsymbol{\rho}. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Припускаємо, що масовий оператор  $\hat{M}$  є додатньо-означенім пуанкаре-інваріантним ермітовим оператором, що діє в  $\mathcal{H}_{\text{int}}$ :  $[\hat{M}, (\hat{S}^2, \hat{S}_3, \hat{\mathbf{G}})] = 0$ . Тому його власні функції можна розщепити так:  $\Psi(\mathbf{G}, \boldsymbol{\rho}) = \Psi_{\text{ext}}(\mathbf{G})\Psi_{\text{int}}(\boldsymbol{\rho})$ , де  $\Psi_{\text{ext}}(\mathbf{G}) \in \mathcal{H}_{\text{ext}}$  є довільною, а  $\Psi_{\text{int}}(\boldsymbol{\rho}) \in \mathcal{H}_{\text{int}}$  задовольняє рівняння на власні вектори і власні значення:

$$\hat{M}\Psi_{\text{int}}(\boldsymbol{\rho}) = M\Psi_{\text{int}}(\boldsymbol{\rho}). \quad (3.2.25)$$

Тепер розділення змінних  $\Psi_{\text{int}}(\boldsymbol{\rho}) = \psi(\rho)Y_{\ell\sigma}(\mathbf{n})$ , де  $Y_{\ell\sigma}(\mathbf{n})$  – сферичні гармоніки, зводить (3.2.25) до одновимірної задачі га власні ф-ї  $\psi(\rho)$  у гільбертовому просторі  $L^2(\mathbb{R}_+)$  із скалярним добутком

$$\langle \varphi | \psi \rangle_{\text{rad}} = \int_0^\infty \rho^2 d\rho \varphi^*(\rho)\psi(\rho), \quad |\langle \varphi | \psi \rangle_{\text{rad}}| < \infty. \quad (3.2.26)$$

Явний класичний вираз для ф-ї маси, який можна отримати з р-ня (3.2.22), ускладнює побудову відповідного ермітового оператора, а отримана в такий спосіб задача на власні значення не очікується бути розв'язною. Тут пропонується інша процедура квантування, запозичена з квазіпотенціального підходу (див. пп. 1.1.2, 1.2.9, 2.3.4, [201]).

Побудуємо ермітовий оператор  $\hat{\Gamma}(M)$ , що відповідає класичній функції  $\Gamma(M, \rho, \pi)$ , де  $M$  тлумачиться як стала. Тоді замість задачі (3.2.25) можна розглядати квантовий аналог рівняння (3.2.22):

$$\hat{\Gamma}(M)\Psi_M = 0, \quad (3.2.27)$$

де  $M$  – спектральний параметр. Якщо  $\hat{\Gamma}(M)$  містить  $M$  нелінійно, то власні функції  $\Psi_M$  можуть бути не ортогональними. Тоді ортогональність можна відновити переозначенням скалярного добутку [201]:

$$\langle \Psi_{M'} | \Psi_M \rangle \rightarrow \langle \langle \Psi_{M'} | \Psi_M \rangle \rangle = \left\langle \Psi_{M'} \left| \frac{\hat{\Gamma}(M') - \hat{\Gamma}(M)}{M' - M} \right| \Psi_M \right\rangle.$$

В даному випадку редуковане хвильове рівняння (3.2.27) має вигляд

$$\hat{\Gamma}_\ell(M)\psi(\rho) = 0, \quad (3.2.28)$$

де

$$\hat{\Gamma}_\ell(M) = -(1 - \widehat{\rho})\pi_\rho^2 + (1 - \rho)\frac{M^4}{16a^2} - \frac{M^2m^2}{4a^2} - \frac{\ell(\ell + 1)}{\rho^2} \quad (3.2.29)$$

має бути ермітовим оператором. Тому оператор  $(1 - \widehat{\rho})\pi_\rho^2$  має бути впорядкованням  $\rho$  і радіального імпульсу  $\hat{\pi}_\rho$ , як є ермітове в  $L^2(\mathbb{R}_+)$  (3.2.26). Тут обрано таке впорядкування:

$$(1 - \widehat{\rho})\pi_\rho^2 = (1 - \rho)^\delta \hat{\pi}_\rho (1 - \rho)^{1-2\delta} \hat{\pi}_\rho (1 - \rho)^\delta, \quad \hat{\pi}_\rho = -\frac{i}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho, \quad (3.2.30)$$

параметр квантування  $\delta \sim 1$  можна пристосувати до фізичних вимог.

### 3.2.5. Аналіз хвильового рівняння

Квазіпотенціальне рівняння (3.2.28) є звичайним диференційним рівнянням:

$$\left\{ (1 - \rho) \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2 - 3\rho}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \mu^2(1 - \rho) - 2\mu\nu - \frac{\delta^2}{1 - \rho} - \frac{1}{\rho} - \frac{\ell(\ell + 1)}{\rho^2} \right\} \psi(\rho) = 0, \quad (3.2.31)$$

де

$$\mu \equiv \frac{M^2}{4a}, \quad \nu \equiv \frac{m^2}{2a}, \quad (3.2.32)$$

і  $\mu$  є безрозмірним спектральним параметром задачі. Оскільки р-ня (3.2.31) містить параметр квантування як  $\delta^2$ , можна покласти  $\delta \geq 0$ .

Р-ня (3.2.31) має три особливі точки  $\rho = 0, 1, \infty$  в яких (як і всюди в  $\mathbb{R}_+$ ) хвильова ф-я  $\psi(\rho)$  повинна бути регулярною, неперервною, і належати до  $L^2(\mathbb{R}_+)$ . Цього можна досягнути шляхом підстановки:

$$\psi(\rho) = \exp(\pm i\mu\rho)\rho^\ell(1-\rho)^\delta\chi(\rho), \quad (3.2.33)$$

де  $\chi(\rho) \in L^2([0, 1])$ , зокрема  $\chi(\rho) = 0$  при  $\rho < 0$  і  $\rho > 1$ . В такий спосіб умова конфайнменту (3.2.23) природньо переноситься у квантовий опис. Шляхом наступного розкладу  $\chi(\rho) \in L^2([0, 1])$  в ряд за поліномами Якобі [370]:

$$\chi(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k^{(2\delta, 2\ell+1)}(2\rho - 1), \quad (3.2.34)$$

задача на власні значення (3.2.31) зводиться до нескінченної тридіагональної системи лінійних однорідних рівнянь для  $C_k$ :

$$\xi_k C_{k+1} + \eta_k C_k + \zeta_k C_{k-1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.2.35)$$

з комплексними коефіцієнтами  $\xi_k, \eta_k, \zeta_k$ , явний вигляд яких тут не важливий.

Відомо [371], що визначник тридіагональної лінійної системи можна виразити в термінах неперервних дробів [372]; додаток С. Секулярне рівняння для системи (3.2.35) має вигляд:

$$\Delta_\ell(\mu) \equiv b_0 + \prod_{k=1}^{\infty} (a_k/b_k) = 0, \quad (3.2.36)$$

де  $b_k = \eta_k$  та  $a_k = -\xi_{k-1}\zeta_k$  є дійсними ф-ями спектрального параметру  $\mu$ ; див. р-ня (C.1), (C.2) в додатку С. Оскільки неперервний дріб  $\Delta_\ell(\mu)$  задовольняє критерій умовної збіжності (C.3), див. [372], він представляє дійсну функцію  $\mu$ . Тоді додатні розв'язки алгебричного р-ня (3.2.36) формують спектр системи.

## Спектр S-станів

У випадку  $\ell = 0$  ланцюговий дріб  $\Delta_0(\mu)$  спрощується – його можна явно обчислити в термінах кулонівських хвильових функцій  $F_\lambda(\nu, \mu)$  [372], так що секулярне р-ня (3.2.36) можна представити у вигляді:

$$F_{\delta-1/2}(\nu, \mu) = 0, \quad \mu > 0. \quad (3.2.37)$$

Воно має нескінченну послідовність додатніх розв'язків  $\mu = \mu_{n_\rho}(\nu)$ , маркованих квантовим числом  $n_\rho = 0, 1, \dots$ .

Розглянемо спектр S-станів у двох граничних випадках.

Нерелятивістичний спектр. В нерелятивістичному випадку енергія зв'язку  $E = M - 2m \sim \sqrt{a}$ , а маса спокою  $m \gg \sqrt{a}$ . У безрозмірних величинах це записується так:  $\mu \sim 2\nu \gg 0$ . Тоді з асимптотичного представлення кулонівської хвильової ф-ї [370]  $F_\lambda(\nu, \mu) \sim \text{Ai}(x)$ , де  $\text{Ai}(x)$  – ф-я Ері, а

$$x = (1 - \mu/\mu_\lambda)[\mu^2 + \lambda(\lambda + 1)]^{1/3}, \quad \mu_\lambda = \nu + \sqrt{\nu^2 + \lambda(\lambda + 1)},$$

та розв'язку р-ня (3.2.37) маємо

$$E = M - 2m \approx (a^2/m)^{1/3} x_{n_\rho+1}, \quad (3.2.38)$$

де  $\{-x_n\}$  – нулі ф-ї Ері. Р-ня (3.2.38) описує добре відомий нерелятивістичних S-спектр двочастинкової системи з лінійним потенціалом. Зауважимо, що залежність від параметру квантування тут виникає як  $O(\nu^{-3/2})$ , тобто далеко від області нерелятивістичного наближення.

Ультрарелятивістичний спектр:  $M \rightarrow \infty$ . Коли  $\mu \rightarrow \infty$ , маємо [370]:

$$F_\lambda(\nu, \mu) \sim \sin(\mu - \nu \ln 2\mu - \lambda\pi/2 + \sigma_\lambda), \quad (3.2.39)$$

де  $\sigma_\lambda = \arg \Gamma(\lambda + 1 + i\nu)$ . Тоді з р-ня (3.2.37) випливає:

$$M^2 = \pi a(4n_\rho + 2\delta + 3) + 2m^2 \ln[2\pi(n_\rho + 1)] - \sigma_{\delta-1/2} + O(n_\rho^{-1}). \quad (3.2.40)$$

Залежність  $M^2$  від  $n_\rho \gg 0$  стає асимптотично лінійною.

## Траєкторії Редже в наближенні $\ell \gg 1$

Виведемо асимптотичну поведінку спектру мас при  $\ell \gg 1$  з аналізу хвильового р-ня (3.2.31). Для цього зведемо його до двочленного вигляду шляхом заміни  $\psi(\rho) \rightarrow \varphi(\rho) = \rho\sqrt{1-\rho}\psi(\rho)$ :

$$\frac{d^2\varphi(\rho)}{d\rho^2} + \left\{ \mu^2 - \frac{2\mu\nu}{1-\rho} - \frac{\delta^2 - 1/4}{(1-\rho)^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{(1-\rho)\rho^2} \right\} \varphi(\rho) = 0. \quad (3.2.41)$$

Для простоти покладемо  $\delta = 1/2$ . Тоді р-ня (3.2.41) набуває вигляду р-ня Шредінгера з (квазі)потенціалом:

$$U(\rho) = \frac{2\mu\nu + \ell(\ell+1)/\rho^2}{1-\rho}, \quad (3.2.42)$$

що залежить від  $\mu$ . Якщо  $\ell > 0$ , цей потенціал має локальний мінімум у деякій точці  $\rho_0 \in (0, 2/3)$ , що залежить від  $\mu$  і задовольняє умову (кубічне р-ня)

$$U'(\rho_0) \propto 2\mu\nu\rho_0^3 + \ell(\ell+1)(3\rho_0 - 2) = 0. \quad (3.2.43)$$

Тому квазіпотенціал (3.2.42) можна розкласти в околі мінімуму,

$$U(\rho) \approx U(\rho_0) + \frac{1}{2}U''(\rho_0)(\rho - \rho_0)^2, \quad (3.2.44)$$

і розв'язувати цю осциляторну задачу. Якщо  $n_\rho \sim 1$ , то наблизений розв'язок експоненційно мало відрізняється від точного розв'язку р-ня (3.2.41).

Р-ня (3.2.43) для  $\rho_0$ , що мінімізує потенціал (3.2.42), та умова квантування:

$$\mu^2 - U(\rho_0) = \sqrt{2U''(\rho_0)} (n_r + \frac{1}{2}) \quad (3.2.45)$$

приводить до спектру мас, що при  $\ell \gg n_r$  відтворює асимптотичну формулу (3.2.19) для випадку  $\alpha = 0$ , тобто без врахування короткосяжної взаємодії.

У випадку довільного параметру квантування знову отримаємо цей результат, оскільки  $\delta$ -залежні члени є порядку  $O(\ell^{-1})$ .

## Врахування короткосяжної взаємодії

Дотепер в п. 3.2.4-5 розглядалося квантування обмеженої потенціальної моделі, тобто без внеску в дію (3.2.1) члена (3.2.1b), що описує короткосяжну взаємо-

дію одноглюонного обміну. Повна модель (3.2.1) приводить до громіздкої динамічної в'язі (3.2.3), і тоді до занадто складного для квантування масового рівняння (3.2.9).

Тут обмежимось лінійним за  $\alpha$  наближенням, знехтувавши останнім членом динамічної в'язі (3.2.3). Тоді знову отримаємо квазіпотенційне р-ня типу (3.2.28), означене модифікованим оператором  $\hat{\Gamma}_\ell(M)$  типу (3.2.29):

$$\hat{\Gamma}_\ell(M) \rightarrow \hat{\Gamma}_\ell(M; \alpha) = \hat{\Gamma}_\ell(M) + \alpha \frac{(1 - \rho)M^2 - 2m^2}{2a\rho}. \quad (3.2.46)$$

В наближенні  $\ell \gg 1$  воно повністю відтворює асимптотичну формулу (3.2.19) для траєкторій Редже. Точний аналіз знову приводить до секулярного рівняння типу (3.2.36), означеного через ланцюговий дріб з модифікованими елементами (С.4) (див. додаток С).

Це рівняння аналізується чисельно, а результати оговорюються далі.

### 3.2.6. Числові результати та дослідні дані

Модель з далеко- і короткосяжною взаємодіями представляє релятивістичне узагальнення корнельської потенціальної моделі. Обидві задачі не є точно розв'язними. Але релятивістична приводить до алгебричного секулярного рівняння  $\Delta_\ell(\mu; \alpha) = 0$ , де ф-ю  $\Delta_\ell(\mu; \alpha)$  можна точно виразити через ланцюговий дріб. Це секулярне рівняння можна розв'язуванням стандартними числовими алгоритмами [371, 372]. В результаті отримується спектр мас  $\mu_{\ell n_\rho}$  ( $n_\rho = 0, 1, \dots$ ), або (якщо допустити  $\ell \in \mathbb{R}_+$ ) сімейство головної та дочірніх траєкторій Редже.

На рис. 3.3 представлено кілька прикладів траєкторій Редже. Вони отримані шляхом припасування параметрів  $m$ ,  $\alpha$  і  $a$  до мас певних безароматних кварків. Усі ці параметри (особливо  $m$ ) виявляють залежність від аромату, лише параметр квантування  $\delta$  слабко впливає на спектр. Тому тут покладено  $\delta = 1/2$  (у цьому випадку оператор (3.2.30) спрощується).

З точністю до спінових ефектів отримані маси мезонів і кварків добре узгоджуються з експериментом [373]. Оскільки спінові ефекти не описуються даною

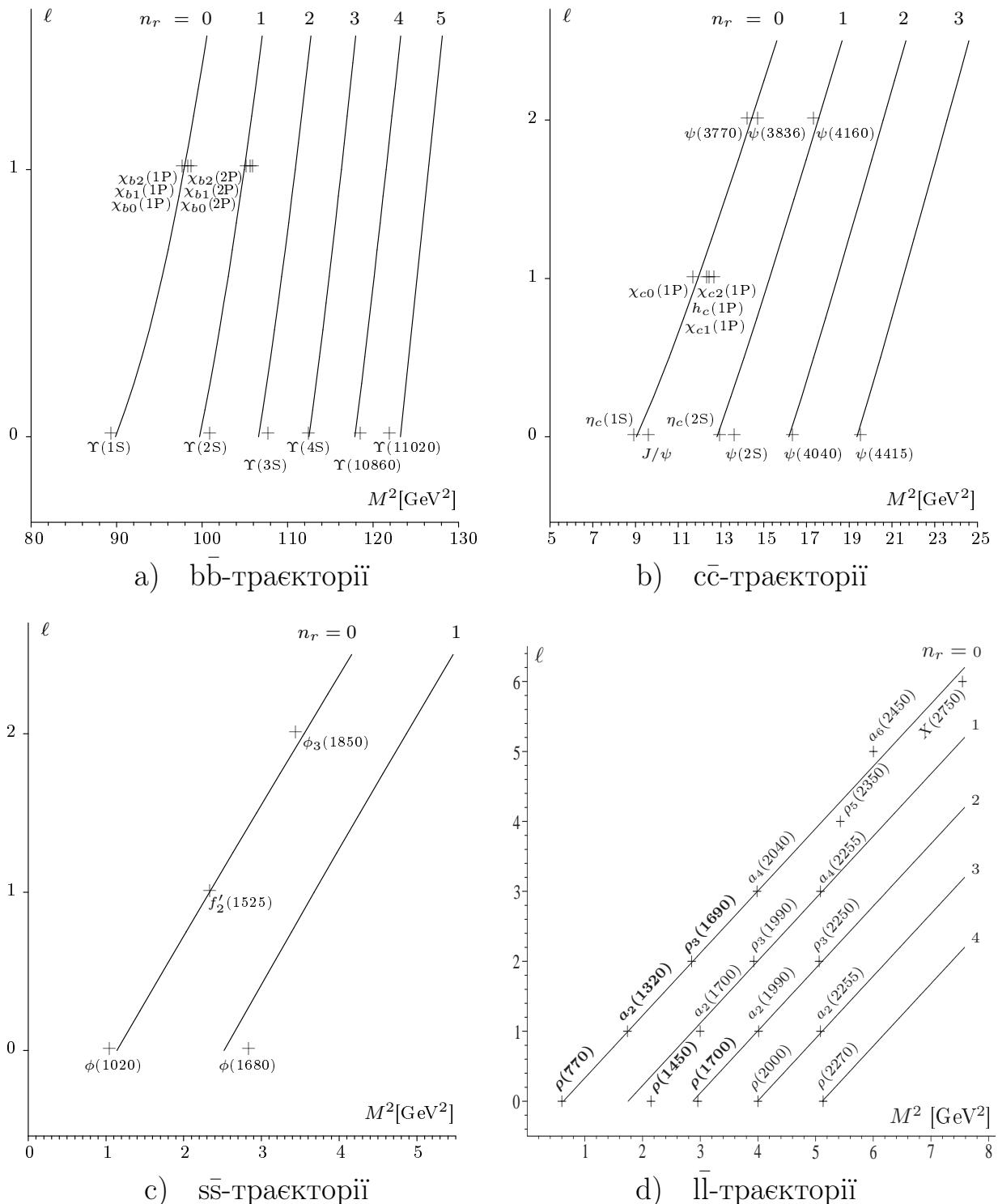


Рис. 3.3. Траекторії Редже для важких та легких кварконіїв.

$q\bar{q}$	Мезони	$m [\text{ГeB}]$	$\alpha$	$a [\text{ГeB}^2]$
$b\bar{b}$	$\Upsilon, \chi_b$	4.73	0.45	0.20
$c\bar{c}$	$\eta_c, h_c, \psi, \chi_c$	1.25	0.37	0.21
$s\bar{s}$	$\phi, f'$	0.10	0.40	0.12
$l\bar{l}$	$\rho, a$	0.005	0.80	0.11

моделлю, то її придатність можна оцінити шляхом усереднення за мультиплетом (для важких  $b\bar{b}$  і  $s\bar{s}$  мезонів), або розгляду траекторій для мезонів подібної спінової структури. Тут обрано легкі мезони, котрі можна класифікувати як стани  ${}^3\ell_{\ell+1}$ , і представлено відповідні траекторії Редже для  $s\bar{s}$  і  $l\bar{l}$  мезонів ( $l$  значить  $u$  або  $d$ ). Вони добре описуються лінійною асимптотичною формулою (3.2.19) навіть при  $\ell \sim 1$ .

З іншого боку, аромато-залежні неуніверсальністі константи натягу струни  $a$  (від  $0.2 \text{ GeV}^2$  для  $b\bar{b}$  до  $0.11 \text{ GeV}^2$  для  $l\bar{l}$ ) не узгоджуються з теоретичним очікуванням. Можлива причина цього – цілком векторна лоренц-структурата утримної взаємодії. В інших потенціальних моделях далекосяжна взаємодія є скалярною – повністю або частково. Побудові такої моделі типу Фоккера присвячено наступний підрозділ.

### 3.3. Часо-симетрична потенціальна модель

Тут розглядається часо-симетрична модель Рівакоби-Вейssa та її модифікації. Гамільтоновий опис і квантування цієї моделі та інших фоккерівських часо-симетричних фоккерівських систем є складною проблемою через часову нелокальність взаємодії [16, 48, 105, 340]. Канонічну структуру опису в цьому випадку можна забезпечити пертурбативними наближеннями методами [16, 48], які здебільшого не придатні для сильно зв'язаних систем.

Новий метод квантування часо-нелокальних двочастинкових систем типу Фоккера [22] буде викладено в розділі 4. Він ґрунтуються на використанні МКО-наближення і придатний для сильно зв'язаних систем. Тут, після короткого опису в п. 3.3.1, метод в п. 3.3.2 застосовується до квантування часо-симетричної моделі Рівакоби-Вейssa. Навіть більше, в п. 3.3.3 буде побудовано аналог моделі із скалярною утримною взаємодією, а в п. 3.3.4 розглянатиметься модель із скалярно-векторною суперпозицією. Коефіцієнти нахилу та дочірнього кроку траекторій Редже будуть пов'язані з натягом струни  $a$  та параметром скалярно-векторного змішування  $\xi$ .

В п. 3.3.5 модель буде доповнено короткосяжним членом Тетроде-Фоккера для повної відповідності з нерелятивістичною корнельською моделлю.

### 3.3.1. МКО-наближення у фоккерівській динаміці

Побудова гамільтонового опису систем типу Фоккера, потрібна для їх квантування, є складним завданням, яке можна здійснити лише в рамках певної пертурбативної схеми. Роман Гайда та співпрацівники запропонували схему гамільтонізації фоккерівських систем у рамках квазірелятивістичних наближень [16], яка добре працює у випадках, коли релятивістичні ефекти є слабкими. Однак легкі мезони як двокваркові системи є істотно релятивістичними об'єктами і вимагають строгого врахування релятивізму.

Тут краще використати запропоновану автором схему квантування на основі МКО-наближення, викладену в розділі 4 і додатку Е; див. [22]. Вона базується на тому факті, що всі відомі в літературі двочастинкові фоккерівські системи з притяганням (в певному сенсі) взаємодією допускають точні розв'язки у формі пласких концентричних колових орбіт радіусів  $R_a(\Omega)$ , залежних від кутової швидкості  $\Omega$ ; див. [59–61]. В розділі 4 і [22] це доведено для довільної двочастинкової системи типу Фоккера, заданої дією загального вигляду (4.1.1, с.194), інваріантною принаймні щодо групи Арістотеля (що включає часову і просторові трансляції та інверсії, і просторові повороти). Явно коваріантні фоккерівські системи [6, 31, 32, 37, 44–46], які є пуанкаре-інваріантними за побудовою (і тим більше арістотеле-інваріантними), а також параметрично інваріантними, можуть бути зведені до вигляду (4.1.1) шляхом вибору параметру еволюції  $\tau_a = t_a \equiv z_a^0$ ; тоді положеннями частинок є  $\mathbf{z}_a(t_a) = \{z_a^i(t_a), i = 1, 2, 3\}$ . Явно коваріантна система Рівакоби-Вейssa, задана дією  $I = I_{\text{free}} + I_{\text{int}}^{(v)}$ , де  $I_{\text{int}}^{(v)}$  дано в (3.2.1b) з  $\eta = 0$ , допускає точні розв'язки у вигляді колових орбіт навіть у сильно релятивістичній області. Множина цих розв'язків може слугувати 0-м наближенням у пертурбативному тлумаченні фоккерівської динаміки.

Інваріантність дії (4.1.1) щодо часових трансляцій і просторових поворотів

веде до існування інтегралів руху – енергії (4.1.8) та моменту імпульсу (4.1.14). На колових орбітах ці інтеграли є функціями кутової швидкості:  $E_{(0)}(\Omega)$  та  $\mathbf{J}_{(0)}(\Omega) \parallel \Omega$ , так що можна отримати функцію  $J_{(0)}(\Omega)$  де  $J_{(0)} = |\mathbf{J}_{(0)}|$  і  $\Omega = |\Omega|$ .

Далі зручно перейти до неінерційної системи відліку, що рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\Omega$ . Це можна здійснити заміною змінних  $\mathbf{z}_a(t_a) \rightarrow \mathbf{y}_a(t_a)$ :  $\mathbf{z}_a(t_a) = \mathbf{S}(t_a)\mathbf{y}_a(t_a)$ , де  $\mathbf{S}(t) = \exp t\Omega \in \text{SO}(3)$ , а антисиметрична матриця  $\Omega$  є дуальною до вектора  $\Omega$ . Частинки, що рухаються по колу, у цій системі частинок відліку нерухомі, а їх положення описується статичними векторами  $\mathbf{R}_a$ , такими, що  $\mathbf{R}_2 \uparrow\downarrow \mathbf{R}_1$ . Тоді малі збурення колових орбіт характеризуються векторами відхилення  $\boldsymbol{\rho}_a(t_a) = \mathbf{y}_a(t_a) - \mathbf{R}_a$ .

Для розгляду *майже колових орбіт* (МКО) розкладемо дію (4.1.1) за ступенями  $\rho_a^i$ . В найнижчому нетривіальному порядку отримаємо квадратичну за  $\rho_a^i(t)$  форму – часо-нелокальний інтеграл типу Фоккера (4.2.1, с.206) з  $6 \times 6$ -матричним ядром  $\mathbf{D}(t - t')$ , інваріантним щодо часових трансляцій та інверсій:  $\mathbf{D}^T(t' - t) = \mathbf{D}(t - t')$ . Відповідні рівняння руху утворюють часо-нелокальну лінійну однорідну систему (4.2.2) з характеристичними (власними) частотами, що визначаються з секулярного рівняння  $\det \mathbf{D}(\omega) = 0$  у термінах динамічної матриці  $\mathbf{D}(\omega) = \int dt \mathbf{D}(t) e^{i\omega t}$ . З огляду на часову нелокальність задачі (4.2.2) л.ч. секулярного рівняння є загалом неполіноміальною функцією частоти  $\omega$ . Тому множина його розв’язків може виявитися нескінченною, а характеристичні частоти – комплексними. В останньому випадку розв’язок рівнянь руху (4.2.2) є необмеженим, і виходить за межі МКО-наближення (де  $\rho_a^i$  мають бути малими). Тому серед усіх власних частот ми обираємо лише дійсні – в силу симетрії щодо часової інверсії вони з’являються парами:  $\{\pm\omega_\alpha \in \mathbb{R}, \alpha = 1, 2, \dots\}$ . Відповідний розв’язок (4.2.6, с.207) рівнянь руху (4.2.2) містить довільні комплексні амплітууди  $A_\alpha$  коливних мод, що параметризують фазовий простір системи. Лише одна мода  $A_r$ , що відповідає взаємним радіальним коливанням частинок, має фізичний сенс. Інші моди є або кінематичними – тоді їх можна редукувати шляхом переозначення колових орбіт 0-го порядку, або нефізичними, що виявляють фізично неприйнятну поведінку частинок і з’являються як математичний артефакт теорії.

Усі такі моди треба відкинути. Якщо це зроблено, то повний імпульс  $\mathbf{P} = 0$  та інтеграл центру мас  $\mathbf{K} = 0$ . Отже, МКО-наближення автоматично переносить рух в систему відліку ЦМ. У ній енергія системи рівна її повній масі:  $E_{\mathbf{P}=0} = M$ , а момент імпульсу стає власним моментом (або спіном) системи  $\mathbf{J}_{\mathbf{P}=0} = \mathbf{S}$ . Після відповідного нормування векторів поляризації в розв'язку (4.2.6) власний момент імпульсу (4.1.14) та маса системи (4.1.8) набувають вигляду:

$$S = S_{(0)}(\Omega), \quad (3.3.1)$$

$$M = M_{(0)}(\Omega) + M_{(2)}(\Omega, A_r) \quad (3.3.2)$$

$$\text{де } M_{(2)}(\Omega, A_r) = \omega_r(\Omega)|A_r|^2. \quad (3.3.3)$$

Щоб побудувати канонічний ЦМ-опис системи, перш за все необхідно обернути співвідношення (3.3.1) щодо  $\Omega = \Omega(S)$ . Це дозволяє отримати повну масу системи як її ЦМ-гамільтоніан:

$$M = M_{(0)}(S) + M_{(2)}(S, |A_r|) \equiv \left\{ M_{(0)}(\Omega) + \omega_r(\Omega)|A_r|^2 \right\}_{\Omega=\Omega(S)}. \quad (3.3.4)$$

Її слід розглядати як функцію від  $S = |\mathbf{S}|$ , де компоненти  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) власного моменту імпульсу  $\mathbf{S}$  системи задовольняють співвідношення ДП:  $\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ij}^k S_k$ , а амплітуди міжчастинкових радіальних коливань  $A_r$  задовольняють ДП:  $\{A_r, A_r^*\} = -i$ ,  $\{A_r, A_r\} = \{A_r^*, A_r^*\} = 0$ .

Щоб перейти до довільної системи відліку, необхідно ввести канонічні змінні, що характеризують рух системи в цілому, наприклад повний імпульс  $\mathbf{P}$  і канонічно спряжену змінну положення ЦМ  $\mathbf{Q}$ . Тоді повний гамільтонів опис системи, тобто 10 канонічних генераторів групи Пуанкаре, означені через  $M$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{P}$  та  $\mathbf{Q}$  в рамках опису БТ (2.1.56) чи еквівалентного (3.2.21); [18, 20]. Квантування такої релятивістичної гамільтонової механіки відоме [19, 21].

В даній роботі цікавим є в основному спектр масового оператора  $\hat{M}$ . Його можна отримати безпосередньо з (3.3.4) шляхом такої підстановки:

$$S \rightarrow \sqrt{\hat{\mathbf{S}}^2} \rightarrow \sqrt{\ell(\ell+1)} \approx \ell + \frac{1}{2}, \quad \ell = 0, 1, \dots \quad (3.3.5)$$

$$|A_r|^2 \rightarrow \frac{1}{2}(\hat{A}_r \hat{A}_r^\dagger + \hat{A}_r^\dagger \hat{A}_r) \rightarrow n_r + \frac{1}{2}, \quad n_r = 0, 1, \dots \quad (3.3.6)$$

Тут слід мати на увазі умову  $n_r \ll \ell$  як наслідок МКО-наближення.

### 3.3.2. Модель Рівакоби-Вейсса в МКО-наближенні

Розглянемо розв'язок моделі Рівакоби-Вейсса, що відповідає коловим орбітам частинок. З допомогою дії (2.1.2а), (3.2.1а) із симетричною ф-єю Гріна ( $\eta = 0$ ) для системи 2-х частинок рівних мас  $m_a \equiv m$  ( $a = 1, 2$ ), і загальної методики, запропонованої в [61] або [22], можна знайти зв'язом між кутовою швидкістю  $\Omega$  частинок і радіусом  $R$  їх орбіт. Замість  $R$  зручно оперувати зі швидкостями  $v_a \equiv v = R\Omega$ . Тоді зв'язок між  $\Omega$  і  $v$  можна задати неявно або параметрично – через допоміжний кут  $\phi$  [44, 45, 59–61]. Він пов'язаний зі швидкістю  $v$  рівністю:

$$\begin{aligned} f(\phi) &\equiv \phi^2 - 4v^2 \cos^2(\phi/2) = 0 \quad (0 \leq v < 1) \implies \\ &\implies v^2(\phi) = \frac{\phi^2}{2(1 + \cos \phi)} \quad \text{або} \quad v(\phi) = \frac{\phi/2}{\cos(\phi/2)}. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

У свою чергу для  $\Omega$  маємо

$$\frac{m}{a}\Omega = \frac{\phi}{\Gamma v^2} \left[ 1 - \frac{(1 - v^2)\phi}{f'(\phi)} \right] \equiv f_{\Omega}^{(v)}(\phi) \quad (3.3.8)$$

$$\text{де } f'(\phi) \equiv \partial f(\phi)/\partial \phi = 2(\phi + v^2 \sin \phi), \quad \Gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2},$$

Зауважимо, що  $v \in (0, 1)$ ,  $R \in (0, \infty)$  і  $\Omega \in (\infty, 0)$  якщо  $\phi \in (0, \phi_1)$ , де кут  $\phi_1/2 \equiv \chi_1 = 0.235\pi$  є додатнім розв'язком трансцендентного р-ня  $\chi = \cos \chi$ .

Інтеграли колового руху  $M_{(0)}$  і  $S = S_{(0)}$  зручно записати так:

$$\frac{\Omega M_{(0)}}{a} = \frac{2\phi}{v^2} \left[ 1 + v^2 - \frac{\phi(1 + v^4 \cos \phi)}{f'(\phi)} \right] \equiv f_M^{(v)}(\phi), \quad (3.3.9)$$

$$\frac{\Omega^2 S}{a} = \frac{1}{2} f'(\phi) \equiv f_S^{(v)}(\phi). \quad (3.3.10)$$

Вони зростають в межах  $M_{(0)} \in (2m, \infty)$  і  $S \in (0, \infty)$  коли  $\phi \in (0, 2\chi_1)$ .

Щоб вивчити динаміку систему в МКО-наближенні необхідно побудувати редуковану динамічну  $2 \times 2$ -матрицю  $\mathcal{D}^\perp$  [22], а тоді обчислити частоту  $\omega_r$  радіальних коливань, або, еквівалентно, відношення  $\lambda = \omega_r/\Omega$  як функцію змінної  $\Omega$ ,  $S$ ,  $v$  або (що найзручніше)  $\phi$ . Це здійснено в додатку D.

Тут ми цікавимось асимптотичним виразом для квадрату повної маси (3.3.4) при  $S \rightarrow \infty$ . В рамках пертурбативної процедури слід мати на увазі нерівність  $M_{(2)} \ll M_{(0)}$ . Тоді

$$M^2 \approx M_{(0)}^2 + 2M_{(0)}M_{(2)} = M_{(0)}^2 + 2M_{(0)}\omega_r|A_r|^2 \quad (3.3.11a)$$

$$= \frac{M_{(0)}^2}{S} \left\{ S + 2 \frac{S\Omega}{M_{(0)}} \lambda |A_r|^2 \right\}. \quad (3.3.11b)$$

Якщо існують і скінченні такі границі:

$$k = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{M_{(0)}^2}{S} = \lim_{\phi \rightarrow \phi_1} \frac{f_M^2(\phi)}{f_S(\phi)}, \quad (3.3.12)$$

$$\varkappa = 2 \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{S\Omega}{M_{(0)}} \lambda = 2 \lim_{\phi \rightarrow \phi_1} \frac{f_S(\phi)}{f_M(\phi)} \lambda(\phi), \quad (3.3.13)$$

то асимптотичне значення для квадрату маси (3.3.11) набуває вигляду

$$M^2 \sim ka \{ S + \varkappa |A_r|^2 \} \quad \text{при } S \rightarrow \infty \quad (3.3.14)$$

і, після квантування (3.3.5), (3.3.6), відтворює траєкторії Редже (1.2.5) з  $\sigma = ka$ . В даній моделі векторного конфайнменту

$$k^{(v)} = 8\chi_1(1 + \sin \chi_1) \approx 9.896, \quad \varkappa^{(v)} = 1. \quad (3.3.15)$$

Асимптотичне значення коефіцієнту дочірнього кроку  $\varkappa^{(v)} = 1$  добре підходить для опису вежової структури спектру мезонів. Але коефіцієнт нахилу  $k^{(v)} \approx 9.896$  разом із значенням  $a = 0.18 \text{ ГeB}^2$  натягу струни дає занадто великий нахил траєкторії Редже:  $\sigma = k^{(v)}a = 1.78 \text{ ГeB}^2 > 1.15 \text{ ГeB}^2$ . Як було зазначено вище, можлива причина цієї невідповідності є виключно векторна лоренц-структурата утримної взаємодії в даній моделі. Зазвичай таку взаємодію вважають скалярною [14, 29, 207] або скалярно-векторною [22, 296–298, 301, 374].

Щоб підтвердити або спростувати це припущення, в наступному підрозділі буде побудовано аналог моделі Рівакоби-Вейсса із скалярною взаємодією.

### 3.3.3. Дія Фоккера із скалярною утримною взаємодією

Нехай двочастинкова дія містить вільночастинкові члени (2.1.2a) і фоккерівський член взаємодії скалярного типу [46]:

$$I_{\text{int}}^{(\text{s})} = 4\pi a \iint d\tau_1 d\tau_2 \sqrt{\dot{z}_1^2} \sqrt{\dot{z}_2^2} G_{\text{sym}}(z_{12}). \quad (3.3.16)$$

Якщо  $G_{\text{sym}}(x)$  обрати як симетричну ( $\eta = 0$ ) ф-ю Гріна (3.1.41), то можна очікувати, що член (3.3.16) описуватиме скалярну утримну взаємодію. Дійсно, дію типу Фоккера (2.1.2a), (3.3.16) можна отримати з ефективної теоретико-польової моделі Кіскіса [11, 102] шляхом редукції скалярного поля, якщо задати вихідну дію (1.3.24a) з точковими джерелами (1.3.25) і польовим лагранжіаном з вищими похідними (6.3.1).

Однак у цьому разі виникає ще сильніша розбіжність, ніж у випадку моделі векторного типу: там досить було шляхом інтегрування за частинами (3.1.44) еквівалентно перетворити дію Вейssa до форми Рівакоби. Тут не лише фоккерівський член (3.3.16), але й відповідні рівняння руху є розбіжними. Щоб обійти цю трудність, досить зробити в (3.3.16) заміну ядра (3.1.41):

$$G_{\text{sym}}(x) \equiv \frac{1}{16\pi} \Theta(x^2) \longrightarrow \bar{G}_{\text{sym}}(x) \equiv -\frac{1}{16\pi} \Theta(-x^2) = G_{\text{sym}}(x) - \frac{1}{16\pi}. \quad (3.3.17)$$

Оскільки  $\bar{G}_{\text{sym}}(x)$  відрізняється від  $G_{\text{sym}}(x)$  на константу, обидві є функціями Гріна рівняння (3.1.40), точніше, його скалярної версії (6.3.2) з теорії Кіскіса [102].

Заміна переносить взаємодію із внутрішнього 4-об'єму світлового конуса (як на рис. 1.2c) у його зовнішній 4-об'єм (як на рис. 1.2d), через який проходять скінченні сегменти світових ліній. З іншого боку, таку заміну можна тлумачити як перенормування мас спокою частинок:

$$m_{0a} \rightarrow m_a = m_{0a} - \frac{a}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_{\bar{a}} \sqrt{\dot{z}_{\bar{a}}^2}, \quad a = 1, 2, \quad \bar{a} = 3 - a,$$

де  $m_{0a}$  – нескінчена “гола” маса  $a$ -ї частинки, тоді як  $m_a$  – скінчена.

Подальший розгляд скалярної моделі є подібним до розгляду векторної. Знову обмежимось випадком  $m_1 = m_2 \equiv m$ . Динамічні характеристики колових орбіт

параметризуються кутом  $\phi$ . Для кутової швидкості  $\Omega$  маємо:

$$\frac{m}{a}\Omega = \frac{\phi}{\Gamma} \left[ \frac{(1-v^2)\phi}{v^2 f'(\phi)} - 1 \right] \equiv f_{\Omega}^{(s)}(\phi), \quad (3.3.18)$$

де  $f'(\phi)$ ,  $v$  і  $\Gamma$  як ф-ї кута  $\phi$  означені в п. 3.3.2. На відміну від векторного випадку, тут  $f_{\Omega}^{(s)}(\phi) \rightarrow 0$  якщо  $\phi \rightarrow \phi_0 \neq \phi_1$ , де  $\phi_0/2 \equiv \chi_0$  – додатній розв'язок трансцендентного рівняння:  $3\chi^2 \cos \chi + 2\chi^3 \sin \chi - \cos^3 \chi = 0$ ,  $\chi \in [0, \pi/4]$ .

Неочікувано те, що швидкості частинок  $v \rightarrow 0.535 < 1$  при  $\chi \rightarrow \chi_0$ , тоді як радіус орбіт  $R \rightarrow \infty$ . Це відрізняє скалярну модель від векторної, в якій  $v \rightarrow 1$  при  $R \rightarrow \infty$ . Для інтегралів колового руху маємо:

$$\frac{\Omega M_{(0)}}{a} = \frac{2\phi^2(1-v^2)^2}{v^2 f'(\phi)} \equiv f_M^{(s)}(\phi), \quad (3.3.19)$$

$$\frac{\Omega^2 S}{a} = (1-v^2)\phi \equiv f_S^{(s)}(\phi). \quad (3.3.20)$$

Легко переконатися, що  $M_{(0)} \in (2m, \infty)$  і  $S \in (0, \infty)$  якщо  $\phi \in (0, 2\chi_0)$ .

Вживаючи ф-ї (3.3.19), (3.3.20) в р-нях (3.3.12), (3.3.13) та обчисливши границі при  $\phi \rightarrow \phi_0$  (замість  $\phi \rightarrow \phi_1$ ) отримаємо коефіцієнти нахилу усіх та кроку дочірніх траєкторій Редже:

$$k^{(s)} = 2.716, \quad \varkappa^{(s)} = 1.902. \quad (3.3.21)$$

Останній близький до 2, як в осциляторних та струнних моделях мезонів [27, 283, 284, 290]. Випадкове виродження і, отже, вежова структура спектру мас відтворюється наближено. Знову коефіцієнт нахилу не є віжповідним до експерименту (подібно до векторної моделі), але тут він помітно менший від загально-прийнятих значень  $4 \div 8$ .

Відмінність між векторною і скалярною моделями дає підставу надіятися на краще узгодження з експериментом (принаймні асимптотичне) моделі типу Фоккера із скалярно-векторною утримною взаємодією.

### 3.3.4. Модель із скалярно-векторним конфайнментом

Фоккерівську систему двох частинок, що утримуються суперпозицією скалярної та векторної взаємодій, можна природньо задати дією (2.1.2а) з

$$I_{\text{int}}^{(\xi)} = (1 - \xi)I_{\text{int}}^{(\text{s})} + \xi I_{\text{int}}^{(\text{v})}, \quad (3.3.22)$$

де  $I_{\text{int}}^{(\text{s})}$  та  $I_{\text{int}}^{(\text{v})}$  означено в р-нях (3.3.16), (3.3.17) та (3.2.1а) (з  $\eta = 0$ ) відповідно, а  $\xi \in [0, 1]$  – параметр змішування.

Усі ф-ї  $f_{\Omega}^{(\xi)}(\phi)$ ,  $f_M^{(\xi)}(\phi)$  та  $f_S^{(\xi)}(\phi)$ , що визначають динаміку та інтеграли колового руху моделі, є суперпозиціями ф-й (3.3.8)-(3.3.10) та (3.3.18)-(3.3.20):

$$f^{(\xi)}(\phi) = (1 - \xi)f^{(\text{s})}(\phi) + \xi f^{(\text{v})}(\phi). \quad (3.3.23)$$

Тоді ф-ю  $[M_{(0)}^{(\xi)}(S)]^2$ , що є класичним аналогом головної траєкторії Редже, можна представити у параметричній формі:

$$\frac{M_{(0)}^{(\xi)}}{m} = \frac{f_M^{(\xi)}(\phi)}{f_{\Omega}^{(\xi)}(\phi)}, \quad (3.3.24)$$

$$\frac{aS}{m^2} = \frac{f_S^{(\xi)}(\phi)}{\left[f_{\Omega}^{(\xi)}(\phi)\right]^2}, \quad \begin{aligned} \phi &\in [0, \phi_{\xi}], \\ \xi &\in [0, 1]; \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

її показано на рис. 3.4 для різних значень  $\xi$ . Максимальний кут  $\phi_{\xi}/2 \equiv \chi_{\xi}$  є найменшим додатнім коренем рівняння  $f_{\Omega}^{(\xi)}(2\chi) = 0$ . Він монотонно зростає в межах  $\chi_{\xi} \in [\chi_0, \chi_1]$ , якщо  $\xi \in [0, 1/2]$ , і  $\chi_{\xi} = \chi_1$ , якщо  $\xi \in [1/2, 1]$ . Подібно, максимальна швидкість частинок (при  $R \rightarrow \infty$ , коли  $M_{(0)} \rightarrow \infty$  та  $S \rightarrow \infty$ ) монотонно зростає:  $v \in [0.535, 1]$ , якщо  $\xi \in [0, 1/2]$ , і  $v = 1$ , якщо  $\xi \in [1/2, 1]$ .

Коефіцієнти нахилу та дочірнього кроку можна обчислити подібно до передніх випадків, тобто вживаючи (3.3.12) та (3.3.13) з граничним кутом  $\phi_{\xi}$  (замість  $\phi_1$ ). Можна довести рівність:

$$\lim_{\phi \rightarrow \phi_{\xi}} \frac{f_S^{(\xi)}(\phi)}{f_M^{(\xi)}(\phi)} = \frac{1}{2}, \quad \xi \in [0, 1].$$

Тому формула (3.3.13) для коефіцієнту дочірнього кроку спрощується:

$$\varkappa^{(\xi)} = \lim_{\phi \rightarrow \phi_{\xi}} \lambda^{(\xi)}(\phi), \quad \xi \in [0, 1].$$

Функцію  $\lambda^{(\xi)}(\phi)$  можна визначити чисельно з секулярного р-ня  $\det \bar{\mathcal{D}}^{(\xi)}(\lambda) = 0$  для матриці (D.17); див. додаток D де на рис. D.1 подано графік  $\lambda^{(\xi)}(\phi)$ .

Обидва коефіцієнти нахилу та дочірнього кроку є функціями параметру змішування. Зокрема

$$k^{(\xi)} = \xi k^{(v)}, \quad \varkappa^{(\xi)} = 1, \quad \xi \in [1/2, 1]. \quad (3.3.26)$$

Поведінка цих ф-й на цілому проміжку  $\xi \in [0, 1]$  представлена на рис. 3.5. Пунктирні лінії на графіках ставлять значення  $\xi$  і  $k$  у взаємо-відповідність для  $\xi=1/2, 1$ ,  $k=4, 2\pi, 8$ . З цих графіків очевидно, що коефіцієнт нахилу  $k^{(\xi)}$  є монотонно зростаючою ф-єю параметру змішування  $\xi$ :  $k^{(\xi)} \in [k^{(s)}, k^{(v)}] = [2.716, 9.896]$  при  $\xi \in [0, 1]$ . Цей проміжок містить прийняті у літературі значення  $k = 4 \div 8$ , що зустрічаються у релятивістичних потенціальних моделях.

Властивості щодо виродження в системі, в якій переважає скалярна (при  $\xi < 1/2$ ) чи векторна (при  $\xi > 1/2$ ) складова утримної взаємодії, разюче відрізняються одна від одної: для довільного  $\xi \in [1/2, 1]$  є випадкове виродження воднево-подібного типу  $\ell+n_r$ . У цьому випадку можна отримати довільне значення для  $k$  із проміжку  $k^{(\xi)} \in [\frac{1}{2}k^{(v)}, k^{(v)}] = [4.948, 9.896]$ , зокрема,  $k = 2\pi$  та  $k = 8$ , типові для струнних [283, 359] та простих осциляторних моделей [27, 290].

Якщо ж домінує скалярна складова, то нижня межа  $k = 4$  для нахилу [14] досягається мікстурою  $\xi \approx 0.37$ , яка, у свою чергу, веде до кроку  $\varkappa \approx 3/2$ . Випадкове виродження є, хоч дещо приховане.

При квантуванні спектр квадрату мас обчислюється з допомогою правил квантування (3.3.5)-(3.3.6), застосованих до класичного виразу (3.3.11). Практично, в п.ч. р-ня (3.3.25) треба підставити  $S = \ell + \frac{1}{2}$  та розв'язати це рівняння відносно кутів  $\phi_\ell$  ( $\ell = 0, 1, \dots$ ), які у свою чергу є аргументами ф-й (3.3.23), (3.3.24),  $f_\Omega(\phi)$  та  $\lambda(\phi)$  у п.ч. р-ня (3.3.11).

Зауважимо, що класична траєкторія Редже (3.3.24), (3.3.25) (і рис. 3.4) починається з  $S = 0$ , що відповідає  $\phi = 0$  і дає  $M_{(0)}(0) = 2m$ . У квантовому випадку нижнє значення для безрозмірної величини  $s \equiv Sa/m^2$  (у л.ч. р-ня (3.3.25)), що відповідає s-станам (тобто,  $\ell = 0$ ) є  $s_0 \equiv \frac{1}{2}a/m^2 > 0$ , тому  $\phi_0 > 0$ . Наприклад,

якщо покласти  $a = 0.18 \text{ ГeB}^2$  і  $m = 0.15 \text{ ГeB}$  (конституентна маса легких кварків), отримаємо  $s_0 \approx 4$ . У цьому випадку помітно крива ділянка головної траєкторії Редже, присутня у класичному описі (див рис. 3.4), зникає з квантової траєкторії, що тому є близькою до прямої.

Замість цього, виникає помилкова кривина у нижній частині дочірніх траєкторій, де  $n_r \gtrsim \ell$ . Причина цього явища у тому, що їх класичні відповідники (тобто р-ня (3.3.11) з  $A_r \neq 0$ ) є сингулярними у границі повільного руху  $S \rightarrow 0$ . Щоб виправити цей недолік, розглянемо нерелятивістичну енергію двох частинок, що взаємодіють лінійним потенціалом [22, 207]:

$$E \equiv M - 2m = E_{(0)} + \omega_r |A_r|^2 + o(|A_r|^2) \equiv \frac{3}{2} \left( \frac{2a^2 S^2}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{2|A_r|^2}{\sqrt{3}S} \right\} + o(S^{-\frac{1}{3}}).$$

З тією ж точністю для  $S \gg 0$  можна покласти:

$$E \approx \frac{3}{2} \left( \frac{2a^2 S^2}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \nu \frac{2|A_r|^2}{\sqrt{3}S} \right\}^{\frac{1}{\nu}} = \frac{3}{2} \left( \frac{2a^2}{m} S^{2-\frac{3}{\nu}} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ S + \nu \frac{2}{\sqrt{3}} |A_r|^2 \right\}^{\frac{1}{\nu}} \quad (3.3.27)$$

Цей вираз є регулярним при  $S \rightarrow 0$  за умови  $\nu \geq 3/2$ . Навіть більше, при квантуванні (3.3.5), (3.3.6) вираз (3.3.27) із  $\nu = 3/2$  веде до спектральної формули  $E_{\ell n_r} \approx \frac{3}{2} (2a^2/m)^{\frac{1}{3}} \left\{ \ell + \frac{1}{2} + \sqrt{3}(n_r + \frac{1}{2}) \right\}^{\frac{2}{3}}$ , що забезпечує (навіть при  $n_r \gtrsim \ell$ ) 3%-точність; порівняти із квазікласичним спектром s-станів (із  $\ell = 0$ ):  $E_{0 n_r} \approx (a^2/m)^{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{3\pi}{2} (n_r + \frac{3}{4}) \right\}^{\frac{2}{3}}$ . Тому для повної маси можна покласти (3.3.4):

$$M \approx M_{(0)} + \omega_r |A_r|^2 \approx 2m + (M_{(0)} - 2m)^{1-\frac{1}{\nu}} \left\{ M_{(0)} - 2m + \nu \omega_r |A_r|^2 \right\}^{\frac{1}{\nu}}. \quad (3.3.28)$$

Із  $\nu = 3/2$  р-ня (3.3.28) є придатним у нерелятивістичній області  $E \ll 2m$ . Із  $\nu = 2$  воно точно відтворює п.ч. р-ня (3.3.11a) за умови  $M \gg 2m$ , тобто в істотно релятивістичній області. Тому  $\nu$  можна вживати як параметр припасування, що змінюється у межах від  $\nu = 3/2$  для систем з важких кварків, до  $\nu = 2$  для систем із легких кварків. Останній випадок пасує до опису легких мезонів. Це приводить до майже лінійних траєкторій Редже, що описуються спектральною формулою (1.2.5) з параметрами  $\sigma = ka$  та  $\varkappa$ , означеними через р-ня (3.3.26) та рис 3.5. Параметр інтерцепту  $\zeta$ , що випливає з даної моделі, можна оцінити так:

$\zeta \geq (1 + \varkappa)/2 + 4m^2/\sigma$ . Це перевищує дослідне значення  $\zeta \approx 1/2$  для сімейства найлегших мезонів навіть у безмасовій границі  $m = 0$ . Тому передбачені квадрати мезонних мас є завеликими принаймні на  $\Delta M^2 \approx \sigma\varkappa/2 + 4m^2$ . Цей недолік можна усунути шляхом врахування короткосяжної взаємодії.

### 3.3.5. Врахування взаємодії 1-глюонного обміну

Класична хромодинаміка точкових джерел допускає абелеві розв'язки рівнянь Янга-Міллса [375, 376] які, з одного боку, є тотожні до електродинамічних потенціалів Льєнара-Віхерта, а з другого – вони дають класичне підґрунтя для взаємодії 1-глюонного обміну кварків.

Тому, як аналог прямої короткосяжної міжкваркової взаємодії, електродинаміка Тетроде-Фоккера [34, 35] є приналежністю. Відповідна двочастинкова задача описується дією (2.1.2),  $\eta = 0$ , і є предметом постійного вивчення [59, 60, 64, 333–336]. Зокрема, динаміка колових орбіт означена такими рівняннями та інтегралами руху [59, 60]:

$$\frac{m}{\alpha\Omega} = 8 \frac{1 + \cos\phi}{[\Gamma f'(\phi)]^3} + 4 \frac{\phi + \sin\phi}{\Gamma[f'(\phi)]^2} \equiv f_{\Omega}^{(e)}(\phi), \quad (3.3.29)$$

$$\frac{M_{(0)}}{m} = \frac{2}{\Gamma}, \quad \frac{S}{\alpha} = 2 \frac{1 + v^2 \cos\phi}{f'(\phi)} \equiv f_J^{(e)}(\phi). \quad (3.3.30)$$

Ці означення будуть використані далі.

Скомбінуємо інтеграл дії (2.1.2),  $\eta = 0$  з іншими членами дії (3.3.22):

$$I_{\text{int}} = I_{\text{int}}^{(e)} + I_{\text{int}}^{(\xi)}. \quad (3.3.31)$$

Тепер  $\alpha$  в (3.2.1b) пов'язана із константою сильної взаємодії:  $\alpha = \frac{4}{3}\alpha_s$ , а значок "(e)" вказує на взаємодію 1-глюонного обміну (*exchange*) замість електромагнетної. Дія (2.1.2a), (3.3.31) веде до корнельського потенціалу (1.2.2) у нерелятивістичній граници. Релятивістична МКО-динаміка цієї моделі є складною, і тут вивчатимуться в основному колові орбіти.

Рівняння колового руху зводяться до квадратичного р-ня для  $\Omega$ :

$$m\Omega - af_{\Omega}^{(\xi)}(\phi) - \alpha\Omega^2 f_{\Omega}^{(e)}(\phi) = 0. \quad (3.3.32)$$

Їого розв'язок як функцію змінної  $\phi$ ,

$$\frac{m}{a}\Omega = \frac{2f_{\Omega}^{(\xi)}(\phi)}{1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{\alpha}f_{\Omega}^{(\xi)}(\phi)f_{\Omega}^{(e)}(\phi)}} \equiv f_{\Omega}^{(\pm)}(\phi), \quad \text{де } \bar{\alpha} = \frac{\alpha a}{m^2}, \quad (3.3.33)$$

можна представити двома гілками з такими властивостями:

- $f_{\Omega}^{(+)}(\phi_{\min}) = f_{\Omega}^{(-)}(\phi_{\min})$ , де  $\phi_{\min} > 0$  та  $4\bar{\alpha}f_{\Omega}^{(\xi)}(\phi_{\min})f_{\Omega}^{(e)}(\phi_{\min}) = 1$ ;
- $f_{\Omega}^{(+)}(\phi) < f_{\Omega}^{(-)}(\phi)$ ,  $\phi > \phi_{\min}$ ;
- $f_{\Omega}^{(+)}(\phi) \xrightarrow[\bar{\alpha} \ll 1]{} f_{\Omega}^{(\xi)}(\phi)$ ,  $\phi \in (\phi_{\min}, \phi_{\xi})$ ;  $f_{\Omega}^{(-)}(\phi) \xrightarrow[\bar{\alpha} \ll 1]{} [\bar{\alpha}f_{\Omega}^{(e)}(\phi)]^{-1}$ ,  $\phi \in (\phi_{\min}, \phi_1)$ .

Коловий рух не може бути як завгодно повільним: точка  $\phi_{\min}$  відповідає най-повільнішій орбіті радіусу  $R_0 = v_{\min}/\Omega_0$ , де  $v_{\min} = v(\phi_{\min})$  в силу (3.3.7), та  $\Omega_0 \equiv \Omega(\phi_{\min})$  в силу (3.3.33). Для інших колових орбіт маємо радіуси:

$$R^{(\pm)} = \frac{m}{a}v(\phi)/f_{\Omega}^{(\pm)}(\phi), \quad R^{(-)} < R_0 < R^{(+)}, \quad \phi > \phi_{\min}.$$

Тому функції, марковані значками "(-)" або "(+)", описують коротко- або далекосяжну динаміку системи.

Підстановка розв'язку (3.3.33) в інтеграли руху:

$$M_{(0)} = \frac{a}{\Omega}f_M^{(\xi)}(\phi) + 2\alpha\frac{\Omega}{\Gamma}f_{\Omega}^{(e)}(\phi), \quad S = \frac{a}{\Omega^2}f_S^{(\xi)}(\phi) + \alpha f_S^{(e)}(\phi) \quad (3.3.34)$$

дає класичний аналог головних траєкторій Редже, показаних на рис. 3.6

Порівняння рис. 3.4 та 3.6 виявляє два ефекти, спричинені 1-глюонним обміном. Перший – це деформація нижньої частини траєкторії: викривлення при  $\bar{\alpha} \lesssim 1$ , і випростування при  $\bar{\alpha} \gtrsim 1$ . Як і у випадку часо-асиметричної моделі (рис. 3.1 на с. 165), викривлення не помітне, бо нижні сегменти траєкторій випадають при квантуванні, а випростування наближає траєкторію до лінійної. Другий ефект – зсув траєкторій в цілому вліво, що зменшує сталу інтерцепту  $\zeta$ . Обидва ефекти є бажаними у спектроскопії легких мезонів.

Для простоти розглянемо граничний випадок безмасових кварків:  $m \rightarrow 0$  ( $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$ ). Тоді дійсний розв'язок р-ня (3.3.32) існує, якщо  $f_{\Omega}^{(\xi)}(\phi) < 0$ . Це можливо при  $\phi_{\xi} \leq \phi \leq \phi_1$ , якщо  $0 \leq \xi < 1/2$ . Важливішим є випадок  $1/2 \leq \xi \leq 1$ , де  $\phi_{\xi} = \phi_1$ ,

Рис. 3.4. Класичні траєкторії Редже для різних значень параметра змішування  $\xi$  у моделі із скалярно-векторною утримною взаємодією.

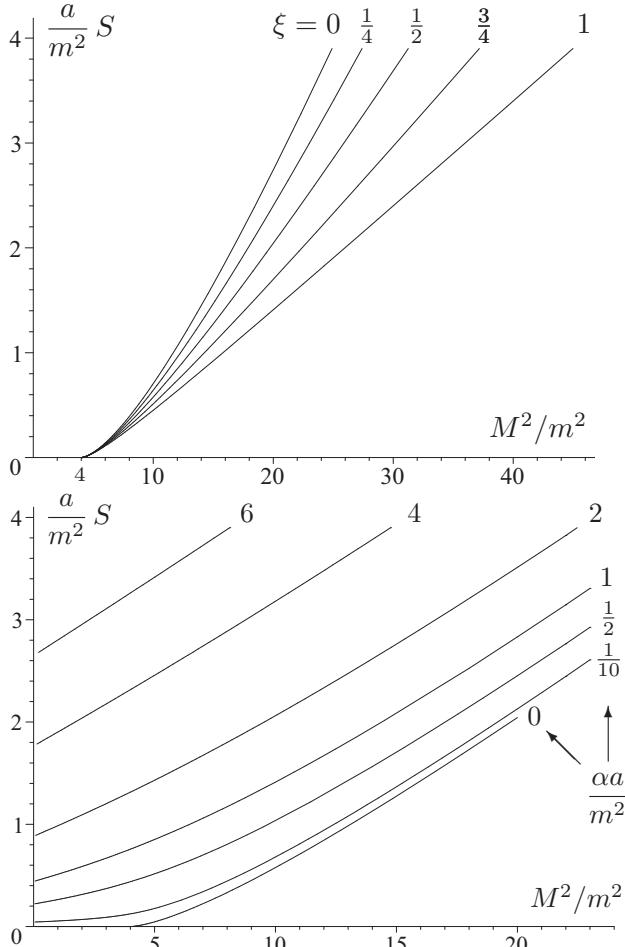
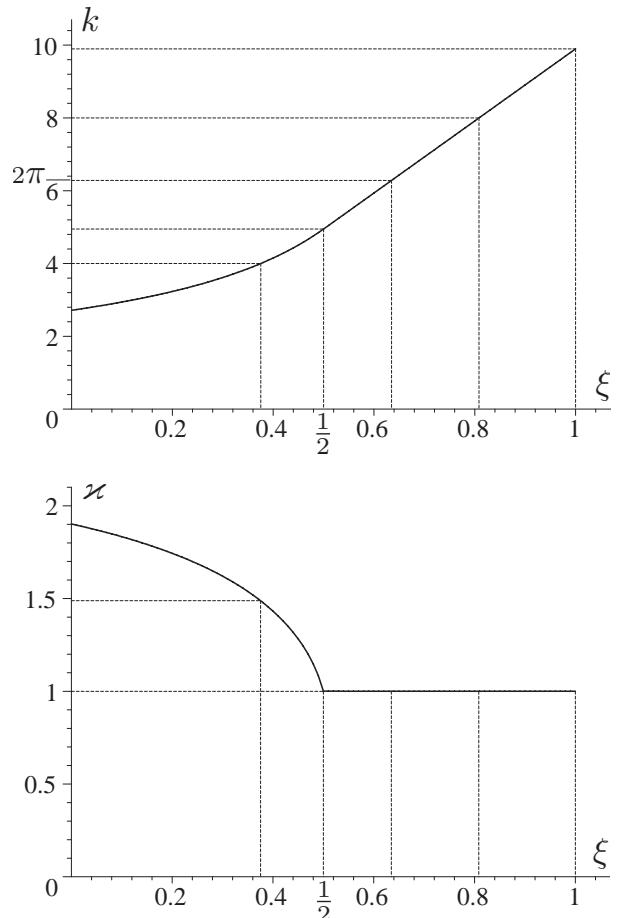


Рис. 3.6. Класичні траєкторії Редже для  $\xi = 1/2$  і різних значень  $\alpha$  у повній моделі.

Рис. 3.5. Коефіцієнти нахилу та кроку дочірніх траєкторій як ф-ї параметру  $\xi$  у цій же моделі. Пунктирні лінії з'єднують значення  $\xi$  з  $k$  і  $\kappa$  для  $\xi = 1/2$  і  $k = 4, 2\pi, 8$ .



усі коефіцієнти в р-ні (3.3.32) занулюються, і тому частота  $\Omega$  є неозначененою (тобто довільною). У цьому випадку сім'я колових розв'язків параметризується кутовою швидкістю  $\Omega$  кварків, а не їх орбітальною швидкістю  $v$ , яка у цьому разі фіксована швидкістю світла:  $v(\phi_1) = 1$ . Підстава значення  $\phi = \phi_1$  (тобто  $f_M^{(\xi)}(\phi_1) = 0$ ) в, і вилучення  $\Omega$  з рівностей (3.3.34) дає *точний* внесок колових орбіт в квадрат повної маси:

$$M_{(0)}^2(S) = k^{(\xi)} a \{S - \alpha s_0\}, \quad (3.3.35)$$

де  $s_0 \equiv f_S^{(e)}(\phi_1) = 0.4416$ ,  $k^{(\xi)} = \xi k^{(v)}$  and  $k^{(v)} = 9.896$  (див. (3.3.26) та (3.3.15)).

З (3.3.35) видно, що роль короткосяжної взаємодії 1-глюонного обміну стає асимптотично (при  $S \gg 1$ ) малою у порівнянні з далекосяжною утримною взаємодією. Те ж є правдоподібним щодо внеску в  $M^2$ , спричиненого радіальними міжчастинковими коливаннями: короткосяжний внесок є малим, і ним можна знештувати у порівнянні з далекосяжним внеском  $k\alpha\kappa|A_r|^2$  в асимптотичній формулі (3.3.14). Тому, враховуючи, що  $\kappa = \kappa^{(\xi)} = 1$  для  $\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1$ , і вживаючи правила квантування (3.3.5)-(3.3.6), отримаємо рівняння для квантованих траєкторій Редже (принаймні, в асимптотичному режимі  $\ell \gg n_r$ ):

$$M^2 \sim k^{(\xi)} a \{\ell + n_r + 1 - \alpha s_0\}. \quad (3.3.36)$$

Воно збігається із спектральною формулою для легких мезонів (1.2.5) за умов:

$$\sigma = \xi k^{(v)} a, \quad \kappa = 1, \quad \zeta = 1 - \alpha s_0. \quad (3.3.37)$$

Цей результат проілюстровано на рис. 3.3d (с. 175), отриманому раніше в п. 3.2.6 в рамках часо-асиметричної векторної моделі. В рамках даної часо-симетричної скалярно-векторної моделі отримано ідентичну картину, але з іншими вхідними параметрами. Значення натягу струни  $a = 0.18 \text{ ГeB}^2$  є загально прийнятым (на відміну від  $0.11 \text{ ГeB}^2$  для часо-асиметричної (ЧА) векторної моделі). Тоді параметр змішування  $\xi = 0.65$  забезпечує загальноприйнятий нахил  $\sigma = 2\pi a = 1.15 \text{ ГeB}^2$  і нетрадиційний але бажаний кроковий коефіцієнт  $\kappa = 1$ . Нарешті, значення  $\alpha \equiv \frac{4}{3}\alpha_s = 1$  (блізьке до 0.8 для ЧА-моделі) обрано для того, щоб забезпечити найкращу відповідність між модельними траєкторіями та дослідними даними щодо сім'ї легких безароматних векторних мезонів з ізоспіном  $I = 1$ ; див. рис. 3.3d, де надійні дані (позначені товстим шрифтом) доповнено деякими мало надійними. Очевидна вежова структура, відповідна до виродження  $(\ell+n_r)$ -типу.

Варто зазначити, що вибір  $\alpha_s(m_q) = 3/4$  біжучої константи сильної взаємодії відповідає конституентній масі легких кварків  $m_q \approx 0.15 \text{ ГeB}$ . Це випливає з добре відомої формули:  $\alpha_s(m) = \alpha_0 \left\{ 1 + \frac{7}{2\pi} \alpha_0 \ln \frac{m}{\Lambda} \right\}^{-1}$ , де для масштабу  $\Lambda = m_Z = 91.19 \text{ ГeB}$  проміжного Z-бозону маємо  $\alpha_0 \equiv \alpha_s(m_Z) = 0.117$  [373]. Різниця між значенням  $m_q \approx 0.15 \text{ ГeB}$  і границею  $m = 0$  можуть давати невизначеність у

квадраті мас мезонів порядку  $\Delta M^2 \sim 6m_q^2 \sim 0.1 \text{ ГeB}^2$ , що є непомітною у масштабі рис. 3.3d.

### 3.4. Висновки

У цьому розділі різні методи квантування застосовано до моделі Рівакоби-Вейсса [44, 45]: спочатку до її простішої часо-асиметричної версії, а потім – до часо-симетричного оригіналу. Ця модель представляє фоккерівську систему 2-х частинок, взаємодію яких можна інтерпретувати в термінах класичної теорії векторного калібрувального поля з вищими похідними [6, 46, 102–104]. Функція Гріна  $\propto 1/k^4$  у цій теорії веде себе як інфрачервона асимптотика глюонного пропагатора [103] і веде у статичній границі до лінійного потенціалу взаємодії  $U = ar$ . В ультрарелятивістичній границі модель відтворює асимптотично лінійні траекторії Редже, нахил яких  $\sigma = ka$  жорстко пов’язаний з параметром натягу струни  $a$ : для часо-асиметричної моделі – з коефіцієнтом  $k \approx 9.9$ , для часо-симетричної – з  $k \approx 10.4$ . Спектр мас виявляє виродження  $(\ell+n_r)$ -типу яке забезпечує вежову структуру спектру. Тому квантована модель Рівакоби-Вейсса могла б служити доброю основою для опису спектру мас легких мезонів.

У різноманітних не-квазі- та релятивістичних потенціальних моделях важких і легких мезонів лінійний потенціал  $U = ar$  з’являється як скалярна або скалярно-векторна частина міжкваркової взаємодії. Якщо прийняти, що натяг струни  $a$  є універсальним (тобто незалежним від аромату) параметром із значенням у межах  $a = 0.15 \div 0.3 \text{ ГeB}^2$ , тоді модель Рівакоби-Вейсса завищує величину нахилу траєкторій. Або, при фіксованому  $\sigma \approx 1.15 \text{ ГeB}^2$ , занижує натяг струни  $a$  і, отже, дає хибний слабкорелятивістичний спектр важких мезонів. Оскільки взаємодія у цій моделі є виключно векторною, то запропоновано її скалярний відповідник, який можна пов’язати з теорією поля з вищими похідними Кіккіса [102]. Але скалярна модель навпаки – занижує нахил траєкторій. Тому розглянено модель із скалярно-векторною взаємодією. Виявилося, що параметри нахилу  $\sigma = 1.15 \div 1.2 \text{ ГeB}^2$  та натягу струни  $a = 0.15 \div 0.3 \text{ ГeB}^2$  можна взаємно узгодити, якщо доля векторної утримної взаємодії  $\xi = 0.37 \div 0.8$ . Зокрема, доля  $\xi = 0.65$

пов'язує найбільш поширені значення  $\sigma = 1.15 \text{ ГeB}^2$  і  $a = 0.18 \text{ ГeB}^2$ . Крім цього, значення параметру змішування  $\xi$  впливає на параметр  $\varkappa$  кроку між дочірніми траєкторіями. Зокрема,  $\varkappa = 3/2$  при  $\xi = 0.37$ , і  $\varkappa = 1$  при  $\xi \geq 1/2$ , так що вежова структура також забезпечується.

Варто зазначити, що в межах не- і квазі-релятивістичних моделей лінійна взаємодія розглядається здебільшого як скалярна. Але у багатьох релятивістичних моделях, особливо тих, що ґрунтуються на рівнянні Дірака, переважає скалярно-векторна лоренц-структурна далекосяжної взаємодії [22, 296, 297, 301, 374]. Зокрема, суміш  $\xi = 1/2$ , як в [22, 298], або близькі значення  $\xi = 0.48 \div 0.65$ , як в [296], дають змогу зменшити спін-орбітальне розщеплення згідно з дослідними даними. Запропонована фоккерівська модель підтверджує скалярно-векторну структуру утримної взаємодії в рамках  $\xi = 0.65$  з інших, додаткових міркувань.

Щоб охопити опис як легких, так і важких мезонів, в модель введено короткосяжну взаємодію 1-глюонного обміну.

Це природньо зроблено шляхом додавання дії тетроде-фоккерівським членом з константою сильної взаємодії  $\alpha = \frac{4}{3}\alpha_s$ . Тоді в нерелятивістичній границі модель відтворює корнельський потенціал (1.2.2). Ця модифікація стосується і релятивістичних характеристик моделі. наприклад, вона змінює нижні сегменти траєкторій Редже і понижує інтерцепт  $\zeta$  (див. (1.2.5)). У свою чергу, малий інтерцепт придатний для опису мезонів, що складаються з найлегших кварків [27]. Зокрема, побудовані у безмасовій границі траєкторії Редже добре підходять для опису сім'ї легких безароматних векторних мезонів з ізоспіном  $I = 1$ . Показано, що вежова структура спектру виявляє  $(\ell+n_r)$ -виродження.

Представлені тут аналітичні та числові результати спонукають до подальшого дослідження моделі. Узагальнення на випадок різних мас кварків є безпосереднім. Важливішою задачею є врахування спінових ефектів. Це передбачає, по-перше, побудову фоккерівської дії для спінових частинок з утримною взаємодією і, по-друге, гамільтонізація і квантування такої системи. Як зразок, можна взяти опис релятивістичних спінових частинок в рамках електродинаміки Вілера-Фейнмана [232, 233].

## РОЗДІЛ 4

# МКО-КВАНТУВАННЯ ІНТЕГРАЛІВ ТИПУ ФОККЕРА

У цьому розділі запропоновано процедуру квантування загальної двочастинкової фоккерівської задачі в МКО-наближенні. Рецепт ґрунтуються на неявному гамільтоновому описі Лльози-Вівеса [105] нелокальних систем. Припускаємо, що система є інваріантною щодо групи Арістотеля [377, 378] – спільної підгрупі груп Галілея і Пуанкаре. Цим до розгляду взято як нерелятивістичні часо-нелокальні системи, так і релятивістичні. Аналіз залучає також широкий клас систем, що не є ні галілей-ні пуанкаре-інваріантними, таких як квазічастинки, що взаємодіють в нерухомому ізотропному матеріальному середовищі тощо. Симетрія системи приводить до існування узагальнених нетериних інтегралів [379], а саме енергії, повного моменту імпульсу тощо; див. п. 4.1.1.

В п.4.1.3 показано, що за досить загальних умов довільна арістотелевінваріантна система допускає коловий рух частинок з заданою кутовою швидкістю. Цей рух взято як нульове наближення до неколових рухів. Щоб вивчати збурення до колових орбіт, в п.4.1.2 здійснено перехід до системи відліку, що рівномірно обертається разом із частинками (вони у ній нерухомі). Тоді МКО-наближений розв'язок формулюється в термінах малих відхилень від фіксованих ( $i$ , за припущенням, рівноважних) положень частинок. Отримано часо-нелокальний принцип дії для цих відхилень і відповідну лінійну однорідну систему інтегро-диференційних рівнянь руху. Симетрійні та динамічні властивості цієї системи вивчаються в п. 4.1.4, 4.1.5 та додатку Е. А в підрозділі 4.2 гамільтонів опис лінійної часо-нелокальної системи побудовано в термінах характеристичних

частот узагальнених нормальних мод такої системи та їх амплітуд, що є канонічними змінними.

В даному випадку частоти є функціями моменту імпульсу, і разом з канонічними амплітудами вони становлять поправки до енергії колового руху. Остаточну побудову гамільтонового опису системи завершено в підрозділі 4.3 з допомогою теоретико-групового аналізу та правил відбору фізично допустимих мод серед усього їх розмаїття. У додатку F запропоновано інтегровну часо-нелокальну осциляторну модель, на якій проілюстровано правила відбору. В п. 4.4 дано висновки.

Результати цього розділу опубліковані в статтях [16, 22, 24], матеріалах і тезах конференцій [48–50], та препринті [183].

## 4.1. Арістотеле-інваріантні двочастинкові системи типу Фоккера

### 4.1.1. Інтеграл дії та інтеграли руху

Почнемо з двочастинкової дії типу Фоккера загального вигляду [379]:

$$I = \sum_{a=1}^2 \int dt_a L_a(t_a, \mathbf{z}_a(t_a), \dot{\mathbf{z}}_a(t_a)) + \iint dt_1 dt_2 \Phi(t_1, t_2, \mathbf{z}_1(t_1), \mathbf{z}_2(t_2), \dot{\mathbf{z}}_1(t_1), \dot{\mathbf{z}}_2(t_2)), \quad (4.1.1)$$

де  $\mathbf{z}_a(t_a) \equiv \{z_{ai}; i=1, 2, 3\} \in \mathbb{E}^3$  – позиційні змінні  $a$ -ї частинки ( $a = 1, 2$ ), параметризовані часовими змінними  $t_a \in \mathbb{R}$ . Варіаційна задача приводить до інтегро-диференційних рівнянь руху:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_a} - \frac{d}{dt_a} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{z}}_a} \right\} (L_a + \Lambda_a) = 0, \quad a = 1, 2, \quad (4.1.2)$$

де  $d/dt_a \equiv \partial/\partial t_a + \dot{\mathbf{z}}_a \cdot \partial/\partial \mathbf{z}_a + \ddot{\mathbf{z}}_a \cdot \partial/\partial \dot{\mathbf{z}}_a$ , а

$$\Lambda_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \Phi, \quad \Lambda_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \Phi. \quad (4.1.3)$$

Вихідна дія Тетроде-Фоккера (або Вілера-Фейнмана) [34–36] описує релятивістичну задачу 2-х частинок з масами  $m_a$  і зарядами  $q_a$  ( $a = 1, 2$ ) з часо-нелокальною (електромагнетною) взаємодією. Система є пуанкаре-інваріантною і, зазвичай, відома у явно коваріантному вигляді [36, 334]. У тривимірному вигляді (4.1.1) цю дію можна представити інтеграндами:

$$\begin{aligned} L_a &= -m_a \sqrt{1 - \dot{\mathbf{z}}_a^2(t_a)}; \\ \Phi &= -q_1 q_2 [1 - \dot{\mathbf{z}}_1(t_1) \cdot \dot{\mathbf{z}}_2(t_2)] \delta[(t_1 - t_2)^2 - (\mathbf{z}_1(t_1) - \mathbf{z}_2(t_2))^2], \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Часо-нелокальні взаємодії допускаються і в нерелятивістичній динаміці. Як приклад, розглянемо просту галілей-інваріантну модель, означену такими підінтегральними членами дії (4.1.1):

$$L_a = \frac{1}{2} m_a \dot{\mathbf{z}}_a^2(t_a); \quad \Phi = -\frac{1}{2} \kappa(t_1 - t_2) [\mathbf{z}_1(t_1) - \mathbf{z}_2(t_2)]^2, \quad (4.1.5)$$

де  $\kappa(-t) = \kappa(t)$ . Модель є точно розв'язною, а її динаміка розглядається в додатку F. У випадку  $\kappa(t) = k\delta(t)$ ,  $k > 0$  модель зводиться до двочастинкового гармонічного осцилятора.

У цьому розділі розглядається загальний випадок, коли система інваріантна щодо перетворень групи Арістотеля [377, 378], тобто тобто часових і просторових трансляцій та інверсій, і просторових поворотів. Ця група є спільною підгрупою груп Галілея та Пуанкаре. Цим залучено як нерелятивістичні, так і релятивістичні часо-нелокальні системи.

Симетрійні властивості дії (4.1.1) визначає загальна структура функцій  $L_a(t_a, \mathbf{z}_a, \dot{\mathbf{z}}_a)$  (які будемо називати *1-фоккеріанами*) та  $\Phi(t_1, t_2, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dot{\mathbf{z}}_1, \dot{\mathbf{z}}_2)$  (*2-фоккеріан*), і веде до існування інтегралів руху, виведених для часо-нелокальних систем (типу Фоккера) в роботах. [31, 379].

Інваріантність щодо часових трансляцій  $t \rightarrow t + \lambda_0$  ( $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ) дає умови:

$$X_0^T L_a \equiv \frac{\partial L_a}{\partial t_a} = 0, \quad X_0^T \Phi \equiv \sum_{a=1}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t_a} = 0 \quad (4.1.6)$$

$\Rightarrow \Phi(t_1, t_2, \dots) = \Phi(t_1 - t_2, \dots) \equiv \Phi(\vartheta, \dots)$ , та інтеграл руху *енергії*:

$$E = \sum_{a=1}^2 \left\{ \dot{\mathbf{z}}_a \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{z}}_a} - 1 \right\} (L_a + \Lambda_a) + \iint dt_1 dt_2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi \quad (4.1.7)$$

$$\text{де } \iint \equiv \int_{-\infty}^{t_1} \int_{t_2}^{\infty} - \int_{t_1}^{\infty} \int_{-\infty}^{t_2}. \quad (4.1.8)$$

Інваріантність щодо просторових трансляцій  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z} + \boldsymbol{\lambda}$  ( $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^3$ ) дає:

$$\mathbf{X}^T L_a \equiv \frac{\partial L_a}{\partial \mathbf{z}_a} = 0, \quad \mathbf{X}^T \Phi \equiv \sum_{a=1}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}_a} = 0 \quad (4.1.9)$$

$\Rightarrow \Phi(\dots, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots) = \Phi(\dots, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2, \dots) \equiv \Phi(\dots, \mathbf{z}, \dots)$  та збережуваний *імпульс*:

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^2 \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{z}}_a} (L_a + \Lambda_a) - \iint dt_1 dt_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \Phi. \quad (4.1.10)$$

Інваріантність щодо обертань  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{R}\mathbf{z}$  ( $\mathbf{R} \in \mathrm{O}(3)$ ) дає умови:

$$\mathbf{X}^R L_a \equiv \dot{\mathbf{x}}_a \times \frac{\partial L_a}{\partial \dot{\mathbf{z}}_a} = 0, \quad \mathbf{X}^R \Phi \equiv \mathbf{z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} + \sum_{a=1}^2 \dot{\mathbf{z}}_a \times \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{z}}_a} = 0 \quad (4.1.11)$$

$$\Rightarrow L_a(\dot{\mathbf{z}}_a) = L_a(\dot{\mathbf{z}}_a^2) \equiv L_a(\gamma_a), \quad a = 1, 2, \quad (4.1.12)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\vartheta, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}_1, \dot{\mathbf{z}}_2) &= \Phi(\vartheta, \mathbf{z}^2, \mathbf{z} \cdot \dot{\mathbf{z}}_1, \mathbf{z} \cdot \dot{\mathbf{z}}_2, \dot{\mathbf{z}}_1^2, \dot{\mathbf{z}}_2^2, \dot{\mathbf{z}}_1 \cdot \dot{\mathbf{z}}_2) \\ &\equiv \Phi(\vartheta, \alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta) \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

(тут  $\times$  позначає векторний добуток) та збережуваний *момент імпульсу*:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \sum_{a=1}^2 \mathbf{z}_a \times \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{z}}_a} (L_a + \Lambda_a) \\ &- \frac{1}{2} \iint dt_1 dt_2 \left\{ (\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} + \dot{\mathbf{z}}_1 \times \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{z}}_1} - \dot{\mathbf{z}}_2 \times \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{z}}_2} \right\} \Phi. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Інваріантність щодо часової інверсії дає умову

$$\Phi(-\vartheta, \dots, -\beta_1, -\beta_2, \dots) = \Phi(\vartheta, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots); \quad (4.1.15)$$

інваріантність щодо просторових інверсій забезпечується автоматично.

#### 4.1.2. Опис у системі відліку, що рівномірно обертається

Перш за все здійснимо координатне перетворення  $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{y}$ , що відповідає переходу у систему відліку, яка рівномірно обертається. Матимемо:

$$\mathbf{z}_a(t_a) = \mathbf{S}(t_a)\mathbf{y}_a(t_a) \equiv \mathbf{S}_a\mathbf{y}_a(t_a), \quad \dot{\mathbf{z}}_a = \mathbf{S}_a\mathbf{u}_a \equiv \mathbf{S}_a(\dot{\mathbf{y}}_a + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}_a), \quad (4.1.16)$$

де  $\mathbf{S}(t) = \exp(t\boldsymbol{\Omega})$ ,  $\boldsymbol{\Omega} \in \mathfrak{o}(3)$  – стала матриця, а вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  – дуальний до  $\boldsymbol{\Omega}$ :  $\boldsymbol{\Omega}_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_k^{ij}\boldsymbol{\Omega}_{ij}$  ( $k = 1, 2, 3$ ), так що  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{y}$ . Вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  визначає кутову швидкість обертання системи відліку  $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$  і її напрямок  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\Omega}/\Omega$ .

В термінах нових змінних і з врахуванням симетрійних властивостей (4.1.6), (4.1.9), (4.1.11) можна означити "хвильковані" фоккеріани в неінерційній системі відліку:

$$L_a(\dot{\mathbf{z}}_a) = L_a(\mathbf{S}_a\mathbf{u}_a) = L_a(\mathbf{u}_a) \equiv \tilde{L}_a(\mathbf{y}_a, \dot{\mathbf{y}}_a; \boldsymbol{\Omega}), \quad (4.1.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\vartheta, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2, \dot{\mathbf{z}}_1, \dot{\mathbf{z}}_2) &= \Phi(\vartheta, \mathbf{S}_1\mathbf{y}_1 - \mathbf{S}_2\mathbf{y}_2, \mathbf{S}_1\mathbf{u}_1, \mathbf{S}_2\mathbf{u}_2) \\ &= \Phi(\vartheta, \mathbf{S}_2^T \mathbf{S}_1 \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, \mathbf{S}_2^T \mathbf{S}_1 \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ &= \Phi(\vartheta, \mathbf{S}(\vartheta)\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, \mathbf{S}(\vartheta)\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ &\equiv \tilde{\Phi}(\vartheta, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dot{\mathbf{y}}_1, \dot{\mathbf{y}}_2; \boldsymbol{\Omega}). \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Детальну структуру цих функцій можна отримати з р-нь (4.1.12)-(4.1.13), де скалярні аргументи  $\alpha \dots \delta$  виражені в термінах неінерційних змінних:

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbf{z}^2 = (\mathbf{S}_1\mathbf{y}_1 - \mathbf{S}_2\mathbf{y}_2)^2 = (\mathbf{S}\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)^2 \\ &= \mathbf{y}^2 + 2 \left\{ \mathbf{y}_1^\perp \cdot \mathbf{y}_2^\perp [1 - \cos(\Omega\vartheta)] - (\mathbf{n}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \sin(\Omega\vartheta) \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

$$\begin{aligned} \beta_a &= \dot{\mathbf{z}}_a \cdot \mathbf{z} = (-)^{\bar{a}}(\dot{\mathbf{y}}_a + \mathbf{v}_a) \cdot (\mathbf{y}_a - \mathbf{S}_a^T \mathbf{S}_{\bar{a}} \mathbf{y}_{\bar{a}}) \\ &= (-)^{\bar{a}}(\dot{\mathbf{y}}_a + \mathbf{v}_a) \cdot \{ \mathbf{y}_a - \mathbf{y}_{\bar{a}} \cos(\Omega\vartheta) - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}_{\bar{a}})[1 - \cos(\Omega\vartheta)] \\ &\quad - (-)^a \mathbf{n} \times \mathbf{y}_{\bar{a}} \sin(\Omega\vartheta) \}, \quad a = 1, 2; \quad \bar{a} = 3 - a, \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

$$\gamma_a = \dot{\mathbf{z}}_a^2 = [\mathbf{S}_a(\dot{\mathbf{y}}_a + \mathbf{v}_a)]^2 = \dot{\mathbf{y}}_a^2 + 2\dot{\mathbf{y}}_a \cdot \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_a^2, \quad (4.1.21)$$

$$\begin{aligned} \delta &= \dot{\mathbf{z}}_1 \cdot \dot{\mathbf{z}}_2 = [\mathbf{S}_1(\dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{v}_1)] \cdot [\mathbf{S}_2(\dot{\mathbf{y}}_2 + \mathbf{v}_2)] = [\mathbf{S}(\dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{v}_1)] \cdot (\dot{\mathbf{y}}_2 + \mathbf{v}_2) \\ &= (\dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{v}_1) \cdot (\dot{\mathbf{y}}_2 + \mathbf{v}_2) \cos(\Omega\vartheta) + (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{y}}_1)(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{y}}_2)[1 - \cos(\Omega\vartheta)] \\ &\quad + (\mathbf{n}, \dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{v}_1, \dot{\mathbf{y}}_2 + \mathbf{v}_2) \sin(\Omega\vartheta); \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

тут  $\mathbf{v}_a \equiv \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}_a$ ;  $(\mathbf{n}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \equiv \mathbf{n} \cdot (\mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2)$ ;  $\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2^T = \exp(\vartheta \boldsymbol{\Omega})$ .

"Хвильковані" фоккеріани як функції  $\mathbf{y}_a$ ,  $\dot{\mathbf{y}}_a$  є обертово-інваріантними, але щодо часо-залежної реалізації  $O(3)$ :  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{R}\mathbf{S}(t)\mathbf{y} \equiv \mathbf{S}(-t)\mathbf{R}\mathbf{S}(t)\mathbf{y}$ . Відповідна збережна величина є тим же ж моментом імпульсу  $\mathbf{J}$ , що і в р-ні (4.1.14).

Інваріантність "хвилькованих" фоккеріанів щодо часових трансляцій дає інтеграл руху:

$$\tilde{E} = \sum_{a=1}^2 \left\{ \dot{\mathbf{y}}_a \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{y}}_a} - 1 \right\} \left( \tilde{L}_a + \tilde{\Lambda}_a \right) + \iint dt_1 dt_2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \tilde{\Phi}, \quad (4.1.23)$$

де зв'язок між  $\tilde{\Lambda}_a$  і  $\tilde{\Phi}$  є подібні до (4.1.3). Інтеграл (4.1.23) пов'язаний з інтегралами (4.1.7), (4.1.14) тотожністю:

$$\tilde{E} = E - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{J}. \quad (4.1.24)$$

Її можна перевірити прямим вживанням р-ня (4.1.16).

#### 4.1.3. Розв'язки у виді колових орбіт

**Твердження 4.1** Якщо фоккеріани інваріантні щодо дії групи Арістотеля, тобто виконуються рівності (4.1.6), (4.1.9), (4.1.11), то відповідні рівняння руху (4.1.2) допускають розв'язки у вигляді колових орбіт з характеристиками, описаними нижче.

Д о в е д е н н я. Фоккерівські рівняння колового руху (тобто рівняння спокою в термінах неінерційних змінних  $\mathbf{y}_a$ ) мають вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_a} \left( \tilde{L}_a + \tilde{\Lambda}_a \right) \Big|_{\substack{\dot{\mathbf{y}}_1=0 \\ \dot{\mathbf{y}}_2=0}} = 0, \quad a = 1, 2, \quad (4.1.25)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \tilde{L}_a \Big|_{\dot{\mathbf{y}}_a=0} &= \tilde{L}_a(\mathbf{y}_a, 0; \boldsymbol{\Omega}) \equiv L_a^{(0)}(\mathbf{y}_a; \boldsymbol{\Omega}), \\ \tilde{\Lambda}_a \Big|_{\substack{\dot{\mathbf{y}}_1=0 \\ \dot{\mathbf{y}}_2=0}} &= \int dt_{\bar{a}} \tilde{\Phi}(t_1 - t_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, 0, 0; \boldsymbol{\Omega}) \quad (\bar{a} = 3 - a) \\ &= \int d\vartheta \tilde{\Phi}(\vartheta, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, 0, 0; \boldsymbol{\Omega}) \equiv \Lambda^{(0)}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; \boldsymbol{\Omega}), \end{aligned}$$

і остання функція є спільною для обидвох значень  $a = 1, 2$ . Тому рівняння спокою

(4.1.25) можна представити в ефективній лагранжевій формі:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_a} L^{(0)} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_a} \left( \sum_{a=1}^2 L_a^{(0)} + \Lambda^{(0)} \right) = 0, \quad a = 1, 2. \quad (4.1.26)$$

Детальна структура лагранжіану  $L^{(0)}$  випливає з р-нь (4.1.12), (4.1.13) та (4.1.19)-(4.1.22) із врахуванням в'язі  $\dot{\mathbf{y}}_a = 0$ . Тоді вираз (4.1.19) для  $\alpha$  не зміниться, тоді як решта скалярів (4.1.20)-(4.1.22) спростяється:

$$\begin{aligned} \beta_1^{(0)} &= \beta_2^{(0)} = \Omega \left[ \mathbf{y}_1^\perp \cdot \mathbf{y}_2^\perp \sin(\Omega\vartheta) - (\mathbf{n}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \cos(\Omega\vartheta) \right], \\ \gamma_a^{(0)} &= \mathbf{v}_a^2 = \Omega^2 |\mathbf{y}_a^\perp|^2, \quad \delta^{(0)} = \Omega^2 \mathbf{y}_1^\perp \cdot \mathbf{y}_2^\perp. \end{aligned}$$

Із цими рівностями 2-фоккеріан набуває такої загальної структури:

$$\Phi^{(0)} = \Phi^{(0)}(\vartheta, \mathbf{y}^2, |\mathbf{y}_1^\perp|^2, |\mathbf{y}_2^\perp|^2, \mathbf{y}_1^\perp \cdot \mathbf{y}_2^\perp, (\mathbf{n}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2); \Omega). \quad (4.1.27)$$

Якщо врахувати симетрію щодо часової інверсії (4.1.15):

$$\Phi^{(0)}(-\vartheta, \dots) = \Phi^{(0)}(\vartheta, \dots), \quad (4.1.28)$$

то інтегрування цієї функції за  $\vartheta$  дає таку загальну структуру  $\Lambda^{(0)}$ :

$$\Lambda^{(0)} = \int d\vartheta \Phi^{(0)} = \Lambda^{(0)}(\mathbf{y}^2, |\mathbf{y}_1^\perp|^2, |\mathbf{y}_2^\perp|^2, \mathbf{y}_1^\perp \cdot \mathbf{y}_2^\perp, (\mathbf{n}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)^2; \Omega).$$

Оскільки  $(\mathbf{n}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \pm |\mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2|$ , так що  $(\mathbf{n}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)^2 = |\mathbf{y}_1^\perp|^2 |\mathbf{y}_2^\perp|^2 - (\mathbf{y}_1^\perp \cdot \mathbf{y}_2^\perp)^2$ , тоді остаточні структури 2-фоккеріану і, отже, ефективного лагранжіану в р-ні (4.1.26) можна виразити через чотири скалярні аргументи:

$$\Lambda^{(0)} = \Lambda^{(0)}(\mathbf{y}^2, |\mathbf{y}_1^\perp|^2, |\mathbf{y}_2^\perp|^2, \mathbf{y}_1^\perp \cdot \mathbf{y}_2^\perp; \Omega) \equiv \Lambda^{(0)}(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \Omega), \quad (4.1.29)$$

$$L^{(0)} = L^{(0)}(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \Omega) = \sum_{a=1}^2 L_a^{(0)}(\sigma_a; \Omega) + \Lambda^{(0)}(\sigma_0 \dots \sigma_3; \Omega). \quad (4.1.30)$$

Ця форма є корисною для вивчення колових розв'язків (4.1.26).

Введення позначень  $k_i \equiv \partial L^{(0)}/\partial \sigma_i$  ( $i = 0 \dots 3$ ) зводить (4.1.26) до вигляду:

$$2(-)^{\bar{a}} k_0 \mathbf{y} + 2k_a \mathbf{y}_a^\perp + k_3 \mathbf{y}_{\bar{a}}^\perp = 0, \quad a = 1, 2. \quad (4.1.31)$$

Скалярний добуток цих рівнянь з  $\mathbf{n}$  дає умову:

$$k_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} = 0 \implies \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} = 0 \implies \mathbf{y} \perp \mathbf{n}$$

(тут не розглядається випадок  $k_0 = 0$ , який відповідає дуже спеціальному статичному розв'язку).

Зауважимо, що  $\mathbf{y}$  і, отже,  $\sigma_0$  є трансляційно інваріантними;  $\mathbf{y}_a^\perp$  і, отже,  $\sigma_a$ ,  $\sigma_3$  є інваріантними щодо трансляцій вздовж  $\mathbf{n}$ . Тому розв'язок р-ня (4.1.31) означений з точністю до довільного вектору, паралельного до  $\mathbf{n}$ . Ми фіксуємо його умовою:  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}_a = 0$ ,  $a = 1, 2 \implies \mathbf{y}_a \perp \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{y}_a = \mathbf{y}_a^\perp$ .

З цього місця позначку " $\perp$ " біля вектору  $\mathbf{y}_a$  упускатимемо.

Решта рівнянь (4.1.31) набувають вигляду:

$$2(k_0 + k_1)\mathbf{y}_1 - (2k_0 - k_3)\mathbf{y}_2 = 0, \quad (4.1.32)$$

$$-(2k_0 - k_3)\mathbf{y}_1 + 2(k_0 + k_2)\mathbf{y}_2 = 0; \quad (4.1.33)$$

вони мають нетривіальний розв'язок  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{y}_2 = \mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_1 \parallel \mathbf{R}_2 \perp \Omega$  за умови:

$$4(k_0 + k_1)(k_0 + k_2) - (2k_0 - k_3)^2 = 0. \quad (4.1.34)$$

Якщо обрати орт  $\boldsymbol{\epsilon}_1 = \mathbf{R}_1/R_1$ , то (4.1.32)-(4.1.33) можна звести до рівностей:

$$\mathbf{y}_1 = R_1 \boldsymbol{\epsilon}_1, \quad \mathbf{y}_2 = -R_2 \boldsymbol{\epsilon}_1, \quad (4.1.35)$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{k_3 - 2k_0}{2(k_0 + k_1)} = \frac{2(k_0 + k_2)}{k_3 - 2k_0}. \quad (4.1.36)$$

В умові (4.1.35) закладено припущення, що  $\mathbf{R}_2 \uparrow\downarrow \mathbf{R}_1$  і, отже,  $R_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$ . В іншому разі  $R_2 < 0$ , але цей випадок є нефізичним. Співвідношення (4.1.34) і (4.1.36) утворюють систему рівнянь, що визначають  $R_1$  і  $R_2$  як функції  $\Omega$ .  $\square$

Статичний характер розв'язків у вигляді колових орбіт означає, що фоккепріани  $L_a^{(0)}$  і  $\Lambda^{(0)}$  залежать від сталих векторів (4.1.35). Крім цього,  $\Phi^{(0)}$  є функцією

від  $\vartheta = t_1 - t_2$ . Тому інтеграли руху вздовж колових орбіт можна обчислити явно. Для цього корисно обчислити анзац для "косого" інтегрування (4.1.8), вірний для довільної функції  $f(\vartheta)$ :

$$\iint dt_1 dt_2 f(\vartheta) \equiv \left[ \int_{-\infty}^{t_1} \int_{t_2}^{\infty} - \int_{t_1}^{\infty} \int_{-\infty}^{t_2} \right] dt'_1 dt'_2 f(\vartheta') = \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta' (\vartheta - \vartheta') f(\vartheta').$$

Крім цього, часова зворотність (4.1.28) ф-ї  $\Phi^{(0)}$  спрощує означення  $\tilde{E}^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{(0)} &= - \sum_{a=1}^2 \left( L_a^{(0)} + \Lambda^{(0)} \right) - \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi^{(0)} \\ &= - \sum_{a=1}^2 L_a^{(0)} - 2\Lambda^{(0)} + \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta \Phi^{(0)} = - \sum_{a=1}^2 L_a^{(0)} - \Lambda^{(0)} = -L^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

Обчислення моменту імпульсу є громіздким:  $\mathbf{J}^{(0)} = \mathbf{n} J^{(0)}$ , де

$$\begin{aligned} J^{(0)} &= 2\Omega \sum_{a=1}^2 R_a^2 (L_a + \Lambda_a)_{\gamma_a}^{(0)} - R_1 R_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta \{ [(2\Phi_{\alpha} - \Omega^2 \Phi_{\delta})\vartheta + \Phi_{\beta_1} + \Phi_{\beta_2}] \sin(\Omega\vartheta) \\ &\quad + [2\Phi_{\delta} + (\Phi_{\beta_1} + \Phi_{\beta_2})\vartheta] \Omega \cos(\Omega\vartheta) \}^{(0)}; \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

індекси  $\alpha, \dots, \delta$  позначають похідні  $\Phi_{\alpha} = \partial\Phi/\partial\alpha$  і т.д.

З (4.1.37) і (4.1.38) випливає таке співвідношення:

$$J^{(0)} = -\partial \tilde{E}^{(0)}/\partial \Omega = \partial L^{(0)}/\partial \Omega. \quad (4.1.39)$$

Інтеграл повного імпульсу (4.1.10) занулюється:  $\mathbf{P}^{(0)} = 0$ , що відповідає системі відліку центра мас (ЦМ).

#### 4.1.4. Рівняння руху в лінійному наближенні

Малі збурення  $\boldsymbol{\rho}_a(t_a)$  колових орбіт можна ввести природньо:

$$\mathbf{y}_a(t_a) = \mathbf{R}_a + \boldsymbol{\rho}_a(t_a), \quad \dot{\mathbf{y}}_a(t_a) = \dot{\boldsymbol{\rho}}_a(t_a), \quad a = 1, 2$$

а тоді підставити у дію (4.1.1). Розклад фоккеріанів (4.1.17), (4.1.18) до квадратичних членів за  $\boldsymbol{\rho}_a(t_a), \dot{\boldsymbol{\rho}}_a(t_a)$  дає:

$$\begin{aligned}
I = & \sum_a \int dt_a L_a^{(0)} + \iint dt_1 dt_2 \Phi^{(0)} \\
& + \sum_a \int dt_a \left\{ \underbrace{\left[ \frac{\partial \tilde{L}_a}{\partial \mathbf{y}_a} + \int dt_{\bar{a}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{y}_a} \right]^{(0)}}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_a + \underbrace{\left[ \frac{\partial \tilde{L}_a}{\partial \dot{\mathbf{y}}_a} + \int dt_{\bar{a}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_a} \right]^{(0)}}_{\text{повна похідна}} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_a \right\} \\
& + \frac{1}{2} \sum_a \int dt_a (L_{aij} \rho_a^i \rho_a^j + 2L_{aij} \rho_a^i \dot{\rho}_a^j + L_{a\hat{j}} \dot{\rho}_a^i \dot{\rho}_a^j) \\
& + \frac{1}{2} \sum_a \sum_b \iint dt_1 dt_2 (\Phi_{ai\bar{b}j} \rho_a^i \rho_b^j + 2\Phi_{ai\bar{b}j} \rho_a^i \dot{\rho}_b^j + \Phi_{a\hat{i}\bar{b}j} \dot{\rho}_a^i \dot{\rho}_b^j) \quad I^{(2)} \quad (4.1.40)
\end{aligned}$$

з коефіцієнтами  $L_{aij} = \left. \frac{\partial^2 \tilde{L}_a}{\partial y_a^i \partial y_b^j} \right|^{(0)}$ ,  $\Phi_{ai\bar{b}j} = \left. \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_a^i \partial y_b^j} \right|^{(0)}$  і т.д.

Лише члени  $I^{(2)}$  дають внесок в рівняння збуреного руху:

$$\mathcal{L}_{aij} \rho_a^j(t) + \mathcal{L}_{a[i\hat{j}]} \dot{\rho}_a^j(t) - \mathcal{L}_{a\hat{j}} \ddot{\rho}_a^j(t) + \int dt' \Xi_{aij}(t-t') \rho_a^j(t') = 0; \quad (4.1.41)$$

тут  $\mathcal{L}_{a[i\hat{j}]} \equiv \mathcal{L}_{ai\hat{j}} - \mathcal{L}_{aj\hat{i}}$  ( $a = 1, 2$ ;  $(-)^{\bar{a}} = 3 - a$ ),

$$\mathcal{L}_{aij} = L_{aij} + \Lambda_{aij}, \quad \mathcal{L}_{ai\hat{j}} = \dots, \quad (4.1.42)$$

$$\Xi_{aij}(\vartheta) = \Phi_{ai\bar{a}j}(\vartheta) + (-)^{\bar{a}} \dot{\Phi}_{[ai\bar{a}j]}(\vartheta) - \ddot{\Phi}_{a\hat{i}\bar{a}j}(\vartheta) \quad (4.1.43)$$

а  $\dot{\Phi}(\vartheta) \equiv \partial \Phi / \partial \vartheta$ . Часова зворотність дає таку властивість ядра:

$$\Xi_{aij}(\vartheta) = \Xi_{aji}(-\vartheta) = \Xi_{\bar{a}ji}(\vartheta) = \Xi_{\bar{a}ij}(-\vartheta). \quad (4.1.44)$$

Підстановка  $\rho_a^i(t) = e_a^i e^{-i\omega t}$  приводить до системи рівнянь:

$$\sum_{b=1}^2 D_{ai\bar{b}j}(\omega) e_b^j = 0 \quad (4.1.45)$$

з динамічною  $6 \times 6$ -матрицею

$$\mathbf{D}(\omega) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{1ij} - i\omega \mathcal{L}_{1[i\hat{j}]} + \omega^2 \mathcal{L}_{1\hat{i}\hat{j}} & \check{\Xi}_{1ij}(\omega) \\ \check{\Xi}_{2ij}(-\omega) & \mathcal{L}_{2ij} - i\omega \mathcal{L}_{2[i\hat{j}]} + \omega^2 \mathcal{L}_{2\hat{i}\hat{j}} \end{vmatrix}. \quad (4.1.46)$$

Згідно з (4.1.44), для поза-діагональних матричних елементів  $\check{\Xi}_{aji}(\omega) \equiv \int d\vartheta \Xi_{aji}(\vartheta) e^{i\omega\vartheta}$  маємо:

$$\check{\Xi}_{aji}(\omega) = \check{\Xi}_{aij}^*(-\omega), \quad \check{\Xi}_{2ij}(\omega) = \check{\Xi}_{1ij}(-\omega). \quad (4.1.47)$$

Рівняння (4.1.45) визначає характеристичні моди системи. Зокрема, власні частоти визначаються з секулярного рівняння  $\det D(\omega) = 0$ .

Подальше тлумачення системи залежить від властивостей динамічної матриці (4.1.46). Розглянемо загальні наслідки арістотелевої інваріантності.

**Твердження 4.2** Динамічна матриця (4.1.46), побудована з арістотелевінваріантних фоккеріанів, допускає такі власні частоти  $\omega$  та частинкові власні вектори  $e_a$ :

$$\omega_1 = 0, \quad e_1 = \{0, R_1, 0\}, \quad e_2 = \{0, -R_2, 0\}; \quad (4.1.48)$$

$$\omega_2 = \pm\Omega, \quad e_1 = \{0, 0, R_1\}, \quad e_2 = \{0, 0, -R_2\}; \quad (4.1.49)$$

$$\omega_{3,4} = \pm\Omega, \quad e_1 = \{1, \mp i, 0\}, \quad e_2 = \{1, \mp i, 0\}; \quad (4.1.50)$$

$$\omega_5 = 0, \quad e_1 = \{0, 0, 1\}, \quad e_2 = \{0, 0, 1\}, \quad (4.1.51)$$

де  $R_a$  ( $a = 1, 2$ ) означені р-нями (4.1.34), (4.1.36), а координатні орти обрано так:

$$\epsilon_3 = n \uparrow \Omega, \quad \epsilon_1 \uparrow R_1, \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 \times \epsilon_1.$$

Доведення див. в додатку Е □

Інтерпретація цих мод стає очевидною, якщо повернутися від неінерційної системи відліку до нерухомої. Моди (4.1.48)-(4.1.49) описують колові орбіти, але як ціле повернуті на малий кут. Моди (4.1.50)-(4.1.51) зсувають колові орбіти на сталій вектор. Тому усі 5 мод (4.1.48)-(4.1.51), які називатимемо *кінематичними*, можна компенсувати переозначенням (шляхом повороту або трансляції) вихідної ЦМ-системи відліку.

Завдяки твердженню 2, кінематичні моди легко відділити від *динамічних* мод, власні частоти яких можна отримати з рівняння:

$$\frac{\det D(\omega)}{\omega^4(\omega^2 - \Omega^2)^3} = 0. \quad (4.1.52)$$

Оскільки  $D(\omega)$  є  $6 \times 6$ -матирцею, то секулярне рівняння (4.1.52) є досить громіздким. Його можна факторизувати завдяки наступному твердженню.

**Твердження 4.3.** Виконуються такі тотожності:

$$D_{aj} b_3(\omega) = D_{a3} b_j(\omega) = 0 \quad \text{для довільних } a, b = 1, 2 \text{ та } j = 1, 2.$$

Доведення випливає з представлення (4.1.12), (4.1.13) для 1- and 2-фоккеріанів, і таких тотожностей:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \alpha}{\partial y_a^3} \right|^{(0)} = \cdots = \left. \frac{\partial \delta}{\partial y_a^3} \right|^{(0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{y}_a^3} \right|^{(0)} = \cdots = \left. \frac{\partial \delta}{\partial \dot{y}_a^3} \right|^{(0)} = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y_a^j \partial y_b^3} \right|^{(0)} = \cdots = 0, \quad \cdots = \left. \frac{\partial^2 \delta}{\partial \dot{y}_a^j \partial \dot{y}_b^3} \right|^{(0)} = 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

де  $\alpha, \dots \delta$  означені в (4.1.19)-(4.1.22), а " $(0)$ " позначає значення маркованої величини вздовж колового руху.  $\square$

Завдяки цьому твердженню  $\det D(\omega)$  розпадається на два множники:

$$\det D(\omega) = \det D^\perp(\omega) \cdot \det D^\parallel(\omega),$$

$$\text{де } D^\perp(\omega) = \|D_{aibj}(\omega)\| \quad (i, j = 1, 2), \quad D^\parallel(\omega) = \|D_{a3b3}(\omega)\|.$$

$2 \times 2$ -підматриця  $D^\parallel(\omega)$  допускає дві кінематичні моди (4.1.49) і (4.1.51), а  $4 \times 4$ -підматриця  $D^\perp(\omega)$  – три інші кінематичні моди (4.1.48), (4.1.50) та динамічні моди. Частоти останніх можна обчислити із зведеного секулярного рівняння:

$$\frac{\det D^\perp(\omega)}{\omega^2(\omega^2 - \Omega^2)^2} = 0. \quad (4.1.53)$$

Секулярні рівняння (4.1.52) або (4.1.53) спрощуються у випадку частинок рівних мас.

#### 4.1.5. Динаміка системи частинок рівних мас

Система частинок рівних мас означена фоккеріанами з такими властивостями:

$$L_a(\dot{\mathbf{z}}_a) = L(\dot{\mathbf{z}}_a), \quad (4.1.54)$$

$$\Phi(\vartheta, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dot{\mathbf{z}}_1, \dot{\mathbf{z}}_2) = \Phi(-\vartheta, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1, \dot{\mathbf{z}}_2, \dot{\mathbf{z}}_1). \quad (4.1.55)$$

**Твердження 4.4.** За фізично правдоподібних умов р-ня руху (4.1.25) для однакових частинок допускають коловий рух виду:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{R}, \quad \mathbf{y}_2 = -\mathbf{R} \quad (\text{та } \dot{\mathbf{y}}_1 = \dot{\mathbf{y}}_2 = 0) \quad (4.1.56)$$

з характеристиками, описаними нижче.

**Д о в е д е н н я.** З (4.1.56) та (4.1.32), (4.1.33) випливає рівність:  $k_1 = k_2$ , що стає тотожністю за умови (4.1.56). Тоді п.ч. р-ня (4.1.34) для  $|\mathbf{R}| = R(\Omega)$  факторизується:

$$(4k_0 + 2k_1 - k_3) = 0 \quad \text{або/і} \quad (2k_1 + k_3) = 0. \quad (4.1.57)$$

Хоча необхідно спрвдити розв'язки обидвох рівнянь (4.1.57), але правдоподібно, що лише 1-ше р-ня має фізичний сенс: лише воно містить похідні  $k_0 = \partial L^{(0)} / \partial \mathbf{y}^2$ , що очевидно пов'язані із взаємодією частинок.  $\square$

**Твердження 4.5.** Для системи однакових частинок, інваріантної щодо просторових інверсій, елементи динамічної матриці задовольняють р-сті:

$$D_{2i2j}(\omega) = D_{1i1j}(\omega), \quad D_{2i1j}(\omega) = D_{1i2j}(\omega) \quad (4.1.58)$$

**Д о в е д е н н я.** Якщо 1-фоккеріан інваріантний щодо просторових інверсій:  $\tilde{L}(-\mathbf{y}, -\dot{\mathbf{y}}) = \tilde{L}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ , то 2-гі похідні від нього – також. Отже, маємо

$$L_{2ij} = \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial y^i \partial y^j}(-\mathbf{R}, 0) = \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial y^i \partial y^j}(\mathbf{R}, 0) = L_{1ij} \quad (4.1.59)$$

і, подібно,

$$L_{2i\hat{j}} = L_{1i\hat{j}}, \quad L_{2\hat{i}j} = L_{1\hat{i}j}. \quad (4.1.60)$$

2-фоккеріан для однакових частинок можна представити у вигляді:

$$\tilde{\Phi}(\vartheta, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dot{\mathbf{y}}_1, \dot{\mathbf{y}}_2) = \frac{1}{2}F(\vartheta, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dot{\mathbf{y}}_1, \dot{\mathbf{y}}_2) + \frac{1}{2}F(-\vartheta, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1, \dot{\mathbf{y}}_2, \dot{\mathbf{y}}_1);$$

тут  $F(\vartheta, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  – деяка функція (наприклад, власне  $\Phi(\vartheta, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ ), інваріантна щодо інверсій:  $F(\vartheta, -\mathbf{x}, -\mathbf{y}, -\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = F(\vartheta, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ , і тому її 2-гі похідні – також. Маємо рівність

$$\begin{aligned} \Phi_{2i2j}(\vartheta) &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}(\vartheta, \mathbf{R}, -\mathbf{R}, 0, 0) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(-\vartheta, -\mathbf{R}, \mathbf{R}, 0, 0) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}(\vartheta, -\mathbf{R}, \mathbf{R}, 0, 0) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(-\vartheta, \mathbf{R}, \mathbf{R}, 0, 0) = \Phi_{1i1j}(-\vartheta) \end{aligned}$$

і подібні рівності для інших похідних та фур'є-образів:

$$\check{\Phi}_{2i2j}(\omega) = \check{\Phi}_{1i1j}(-\omega), \dots, \check{\Phi}_{2\hat{i}1\hat{j}}(\omega) = \check{\Phi}_{1\hat{i}2\hat{j}}(-\omega). \quad (4.1.61)$$

Тоді, вживаючи означення (4.1.42), (4.1.43), (4.1.46) та властивості (4.1.47), (4.1.59), (4.1.60) і (4.1.61), отримаємо рівності (4.1.58).  $\square$

Завдяки рівностям (4.1.58) система р-нь (4.1.45) розпадається на дві:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{ij}(\omega)\varepsilon^j = 0 & \text{ де } \mathfrak{D}_{ij}(\omega) \equiv \mathcal{L}_{1ij} - i\omega\mathcal{L}_{1[ij]} + \omega^2\mathcal{L}_{1\hat{i}\hat{j}} + \check{\Xi}_{1ij}(\omega) \\ & = D_{1i1j}(\omega) + D_{1i2j}(\omega), \quad \varepsilon^j \equiv \frac{1}{2}(e_1^j + e_2^j); \end{aligned} \quad (4.1.62)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ij}(\omega)e^j = 0, & \text{ де } \mathcal{D}_{ij}(\omega) \equiv \mathcal{L}_{1ij} - i\omega\mathcal{L}_{1[ij]} + \omega^2\mathcal{L}_{1\hat{i}\hat{j}} - \check{\Xi}_{1ij}(\omega) \\ & = D_{1i1j}(\omega) - D_{1i2j}(\omega), \quad e^j \equiv e_1^j - e_2^j. \end{aligned} \quad (4.1.63)$$

Легко переконатися, що підсистема (4.1.62) три кінематичні власні частоти і вектори (4.1.50), (4.1.51), тоді як підсистема (4.1.63) – дві інші кінематичні моди (4.1.48), (4.1.49) і, принаймні, одну динамічну моду. Частоти останньої можна обчислити із зведеного секулярного рівняння:

$$\omega^{-2} \det \mathcal{D}^\perp(\omega) = 0, \quad \text{де } \mathcal{D}^\perp(\omega) \equiv \|\mathcal{D}_{ij}(\omega)\| \quad (i, j = 1, 2) \quad (4.1.64)$$

є зведеню динамічною матрицею.

## 4.2. Гамільтонізація нелокальних лінійних систем

Квадратичні члени дії (4.1.40) можна представити у такому простому вигляді:

$$I^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{kl} \int \int dt dt' \rho^k(t) D_{kl}(t - t') \rho^l(t'), \quad (4.2.1)$$

де дійсне матричне ядро  $D(t - t') = \|D_{kl}(t - t')\|$  (тут вжито мультиіндекс:  $k, l = (a, i), (b, j)$  і т.д.) інваріантне щодо часових трансляцій та інверсії:

$D^T(t' - t) = D(t - t')$ . Часо-нелокальні лінійні рівняння руху:

$$\sum_l \int dt' D_{kl}(t - t') \rho^l(t') = 0 \quad (4.2.2)$$

допускають фундаментальну систему розв'язків виду:  $\rho^k(t) = e^k(\omega) e^{-i\omega t}$ . Їх підстановка в рівняння (4.2.2) дає систему алгебричних рівнянь:

$$\sum_l D_{kl}(\omega) e^l(\omega) = 0, \quad (4.2.3)$$

що становить задачу на власні вектори поляризації  $e^k(\omega)$  та характеристичні частоти  $\omega$ . Останні визначаються з секулярного рівняння  $\det D(\omega) = 0$  в термінах динамічної матриці:  $D(\omega) = \int dt D(t)e^{i\omega t}$ . За-через часо-нелокальність задачі (4.2.2) матричні елементи  $D_{kl}(\omega)$  є, загалом, неполіноміальними функціями від  $\omega$ . Як наслідок, розв'язки секулярного рівняння утворюють, загалом, нескінченну множину комплексних і/або дійсних характеристичних частот. В силу симетрійних властивостей динамічної матриці:

$$D^T(\omega) = D(-\omega), \quad D^\dagger(\omega) = D(\omega^*) \quad (4.2.4)$$

Ця множина складається з квадруплетів  $\{\pm\omega_\alpha, \pm\omega_\alpha^*, \alpha = 1, 2, \dots\}$  (і/або дублетів, якщо  $\text{Im } \omega_\alpha = 0$  або  $\text{Re } \omega_\alpha = 0$ ), а загальний розв'язок рівнянь (4.2.2) є сумою відповідних мод з поляризацією  $e_\alpha^k \equiv e^k(\omega_\alpha)$  та  $f_\alpha^k \equiv e^k(\omega_\alpha^*)$ :

$$\rho^k(t) = \sum_\alpha \left\{ A_\alpha e_\alpha^k e^{-i\omega_\alpha t} + A_\alpha^* e_\alpha^k e^{i\omega_\alpha^* t} + B_\alpha f_\alpha^k e^{-i\omega_\alpha^* t} + B_\alpha^* f_\alpha^k e^{i\omega_\alpha t} \right\}. \quad (4.2.5)$$

Довільні комплексні змінні  $A_\alpha$  і  $B_\alpha$  параметризують фазовий простір  $\mathbb{P}_C$  системи (загалом  $\infty$ -вимірний). Якщо  $\text{Im } \omega_\alpha \neq 0$ , то відповідні члени в (4.2.5) є необмежені, що суперечить прийнятому наближенню малих  $\rho^k$ . Можна обрати  $B_\alpha = 0$  в (4.2.5), що дає згасаючий розв'язок. Але цей випадок не можна інкорпорувати в гамільтонів опис в рамках прийнятої схеми. Навіть більше, комплексні частоти приводять до труднощів фізичної інтерпретації системи [380]. Тому розглянемо детально *дійсні моди*, тобто ті, що відповідають дійсним частотам. Комплексних та уявних мод торкнемся побіжно.

#### 4.2.1. Дійсні моди

Нехай  $\text{Im } \omega_\alpha = 0$ . Тоді загальний розв'язок (4.2.5) зводиться до такого:

$$\rho^k(t) = \sum_\alpha \left\{ A_\alpha e_\alpha^k e^{-i\omega_\alpha t} + A_\alpha^* e_\alpha^k e^{i\omega_\alpha t} \right\}, \quad (4.2.6)$$

де підсумовування здійснюється за тими  $\alpha$ , для яких  $\text{Re } \omega_\alpha \geq 0$  і  $\text{Im } \omega_\alpha = 0$ .

У цьому місці задача полягає у побудові гамільтонового опису для варіаційного принципу (4.2.1) на фазовому підпросторі  $\mathbb{P}_R \subset \mathbb{P}_C$  розв'язків (4.2.6),

параметризованому комплексними змінними  $A_\alpha$ . Як дороговказ до цієї мети оберімо гамільтонів формалізма для часо-нелокальних лагранжіанів запропонований Лльозою та Вівесом [105].

Означимо часо-нелокальний лагранжіан:

$$L(t) = \frac{1}{2} \sum_{kl} \int dt' \rho^k(t) D_{kl}(t - t') \rho^l(t'), \quad (4.2.7)$$

у термінах якого дія (4.2.1) набуває звичайного вигляду  $I^{(2)} = \int dt L(t)$ , і функціональну похідну:

$$E_k(t, t'; [\rho]) \equiv \frac{\delta L(t)}{\delta \rho^k(t')} = \frac{1}{2} \sum_l \rho^l(t) D_{lk}(t - t'). \quad (4.2.8)$$

Тоді, згідно з роботою [105], гамільтонова структура на фазовому просторі часо-нелокальної системи визначена симплектичною формою, тобто замкненою диференційною 2-формою:

$$\Omega = \sum_{kl} \int dt \int ds \int du \Xi(t, s) \frac{\delta E_k(s, t; [\rho])}{\delta \rho^l(u)} \delta \rho^l(u) \wedge \delta \rho^k(t), \quad (4.2.9)$$

$$\text{де } \Xi(t, s) \equiv \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} t - \operatorname{sgn} s) = \Theta(t)\Theta(-s) - \Theta(-t)\Theta(s), \quad (4.2.10)$$

$\delta \rho^k(t)$  позначає функціональний диференціал від  $\rho^k(t)$ , а " $\wedge$ " позначає косий добуток. У свою чергу, явне обчислення симплектичної форми дає співвідношення дужок Пуасона ( $\Delta P$ ) фазових змінних (у нашому випадку —  $A_\alpha$ ).

Очевидно, що симплектична форма (4.2.9) є точною, тобто  $\Omega = \delta \Theta$ , де

$$\Theta = \sum_k \int dt \int ds \Xi(t, s) E_k(s, t; [\rho]) \delta \rho^k(t) \quad (4.2.11)$$

є так звана 1-форма Ліувіля, означена з точністю до довільної точної 1-форми (тобто повного диференціалу). Обчислення  $\Theta$  (замість  $\Omega$ ) є простішим.

Гамільтоніан часо-нелокальної системи має формальний вираз [105]:

$$H = \sum_k \int dt \int ds \Xi(t, s) E_k(s, t; [\rho]) \dot{\rho}^k(t) - L(t)|_{t=0}. \quad (4.2.12)$$

При інтегруванні рівностей (4.2.11) та (4.2.12) є корисною така формула:

$$\int dt \int ds \Xi(t, s) E(s, t) f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_0^s dt E(t - s, t) f(t).$$

Обчислимо форму Ліувіля  $\Theta$ , вживаючи (4.2.6) і (4.2.8) в (4.2.11):

$$\begin{aligned}
 \Theta &= \frac{1}{2} \sum_{kl} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_0^s dt D_{kl}(s) \rho^l(t-s) \delta \rho^k(t) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{kl} \sum_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} ds D_{kl}(s) \int_0^s dt \left( A_{\alpha} e_{\alpha}^l e^{-i\omega_{\alpha}(t-s)} + A_{\alpha}^* e_{\alpha}^{*l} e^{i\omega_{\alpha}(t-s)} \right) \times \\
 &\quad \times \left( e^{-i\omega_{\beta}t} e_{\beta}^k \delta A_{\beta} + e^{i\omega_{\beta}t} e_{\beta}^{*k} \delta A_{\beta}^* \right) \\
 &= \frac{i}{2} \sum_{kl} \sum_{\alpha\beta} [A_{\alpha} e_{\alpha}^l, A_{\alpha}^* e_{\alpha}^{*l}] \times \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} -\frac{D_{lk}(\omega_{\alpha}) - D_{lk}(-\omega_{\beta})}{\omega_{\alpha} + \omega_{\beta}} & -\frac{D_{lk}(\omega_{\alpha}) - D_{lk}(\omega_{\beta})}{\omega_{\alpha} - \omega_{\beta}} \\ \frac{D_{lk}(-\omega_{\alpha}) - D_{lk}(-\omega_{\beta})}{\omega_{\alpha} - \omega_{\beta}} & \frac{D_{lk}(-\omega_{\alpha}) - D_{lk}(\omega_{\beta})}{\omega_{\alpha} + \omega_{\beta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\beta}^k \delta A_{\beta} \\ e_{\beta}^{*k} \delta A_{\beta}^* \end{bmatrix}. \quad (4.2.13)
 \end{aligned}$$

Згідно із властивостями (4.2.3) і (4.2.4), усі члени суми в (4.2.13) занулюються окрім тих членів, які відповідають  $\alpha = \beta$  і містять антидіагональні члени квадратної матриці в останній стрічці (4.2.13). Ці члени мають невизначеність типу  $0/0$ , яку можна усунути гарничним переходом:

$$\begin{aligned}
 \Theta &= \frac{i}{2} \sum_{kl} \sum_{\alpha} \lim_{\lambda \rightarrow \omega} \left( A_{\alpha}^* e_{\alpha}^{*l} \frac{D_{lk}(\lambda_{\alpha}) - D_{lk}(\omega_{\alpha})}{\lambda_{\alpha} - \omega_{\alpha}} e_{\alpha}^k \delta A_{\alpha} \right. \\
 &\quad \left. - A_{\alpha} e_{\alpha}^l \frac{D_{lk}(-\lambda_{\alpha}) - D_{lk}(-\omega_{\alpha})}{\lambda_{\alpha} - \omega_{\alpha}} e_{\alpha}^{*k} \delta A_{\alpha}^* \right) \\
 &= \frac{i}{2} \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha} (A_{\alpha}^* \delta A_{\alpha} - A_{\alpha} \delta A_{\alpha}^*), \quad \text{де } \Delta_{\alpha} \equiv \sum_{kl} e_{\alpha}^{*k} \frac{dD_{kl}(\omega_{\alpha})}{d\omega} e_{\alpha}^l = \Delta_{\alpha}^*. \quad (4.2.14)
 \end{aligned}$$

Перш ніж обчислити гамільтоніан зауважимо, що лагранжіан (4.2.7) занулюється в силу рівнянь руху (4.2.2), отже останній член в (4.2.12) також. Решту суми в (4.2.12) можна обчислити як форму Ліувіля (4.2.11), (4.2.13), але з формальною заміною у ній  $\delta A_{\alpha} \rightarrow -i\omega_{\alpha} A_{\alpha}$ :

$$H = \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha} \omega_{\alpha} |A_{\alpha}|^2. \quad (4.2.15)$$

Якщо  $\Delta_{\alpha} > 0$ , то можна переозначити вектори поляризації  $e_{\alpha}^k \rightarrow \tilde{e}_{\alpha}^k = \Delta_{\alpha}^{-1/2} e_{\alpha}^k$  в (4.2.6) так, що форма Ліувіля та гамільтоніан спростяться:

$$\Theta = \frac{i}{2} \sum_{\alpha} (A_{\alpha}^* \delta A_{\alpha} - A_{\alpha} \delta A_{\alpha}^*), \quad (4.2.16)$$

$$H = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} |A_{\alpha}|^2. \quad (4.2.17)$$

Тоді з (4.2.16) отримуємо симплектичну форму:  $\Omega = \delta\Theta = i \sum_{\alpha} \delta A_{\alpha}^* \wedge \delta A_{\alpha}$ , що породжує такі ДП:  $\{A_{\alpha}, A_{\beta}\} = \{A_{\alpha}^*, A_{\beta}^*\} = 0$ ,  $\{A_{\alpha}, A_{\beta}^*\} = -i \delta_{\alpha\beta}$ . При квантуванні  $A_{\alpha} \rightarrow \hat{A}_{\alpha}$ ,  $A_{\alpha}^* \rightarrow \hat{A}_{\alpha}^{\dagger}$  отримаємо стандартні оператори знищення і породження:  $[\hat{A}_{\alpha}, \hat{A}_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta}$ ; гамільтоніан (4.2.17) набуває стандартного осциляторного вигляду і негайно приводить до дискретного спектру  $E = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} (n_{\alpha} + \frac{1}{2})$ ,  $n_{\alpha} = 0, 1, \dots$ . Комплексні змінні  $A_{\alpha}$ ,  $A_{\alpha}^*$  називатимемо *канонічними*.

Нехай тепер  $\{\alpha\} = \{\alpha'\} \cup \{\alpha''\}$  такі, що  $\Delta_{\alpha'} > 0$  and  $\Delta_{\alpha''} < 0$ . Переозначимо вектори поляризації  $e_{\alpha}^k \rightarrow \tilde{e}_{\alpha}^k = |\Delta_{\alpha}|^{-1/2} e_{\alpha}^k$ , а також канонічні змінні  $A_{\alpha''} \rightarrow C_{\alpha''} = A_{\alpha''}^*$ . Це зводить форму Ліувіля (4.2.14) до канонічної:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{i}{2} \sum_{\alpha'} (A_{\alpha'}^* \delta A_{\alpha'} - A_{\alpha'} \delta A_{\alpha'}^*) - \frac{i}{2} \sum_{\alpha''} (A_{\alpha''}^* \delta A_{\alpha''} - A_{\alpha''} \delta A_{\alpha''}^*) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{\alpha'} (A_{\alpha'}^* \delta A_{\alpha'} - A_{\alpha'} \delta A_{\alpha'}^*) + \frac{i}{2} \sum_{\alpha''} (C_{\alpha''}^* \delta C_{\alpha''} - C_{\alpha''} \delta C_{\alpha''}^*). \end{aligned}$$

Але гамільтоніан у цьому випадку не є додатньо-визначенім:

$$H = \sum_{\alpha'} \omega_{\alpha'} |A_{\alpha'}|^2 - \sum_{\alpha''} \omega_{\alpha''} |C_{\alpha''}|^2. \quad (4.2.18)$$

Ця риса типова для систем з вищими похідними або часово-нелокальних [380].

#### 4.2.2. Комплексні моди

Нехай  $\operatorname{Re} \omega_{\alpha} \neq 0$ ,  $\operatorname{Im} \omega_{\alpha} \neq 0$ . Підставимо розв'язок (4.2.5) в (4.2.11) та виконаємо обчислення, подібні до випадку рівнянь (4.2.13)-(4.2.14). Отримаємо внесок  $\alpha$ -ї комплексної моди у форму Ліувіля:

$$\Theta_{\alpha} = \frac{i}{2} \{ \Delta_{\alpha} (B_{\alpha}^* \delta A_{\alpha} - A_{\alpha} \delta B_{\alpha}^*) + \Delta_{\alpha}^* (A_{\alpha}^* \delta B_{\alpha} - B_{\alpha} \delta A_{\alpha}^*) \}, \quad (4.2.19)$$

з комплексними (на відміну до означених в (4.2.14)) коефіцієнтами:

$$\Delta_{\alpha} \equiv \sum_{kl} {}^* f_{\alpha}^k \frac{dD_{kl}(\omega_{\alpha})}{d\omega} e_{\alpha}^l \neq \Delta_{\alpha}^*. \quad (4.2.20)$$

Тоді переозначення  $e_{\alpha}^k \rightarrow \tilde{e}_{\alpha}^k = \Delta_{\alpha}^{-1/2} e_{\alpha}^k$ ,  $f_{\alpha}^k \rightarrow \tilde{f}_{\alpha}^k = \Delta_{\alpha}^{-1/2} {}^* f_{\alpha}^k$  в (4.2.5) зводить (4.2.19) до вигляду:

$$\Theta_{\alpha} = \frac{i}{2} (B_{\alpha}^* \delta A_{\alpha} - A_{\alpha} \delta B_{\alpha}^* + A_{\alpha}^* \delta B_{\alpha} - B_{\alpha} \delta A_{\alpha}^*). \quad (4.2.21)$$

Подібно можна отримати внесок  $\alpha$ -ї моди в гамільтоніан:

$$H_\alpha = \omega_\alpha B_\alpha^* A_\alpha + \omega_\alpha^* A_\alpha^* B_\alpha. \quad (4.2.22)$$

Форма Ліувіля (4.2.21) не розпадається за змінними  $A_\alpha$  and  $B_\alpha$  які, отже, не є ні канонічними ні придатними для квантування. Властивості гамільтоніану (4.2.22) у цих змінних не є зрозумілими. Тому замінimo ці комплексні змінні на дійсні. Для стисlosti викладу розглянемо лише одну моду, що відповідає кадру-плету характеристичних частот, а індекс  $\alpha$  та підсумовування за  $\alpha$  упускатимемо.

Вибір канонічних змінних неоднозначний. Якщо обрати:

$$A = (-P + i p)/\sqrt{2}, \quad B = (q + i Q)/\sqrt{2},$$

то форма Ліувіля стандартизується:  $\Theta \stackrel{\text{md}}{=} p\delta q + P\delta Q$

(позначення “md” означає “з точністю до повного диференціалу”), тоді як

$$H = -\operatorname{Re} \omega(qP - Qp) - \operatorname{Im} \omega(qp + QP).$$

Гамільтоніан такого вигляду прокvantовано в [380], де показано, що його спектр є неперервним та необмеженим як зверху, так і знизу:  $E \in \mathbb{R}$ . Фізичне значення такої системи є сумнівним.

### 4.2.3. Уявні моди

Нехай  $\operatorname{Re} \omega_\alpha = 0$ , а  $\operatorname{Im} \omega_\alpha \equiv \gamma_\alpha > 0$ . Внесок цієї  $\alpha$ -ї моди в розв’язок (4.2.5) зводиться до таких членів:

$$\rho_\alpha^k(t) = A_\alpha e_\alpha^k e^{\gamma_\alpha t} + B_\alpha f_\alpha^k e^{-\gamma_\alpha t}, \quad (4.2.23)$$

де  $A_\alpha$ ,  $B_\alpha$ ,  $e_\alpha^k$  і  $f_\alpha^k$  є дійсними. Коефіцієнт (4.2.20) в цьому випадку виявляється суто уявним:  $\operatorname{Re} \Delta_\alpha = 0$ .

Знову упустимо індекс  $\alpha$ , та введемо знаковий множник  $\eta \equiv \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \Delta (= \pm 1)$ . Тоді внески уявної моди у форму Ліувіля та гамільтоніан є такі:

$$\Theta = \frac{1}{2}\eta\{B\delta A - A\delta B\} \stackrel{\text{md}}{=} \eta B\delta A \stackrel{\text{md}}{=} -\eta A\delta B, \quad (4.2.24)$$

$$H = \eta\gamma BA. \quad (4.2.25)$$

З (4.2.24) видно, що  $A$  і  $B$  утворюють пару взаємно спряжених дійсних канонічних змінних. А саме,  $A$  є координатного типу а  $B$  – імпульсного типу, якщо  $\eta = 1$ , і навпаки, якщо  $\eta = -1$ . При квантуванні гамільтоніан  $H$  виявляється необмеженим оператором з неперервним спектром, як у попередньому випадку. Щоб переконатися в цьому, здійснимо канонічне перетворення:

$$A = \eta\sqrt{\gamma/2}(p/\gamma - q), \quad B = \sqrt{\gamma/2}(p/\gamma + q).$$

У цих термінах форма Ліувіля (4.2.24) та гамільтоніан (4.2.25) стають такими:

$$\Theta \stackrel{\text{md}}{=} p\delta q, \quad H = \frac{1}{2}\{p^2 - \gamma^2 q^2\}.$$

Останній вираз для гамільтоніану описує добре відомий нестійкий осцилятор зі спектром  $E \in \mathbb{R}$ .

### 4.3. Гамільтонів опис та квантування (не)релятивістичних систем типу Фоккера

Як вихідний пункт для переходу до гамільтонового опису розглянемо інтеграл енергії. Вживаючи р-ня (4.1.24) та (4.1.37)-(4.1.39) отримаємо:

$$E \approx E^{(0)}(\Omega) + E^{(2)}(\Omega; \rho) = \tilde{E}^{(0)}(\Omega) - \Omega \partial \tilde{E}^{(0)} / \partial \Omega + \tilde{E}^{(2)}(\Omega; \rho). \quad (4.3.1)$$

В нульовому наближенні рух частинок є коловим. Він характеризується кутовою швидкістю  $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$  що, у свою чергу, визначає момент імпульсу  $J^{(0)}(\Omega)$  та енергію  $E^{(0)}(\Omega)$ . Р-ня (4.3.1) нагадує перетворення Лежандра від ефективного лагранжіану  $L^{(0)}(\Omega) = -\tilde{E}^{(0)}(\Omega)$  до гамільтоніану як функції від  $J = |\boldsymbol{J}|$ :

$$H^{(0)}(J) = E^{(0)}(\Omega) \Big|_{\Omega=f(J)}; \quad (4.3.2)$$

тут функція  $\Omega = f(J)$  є оберненою до  $J = J^{(0)}(\Omega)$ .

Явний вигляд поправки  $E^{(2)}(\Omega; \rho) = \tilde{E}^{(2)}(\Omega; \rho)$  до енергії  $E^{(0)}(\Omega)$  тут не важливий; її можна отримати як квадратичний член  $\rho$ -розкладу інтегралу (4.1.23)

або, еквівалентно, отримати з дії  $I^{(2)}$  (4.1.40). Знову вживаючи підстановку  $\Omega = f(J)$ , можна виразити член  $\tilde{E}^{(2)}(f(J); \rho)$  через канонічні змінні, що описують відхилення від колового руху частинок. Оскільки дія  $I^{(2)}$  є часо-нелокальною, а  $\tilde{E}^{(2)}$  не є функцією, а функціоналом змінних  $\rho_a$ , стандартне перетворення Лежандра тут не застосовне.

Користуючись ідеями роботи [105], в підрозділі 4.2 побудовано гамільтоніан (4.2.17) або (4.2.18) для загальної лінійної системи, означеної часо-нелокальним інтегралом дії. Він залежить від частот характеристичних мод та їх амплітуд як канонічних змінних.

У частковому локальному випадку  $\Phi(\vartheta, z_1, \dots, \dot{z}_2) = \delta(\vartheta)\Lambda(z_1, \dots, \dot{z}_2)$  динамічна  $6 \times 6$ -матриця є поліноміальною щодо  $\omega$ . Вона допускає 6 мод з дійсними частотами, що дають додатній внесок в гамільтоніан (4.2.17). 5 кінематичних мод (4.1.48)-(4.1.51) описують рух системи як цілого, і лише одна мода характеризує притаманну лише її динаміку (ця мода відповідає радіальним міжчастинковим осциляціям). Щоб уникнути далі подвійного врахування ступенів вільності, пригнітимо кінематичні моди і отримаємо:

$$H^{(2)}(J; |A_r|) = \omega_r(J)|A_r|^2; \quad (4.3.3)$$

тут  $\omega_r(J) \equiv \omega_r(\Omega)|_{\Omega=f(J)}$  і  $A_r$  – частота і амплітуда радіальних осциляцій.

В загальному випадку часо-нелокальної (тут фоккерівської) системи динамічна матриця не є поліноміальною і може допускати нескінченну кількість мод з дійсними і/або комплексними частотами. Після відділення кінематичних мод виникає питання: як тлумачити випадок, коли кількість решти мод є більшою від 1?

Можлива точка зору є такою, що "надлишкові" ступені вільності дійсно притаманні фоккерівській системі, яку буквально розглядаємо як фізичну модель. Якщо є комплексні частоти, то система є нестійкою і не може утворювати зв'язані стани, принаймні в МКО-наближенні.; див. п. 4.2.2-3. Деякі моди з дійсними частотами можуть давати від'ємний внесок в енергію (4.2.18), що є іншим проявом нестабільності [380]: спектр квантованої системи може бути дискретним,

але необмеженим знизу. В цих випадках модель слід вважати як фізично суперечливою.

Згідно з іншою точкою зору, "зайві" ступені вільності слід розглядати як математичний артефакт формалізму Фоккера або даної моделі, і в кінці їх слід відділити від фізично прийнятної динаміки системи.

Можна наївно очікувати, що двочастинкова система має 6 фізичних ступенів вільності, хоч може мати й більше у випадку фоккерівської динаміки. Щоб виділити їх серед усього (можливо, нескінченного) розмаїття ступенів вільності, необхідні певні правила відбору. Деякі з таких можливих правил обговорюються в роботах [64, 381], але ні одне з них не є достатнім.

В даному випадку питання полягає ось у чому: як розпізнати та відділити моду радіальних збуджень від інших мод? Для цього можна використати звичні фізичні вимоги і і певного роду принцип відовідності, якщо a) існує деякий параметр нелокальності  $\tau$ , такий що:

$$\Phi_\tau(\vartheta, z_1, \dots, \dot{z}_2) \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} \delta(\vartheta) \Lambda(z_1, \dots, \dot{z}_2),$$

тобто в границі  $\tau \rightarrow 0$  система зводиться до локальної лагранжевої системи, і b) якщо ця локальна система допускає колові розв'язки. Як наслідок, усі моди динамічної матриці зводяться до 5-ти кінематичних та 1-ї динамічної, що є *регулярною* при  $\tau \rightarrow 0$ . Решта мод занулюються або розбігаються. Якщо мода є комплексною і *синг'улярною*, тобто  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $|\omega| \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} \infty$ , вона описує в границі  $\tau \rightarrow 0$  миттєвий розпад системи, тоді як локальна лагранжева границя фоккерівської системи не має цього розв'язку. Отже, така мода не задоволяє принцип відовідності, і повинна бути відкинута. Якщо  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $|\omega| \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} \infty$ , то мода породжує в границі  $\tau \rightarrow 0$  нескінченно великий внесок в енергію, і також повинна бути відкинута. Лише випадок  $\omega \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} 0$  не суперечить принципу відовідності. Якщо така мода не є кінематичною, ії, імовірно, можна відкинути з інших фізичних вимог.

У випадку нелокального осцилятора (4.1.5), кілька версій якого вивчаються в додатку F, є 6 регулярних мод і скінченна або нескінченна кількість синг'улярних мод; останні є очевидно нефізичними. Деякі синг'улярні моди стають при

деякому скінченному значенні  $\tau > \tau_0 > 0$  дійсними, але не забезпечують додатню визначеність енергії та виявляють суперечливі інерційні властивості системи (а саме,  $M_{\text{eff}} < 0$ ). Ці *особливі* моди є швидше нефізичними.

Якщо немає явного параметру нелокальності, його часом можна ввести динамічно, як функцію кутової швидкості  $\Omega$  або моменту імпульсу  $J$ . Наприклад, в дії Тетроде-Фоккера [64] можна покласти  $\tau \sim v = R\Omega$ , де  $v$  – швидкість частинки вздовж колової орбіти радіусу  $R$ . В області  $v \ll 1$  існує лише 1 регулярна мода, яку можна уточнити з  $\omega_r(J)$ . За неперервністю цю моду можна розпізнати і відібрати в істотно релятивістичній області  $v \lesssim 1$ . Інші є комплексними сингулярними "зайвими" модами. В ультрарелятивістичній області  $v \geq 0.95$  деякі з них стають дійсними, подібно до випадку нелокального осцилятора. Хоч на сьогодні ці моди не визнані явно нефізичними [335], тут вони не розглядаються; непертурбативне вивчення задачі Тетроде-Фоккера могло б у майбутньому виявити фізичні аномалії цих розв'язків.

Після придушення кінематичних і відкидання нефізичних мод можна отримати ефективний радіально редукований гамільтоніан:

$$H_{\text{eff}}(J, |A_r|) = H^{(0)}(J) + H^{(2)}(J, |A_r|) = H^{(0)}(J) + \omega_r(J)|A_r|^2 \quad (4.3.4)$$

Тепер можна відновити точний опис кінематичних ступенів вільностей (придушених в МКО-наближенні). Перш за все, вкладемо радіально редуковану систему в ефективну обертово-інваріантну 1-частинкову динаміку. Згадаємо, що  $|A_r| = \sqrt{A_r^* A_r}$ ,  $J = |\mathbf{J}| = \sqrt{\mathbf{J}^2}$ , де  $\mathbf{J} = \{J_i, i = 1, 2, 3\}$ , і накладемо на задіяні тут змінні співвідношення дужок Пуасона:

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ij}^k J_k, \quad \{A_r, A_r^*\} = -i, \quad \{J_i, A_r\} = \{J_i, A_r^*\} = 0.$$

Циклічна кутова змінна, скажімо  $\phi$ , така що  $\{\phi, J_3\} = 1$ , доповнює систему змінних на ефективному фазовому просторі  $\mathbb{P}_{\text{eff}}$ ,  $\dim \mathbb{P}_{\text{eff}} = 6$ .

Гамільтоніан  $H_{\text{eff}}(J, |A_r|)$  є готовим до квантування: для цього змінні замінюються на оператори, а тоді – на їх власні значення:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &\rightarrow \hat{\mathbf{J}}; \quad A_r \rightarrow \hat{A}_r, \quad A_r^* \rightarrow \hat{A}_r^\dagger; \\ J &\rightarrow \sqrt{\hat{\mathbf{J}}^2} \rightarrow \sqrt{\ell(\ell+1)}, \quad \ell = 0, 1, \dots; \\ |A_r|^2 &\rightarrow \tfrac{1}{2}(\hat{A}_r \hat{A}_r^\dagger + \hat{A}_r^\dagger \hat{A}_r) \rightarrow n_r + \tfrac{1}{2}, \quad n_r = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Згідно з пертурбативною процедурою, маємо на увазі нерівність  $H^{(2)} \ll H^{(0)}$ , що здебільшого забезпечується умовою  $n_r \ll \ell$ . Тоді  $\sqrt{\ell(\ell+1)} \approx \ell + \tfrac{1}{2}$ .

Далі згадаємо, що гамільтоніан (4.3.4) є 2-частинковою енергією в ЦМ-системі відліку, а  $\mathbf{J}$  є внутрішнім моментом імпульсу системи. Тому введемо змінні, що характеризують систему як ціле, наприклад повний імпульс  $\mathbf{P} = \{P_i, i = 1, 2, 3\}$  і канонічно спряжене розташування ЦМ  $\mathbf{Q} = \{Q_i, i = 1, 2, 3\}$ .

Щоб будувати ці змінні в гамільтоновий опис системи, необхідно звернутися до симетрійних властивостей системи. Це галілей-інваріантність в нерелятивістичному випадку, і пуанкаре-інваріантність у релятивістичному. В обидвох випадках змінні  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  разом з  $A_r, \mathbf{J}, \phi$  та функцією (4.3.4) визначають канонічну реалізацію групи симетрії (Галілея чи Пуанкаре), тобто повний гамільтонів опис системи на двочастинковому фазовому просторі  $\mathbb{P}$ ,  $\dim \mathbb{P} = 12$ .

Наприклад, повна енергія нерелятивістичної системи є

$$H = \tfrac{1}{2}M_{\text{eff}}^{-1}\mathbf{P}^2 + H_{\text{eff}}(J, |A_r|), \quad (4.3.6)$$

де  $M_{\text{eff}}$  ( $= m_1 + m_2$  в локальному випадку) пов'язана з галілей-інваріантними властивостями системи; див. додаток F

У релятивістичному випадку:

$$H = \sqrt{M^2 + \mathbf{P}^2}, \quad \text{де } M = H_{\text{eff}}(J, |A_r|), \quad (4.3.7)$$

тобто ефективний гамільтоніан збігається з повною релятивістичною масою системи  $M$ , тоді як повний гамільтоніан (4.3.7) та інші генератори групи Пуанкаре визначаються в термінах  $M, \mathbf{J}, \mathbf{P}$  та  $\mathbf{Q}$  через БТ-опис чи подібні [18, 20]; див. п.

1.1.7; п. 2.1.6, (2.1.56) на стор. 111; п. 3.2.3, (3.2.21) на стор. 168. Загальне квантування в рамках БТ- чи подібних описів добре відоме [19, 21]. Але спектр масового оператора можна безпосередньо отримати з (4.3.4) шляхом підстановки (4.3.5).

Як приклад розглянемо галілей-інваріантну систему двох частинок, що взаємодіють через локальний потенціал  $U = a|\mathbf{z}|^\nu$ , де  $\nu > -2$ ,  $a\nu > 0$ . 1- і 2-фоккеріани є  $L_a = \frac{1}{2}m_a\dot{\mathbf{z}}_a^2$  та  $\Phi = -\delta(\vartheta)a|\mathbf{z}|^\nu$ . Для (4.3.2) і (4.3.3) маємо:

$$H^{(0)} = \left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \left[a^2 \left(\frac{J^2}{\nu m}\right)^\nu\right]^{\frac{1}{\nu+2}}, \quad \omega_r = \sqrt{\nu+2}\Omega, \quad \text{де } \Omega = \left[(\nu a)^2 \frac{J^{\nu-2}}{m^\nu}\right]^{\frac{1}{\nu+2}}$$

і  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . При квантуванні (4.3.5) отримаємо спектр енергії:

$$E \approx \left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \left[a^2 \left(\frac{\ell(\ell+1)}{\nu m}\right)^\nu\right]^{\frac{1}{\nu+2}} \left\{ 1 + \frac{\nu}{\sqrt{\nu+2}} \frac{2n_r + 1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \right\}.$$

Він збігається з результатами, отриманими в [207] з р-ня Шрединг'єра в наближенні  $\ell \ll 1$ .

Кілька точно розв'язних версій нелокального осцилятора (4.1.5) розглядаються в додатку F. Приклад релятивістичної потенціальної моделі типу Фоккера розглядався у попередньому розділі.

#### 4.4. Висновок

У цьому розділі запропонована схема гамільтонізації та квантування двочастинкової системи типу Фоккера в МКО-наближенні. Для загальності розглядається довільна система, інваріантна щодо групи Арістотеля – спільної підгрупи груп Галілея та Пуанкаре. В такий спосіб до розгляду беруться як нерелятивістичні, так і релятивістичні системи. І лише на кінцевій стадії процедура звертається до вихідної симетрії системи.

Доведено, що загальна двочастинкова арістотеле-інваріантна система допускає плаский коловий рух частинок з довільною (в принципі) кутовою швидкістю  $\Omega$  за досить загальних фізично змістовних умов. Це досягається використанням системи відліку, що рівномірно обертається, і пошуком у цій системі статичних

(рівноважних) розв'язків рівнянь руху. Радіуси  $R_a$  орбіт частинок є певними (невідомими) функціями  $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$ . Тоді розглядаються відхилення від точок рівноваги. Вони відповідають майже коловим орбітам частинок [64] з погляду нерухомого (інерційного) саостерігача.

Для збуреного руху отирмано варіаційний принцип типу Фоккера. Він веде до лінійної однорідної системи інтегро-диференційних рівнянь. Вивчено загальні властивості цієї системи. Шляхом теоретико-групового аналізу показано, що розмایття характеристичних мод системи містить кілька кінематичних мод, що описують рух системи як цілого. Крім них є принаймні 1 мода, що відповідає радіальним міжчастинковим осциляціям, і вважається фізично змістовою. Усі інші характеристичні моди (якщо вони існують) є нестійкими або фізично контроверсійними. Запропоновано відповідні правила відбору. Відповідну динамічну систему зведено до ефективної одночастинкової задачі, переформульованої в рамках гамільтонового опису з допомогою процедури Лльози та Вівеса [105]. Після цього врахування вихідної симетрії системи дозволяє розширити її опис до двочастинкового. Якщо, наприклад, вихідна фоккерівська система є пуанкарє-інваріантною, то кінцевий гамільтонів опис є типу Бакамджіана-Томаса (у миттєвій формі динаміці), або еквівалентний (в іншій формі динаміці –точковій, фронтальній тощо). Подальше квантування здійснюється безпосередньо [19, 21].

Запропонована схема була використана для квантування потенціальної моделі типу Фоккера в попередньому розділі. Вона може бути корисною і в інших задачах атомної, ядерної та гадронної фізики.

## РОЗДІЛ 5

# ЧАСТКОВО РЕДУКОВАНА ТЕОРІЯ ПОЛЯ І ДВОЧАСТИНКОВІ РІВНЯННЯ ДІРАКА

У квантовій теорії поля (КТП) існують апробовані методи опису кількачастинкових станів, зокрема, зв'язаних станів; див. підрозділ 1.1. Більшість із них, що базуються на рівняннях Бете-Салпітера, Салпітера, чи квазіпотенціальних (п. 1.1.2), походять із пертурбативної КТП. Їх застосування до сильно зв'язаних систем не є строго обґрунтованим. Інший підхід – це використання варіаційного методу в КТП (п.1.1.4). Цей підхід не обов'язково є пертурбативним, але у ньому часто використовують неконтрольовані наближення чи ігнорують важливі фізичні аспекти опису, наприклад пуанкарє-інваріантність тощо.

З іншого боку, в релятивістичній теорії прямих взаємодій (РТПВ), яка загалом є математично простіша від КТП, добре опрацьовані методи аналізу пуанкарє-інваріантності, зв'язку між різними формалізмами РТПВ тощо. Зокрема, встановлення зв'язку формалізму інтегралів дії типу Фоккера (підрозділ 1.3) з коваріантною (п. 1.1.6) і тривимірною (п. 1.1.7) гамільтоновою механікою дало змогу ефективно застосовувати РТПВ в кілька-частинковій фізиці. Застосування методів РТПВ до опису взаємодій, що зустрічаються в теоретичних моделях КТП, видається перспективним напрямком.

Серед підходів до релятивістичної проблеми зв'язаних станів недавно виник підхід, що є теоретико-польовим аналогом фоккерівського формалізму. Він ґрунтуються на т. зв. *частково редукованих* (ЧР) лагранжіанах в теорії поля [68–75]. Цей підхід передбачає такі кроки:

- вилучення з опису змінних полів-посередників взаємодії на класичному рів-

ні з-допомогою коваріантної функції Гріна, та отримання нелокального лагранжевого опису;

- побудова відповідного теоретико-польового гамільтоніану та його квантування;
- виведення кілька-частинкових хвильових рівнянь на власні стани і власні значення гамільтоніану, та їх розв'язування.

Ця схема має свої особливості. З погляду фізики вона може бути ефективною для процесів, у яких немає фізичних бозонів полів-носіїв взаємодій (або їх взаємодією із системою можна знехтувати). Прикладами таких систем є системи нуклонів нижче від порогу народження мезонів, а також кварк-гадронні системи. У математичному відношенні підхід виявився різновидом нелокальної теорії поля: редукований лагранжіан містить нелокальні члени, що ускладнює його гамільтонізацію. В попередніх роботах цього підходу нелокальність усувалася неявним застосуванням миттєвого наближення. У роботах автора цієї дисертації [9, 11, 12] запропоновано послідовний шлях гамільтонізації частково редукованої теорії поля (ЧРТП). Він ґрунтується на узагальненні формальної процедури гамільтонізації нелокальної лагранжевої механіки, розвиненні теорії збурень та неканонічних перетвореннях польових змінних. Для апробації методу розглянемо перш за все реформульовану спінорну електродинаміку.

Результати цього розділу опубліковані в статтях [9, 12–15], матеріалах і тезах конференцій [28, 30, 35–39], та препрінтах [176–178].

## 5.1. Частково редукована спінорна електродинаміка

### 5.1.1. Редукований лагранжіан та гамільтоніан

Розглянемо систему спінорних полів матерії  $\psi_a(x)$  з масами  $m_a$  ( $a = 1, 2, \dots, N$ ), що взаємодіють між собою через електромагнетне поле  $A_\mu(x)$ . Густина класичного лагранжіану, що описує таку систему, має вигляд  $\mathcal{L} = \sum_a \mathcal{L}_a^{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{em}}$ , де  $\mathcal{L}_{\text{em}}$  означено р-ням (1.3.2, с.80), а густина лагранжіану  $\mathcal{L}_a^{\text{free}}$  вільних полів ма-

терії та їх струм  $J_\mu$  мають стандартний вигляд:

$$\mathcal{L}_a^{\text{free}}(x) = \bar{\psi}_a(x) \{ i\gamma^\mu \partial_\mu - m_a \} \psi_a(x) \quad (5.1.1)$$

$$J_\mu(x) = \sum_a q_a \bar{\psi}_a(x) \gamma_\mu \psi_a(x). \quad (5.1.2)$$

Варіація дії  $I = \int d^4x \mathcal{L}$  приводить до рівнянь Максвела (1.3.4, с.80) із струмом (5.1.2) у правій частині. Їх розв'язок можна записати у термінах ф-ї Гріна  $D_{\mu\nu}(x - x')$  р-нь Максвела:

$$A_\mu(x) = \int d^4x' D_{\mu\nu}(x - x') J^\nu(x), \quad (5.1.3)$$

де знехтувано вільним електромагнетним полем  $A_0^\mu$ , як і у випадку фоккерівського формалізму (підрозділ 1.3).

Підстановка розв'язку (5.1.3) у вихідний лагранжіан  $\mathcal{L}$  (вірніше, в інтеграл дії  $I = \int d^4x \mathcal{L}$ ) приводить до редукованого лагранжіану

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_a \mathcal{L}_a^{\text{free}} + \bar{\mathcal{L}}^{\text{int}}, \quad (5.1.4)$$

$$\text{де } \bar{\mathcal{L}}^{\text{int}} = -\frac{1}{2} \int d^4x' J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x - x') J^\nu(x'), \quad (5.1.5)$$

а ф-я Гріна є цілком симетрична:

$$D_{\mu\nu}(x - x') = D_{\mu\nu}(x' - x) \quad \text{та} \quad D_{\mu\nu}(x - x') = D_{\nu\mu}(x - x'). \quad (5.1.6)$$

Вигляд редукованого лагранжіану наводить на ідею переходу до гамільтонового опису шляхом такого означення густини гамільтоніану:

$$\mathcal{H} = \sum_a \mathcal{H}_a^{\text{free}} + \mathcal{H}^{\text{int}} \equiv \sum_a \psi_a^\dagger(x) \{ -i\alpha \cdot \nabla + m_a \beta \} \psi_a(x) + \mathcal{H}^{\text{int}}, \quad (5.1.7)$$

де  $\mathcal{H}^{\text{int}} = -\bar{\mathcal{L}}^{\text{int}}$ . Цей останній вираз – нелокальний в часі, що є нетиповим для гамільтонової теорії. Щоб уникнути цих труднощів можна, услід за роботами [68–73], здійснити квантування теорії як в картині Шредінгера, поклавши  $t=0$  у виразах для польових операторів та струмів:  $\psi_a(x) = \psi_a(\mathbf{x}, t = 0) \equiv \psi_a(\mathbf{x})$ ,  $J^\mu(x) = J^\mu(\mathbf{x}, t = 0) \equiv J^\mu(\mathbf{x})$  і т.д. Далі (в п. 5.2.2) стане зрозумілим, що таке

тлумачення нелокального лагранжіану (5.1.4), (5.1.5) є наближенням, що в певному сенсі аналогічне до миттєвого. В результаті отримаємо

$$\mathcal{H}^{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d^3x' J^\mu(\mathbf{x}) u_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') J^\nu(\mathbf{x}'), \quad (5.1.8)$$

$$\text{де } u_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int dt' D_{\mu\nu}(x - x'). \quad (5.1.9)$$

### 5.1.2. Квантування, "порожній" вакуум та кількачастинкові стани

Квантування у картині Шрединг'єра здійснюється шляхом накладання антикомутаційних співвідношень на діраківські поля:

$$\{\psi_{a\alpha}(\mathbf{x}), \psi_{b\beta}^\dagger(\mathbf{y})\} = \delta_{ab}\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad a, b = 1, 2, \alpha, \beta = 1, \dots, 4. \quad (5.1.10)$$

Далі означимо, услід за роботами [70, 79], нетрадиційний ("порожній") вакуумний стан  $|\tilde{0}\rangle$  умовою:

$$\psi_{a\alpha}(\mathbf{x})|\tilde{0}\rangle = 0, \quad (5.1.11)$$

і запишемо нормальну впорядкований гамільтоніан

$$;H; = \int d^3x ;\mathcal{H}; \quad (5.1.12)$$

де  $\mathcal{H}$  означене в р-нях (5.1.7), (5.1.8). Нормальне впорядкування досягається вживанням антикомутаційних співвідношень (5.1.10), як звичайно; але воно не тотоважне до звичайного нормального впорядкування за-через нетрадиційний порожній вакуум (5.1.12) та нетрадиційне означення  $\psi_a$  як операторів знищення, та  $\psi_a^\dagger$  як операторів породження. Позначимо цю нетрадиційну процедуру через  $;H;$  (замість  $:H:$ ).

З цих застережень випливає, що одно-, дво-, три-, ...,  $N$ -частинковий стани утворюють сектори простору Фока, що є замкнутими (тобто не зв'язаними між собою) щодо дії гамільтоніану (5.1.12). Тому кожен з цих секторів може служити як простір для задачі на власні стани гамільтоніану (5.1.12).

Дійсно, можна переконатися, що стан

$$|1\rangle = \int d^3x \Psi_\alpha(\mathbf{x}) \psi_{1\alpha}^\dagger(\mathbf{x}) |\tilde{0}\rangle, \quad (5.1.13)$$

де  $\Psi(\mathbf{x})$  – 4-компонентна функція, є власним станом гамільтоніану ;  $H$ ; за умови, що  $\Psi(\mathbf{x})$  задовольняє р-ня:

$$h_1(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) = E\Psi(\mathbf{x}), \quad (5.1.14)$$

$$\text{де } h_a(\mathbf{x}) \equiv -i\alpha_a \cdot \nabla + m_a\beta_a, \quad a = 1, 2, \dots \quad (5.1.15)$$

Це є звичайним не залежним від часу 1-частинковим р-ням Дірака, так що  $\Psi(\mathbf{x})$  є діраківським спінором. Тому  $|1\rangle$  є станом з 1-єю вільною частинкою 1.

Подібно, 2-частинковий стан:

$$|2\rangle = \int d^3x_1 d^3x_2 \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \psi_{1\alpha}^\dagger(\mathbf{x}_1) \psi_{2\beta}^\dagger(\mathbf{x}_2) |\tilde{0}\rangle, \quad (5.1.16)$$

(підсумовування за  $\alpha, \beta = 1, \dots, 4$  не вказано явно). Це є власний стан ;  $H$ ; [р-ня (5.1.12)], тобто

$$; H; |2\rangle = E|2\rangle \quad (5.1.17)$$

за умови, що  $4 \times 4$ -компонентна власна ф-я  $\Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  задовольняє хвильове р-ня, яке буде виведено далі.

Дія вільночастинкових членів ;  $H$ ; на  $|2\rangle$  очевидна:

$$; H_a^{\text{free}}; |2\rangle = \int d^3x_1 d^3x_2 \psi_{a\alpha}^\dagger(\mathbf{x}_1) \psi_{2\beta}^\dagger(\mathbf{x}_2) h_{a\alpha\gamma}(\mathbf{x}_a) \Phi_{\gamma\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) |\tilde{0}\rangle. \quad (5.1.18)$$

Представимо довільний член взаємодії ;  $O$ ; гамільтоніану ;  $H$ ; в інтегральному вигляді шляхом вставляння потрібної кількості  $\delta$ -функцій та їх похідних:

$$; O; = \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 ; O_{ab}; = \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \int d^3x_1 d^3x_2 d^3y_1 d^3y_1 \\ \times \psi_{a\alpha}^\dagger(\mathbf{x}_1) \psi_{b\beta}^\dagger(\mathbf{x}_2) \psi_{a\gamma}(\mathbf{y}_1) \psi_{b\delta}(\mathbf{y}_2) \mathcal{O}_{ab\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$$

(тут неявне підсумовування за грецькими індексами). Вживаючи антикомутаційні співвідношення (5.1.10) та означення вакуумного (5.1.11) і 2-частинкового (5.1.16) станів, легко показати, що ;  $O_{11}; |2\rangle = ; O_{22}; |2\rangle = 0$ , а

$$; O_{12}; |2\rangle = \int d^3x_1 d^3x_2 d^3y_1 d^3y_1 \\ \times \psi_{1\alpha}^\dagger(\mathbf{x}_1) \psi_{2\beta}^\dagger(\mathbf{x}_2) \mathcal{O}_{12\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \Phi_{\gamma\delta}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) |\tilde{0}\rangle, \quad (5.1.19)$$

і подібно для  $|O_{21}; |2\rangle$ . Вживаючи р-ня (5.1.12), (5.1.7), (5.1.8), (5.1.2), (5.1.18) і (5.1.19), отримаємо 2-частинкове р-ня Дірака (1.1.1) з потенціалом:

$$U_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = q_1 q_2 u_{\mu\nu}(\mathbf{r}) \gamma_1^0 \gamma_1^\mu \gamma_2^0 \gamma_2^\nu, \quad \text{де } \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2. \quad (5.1.20)$$

Структура гамільтоніану  $H$ ; така, що легко допускає узагальнення на системи більш ніж двох частинок. Зокрема, тричастинковий стан

$$|3\rangle = \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 F_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \psi_{\alpha_1}^\dagger(\mathbf{x}_1) \psi_{\alpha_2}^\dagger(\mathbf{x}_2) \phi_{\alpha_3}^\dagger(\mathbf{x}_3) |\tilde{0}\rangle, \quad (5.1.21)$$

що відповідає системі типу  $|e^- e^- \mu^+\rangle$ , є точним власним станом  $H$ ; із власним значенням  $E$  за умови, що  $4^3 = 64$  коефіцієнтні функції  $F_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  задовільняють тричастинкове рівняння Дірака:

$$\begin{aligned} & \{h_1(\mathbf{x}_1) + h_2(\mathbf{x}_2) + h_3(\mathbf{x}_3) + U_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + U_{23}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \\ & + U_{13}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)\} F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = EF(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

де  $h_a(\mathbf{x})$  означено в р-ні (5.1.15).

### 5.1.3. Проблема калібрувальної інваріантності

В цьому місці необхідно вказати явний вигляд функції Гріна (5.1.6), що залежить від вибору калібрувальної умови. Якщо обрати калібрування Кулона  $\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0$ , то фур'є-образ ф-ї Гріна буде заданий формулами [5]:

$$\tilde{D}_{00}(k) = \frac{1}{\mathbf{k}^2}, \quad \tilde{D}_{0j}(k) = 0, \quad \tilde{D}_{ij}(k) = \frac{1}{k^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right),$$

а сама вона явно записана в р-ні (6.4.40, с.314) через симетричну ф-ю Гріна р-ня Даламбера  $D_{\text{sym}}(x) = D_{\eta=0}(x)$ ; див. р-ня (1.3.13, с.82). Відповідне ядро взаємодії (5.1.20) має вигляд

$$u_{00}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r}, \quad u_{0i} = 0 \quad u_{ij}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi r} \left( \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r^2} \right), \quad (5.1.23)$$

і у формулі (5.1.9) дає потенціал Брайта (1.1.3, с.39).

Як добре відомо [2], див. п. 1.1.1, рівняння Брайта не враховує радіаційні ефекти, а власні значення  $E$  не є коректними у членах  $\sim o(\alpha^4)$  (де  $\alpha = |q_1 q_2|/4\pi$ ).

Тут це обмеження виникло внаслідок нехтування ефектів запізнення вищих, ніж 1-го порядку [див. р-ня (5.1.9)], і вживання порожнього вакууму (5.1.11).

Калібрувальній умові Лоренца (1.3.5, с.80) відповідає функція Г'ріна  $D_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}D_{\text{sym}}(x)$ , що дає  $u_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \eta_{\mu\nu}/(4\pi r)$  і приводить до потенціалу Едингтона-Ганта (1.1.4, с.39). Цей потенціал не враховує ефекти запізнення навіть найнижчого порядку, а власні значення  $E$  відрізняються від брайтівських вже у членах  $\sim O(\alpha^4)$ .

Вказана калібрувальна неінваріантність потенціалу (5.1.20) може бути усунута врахуванням ефектів запізнення вищого порядку.

Це буде показано далі, при розгляді більш загальних взаємодій.

## 5.2. Інші частково редуковані теорії поля

Тут підхід частково редукованої КТП застосовується до узагальнень моделі Юкави, що описують взаємодію спінорних полів через скалярне, векторне, псевдо-скалярне, псевдо-векторне (аксіальне) або антисиметричне тензорне поле. Поля-посередники взаємодії можуть бути стандартними (масивними чи безмасовими), або деякими ефективними полями, що можуть виникати у фізиці гадронів тощо.

### 5.2.1. Побудова редукованих лагранжіанів системи взаємодіючих полів матерії

Виходимо з класичного інтегралу дії  $I = \int d^4x \mathcal{L}$  для взаємодіючої системи фермійонних (діраківських) полів матерії  $\psi_a(x)$  ( $a = 1, 2, \dots$ ) та бозонних полів - посередників взаємодії  $B^n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) з лагранжевою густиною

$$\mathcal{L} = \sum_a \mathcal{L}_a^{\text{free}} + \sum_{a,n} \mathcal{L}_{an} + \mathcal{L}_{\text{med}}. \quad (5.2.1)$$

Тут  $\mathcal{L}_a^{\text{free}}$  – лагранжіан (5.1.1) вільного  $a$ -го діраківського поля, член

$$\mathcal{L}_{an} = -J_{an}B_n, \quad J_{an} = g_a \bar{\psi}_a(x) \Gamma_n \psi_a(x) \quad (5.2.2)$$

описує взаємодію  $a$ -го поля матерії із  $n$ -м полем-медіатором  $B_n$  через струм  $J_{an}$ ; тут  $g_{an}$  – константи взаємодії, а  $\Gamma_n$  – матриці чи оператори, вигляд якої визначає тензорна структура взаємодії: 1 – скалярна,  $\gamma_5$  – псевдо-скалярна,  $\gamma_\mu$  – векторна,  $\gamma_5\gamma_\mu$  – псевдо-векторна (аксіальна),  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$  – тензорна.

У цьому розділі лагранжіан полів-медіаторів вважається білінійною формою:  $\mathcal{L}_{\text{med}} = \sum_{nm} B_n \mathcal{F}_{nm} B_m$ , що визначається самоспряженім оператором  $\mathcal{F}_{nm}$ . Тоді варіація дії (1.3.1, с.79), (5.1.23) за полями  $D_n$  приводить до лінійних (за цими полями) рівнянь  $\sum_m \mathcal{F}_{nm} B_m = J_n \equiv \sum_a J_{an}$ , які можна розв'язати за допомогою пропагатора (симетричної коваріантної функції Гріна):

$$B_n(x) = \sum_m \int d^4x' D_{nm}(x - x') J_m(x'). \quad (5.2.3)$$

У цьому розв'язку пригнічено незалежні від джерела члени, що виключає з розгляду процеси з фізичними квантами полів  $B_n$ . Підстановка цих розв'язків в дію (1.3.1), (5.1.23) приводить до редукованої теорії поля з дією

$$\bar{I} = \int d^4x \bar{\mathcal{L}}, \quad \bar{\mathcal{L}} = \sum_a \mathcal{L}_a^{\text{free}} - \mathcal{U}, \quad (5.2.4)$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{nm} \int d^4x' J_n(x) D_{nm}(x - x') J_m(x'), \quad (5.2.5)$$

де редукований лагранжіян  $\bar{\mathcal{L}}$  вже не містить змінних полів-посередників  $B_n(x)$ , а потенціал  $\mathcal{U}$  описує ефективну пряму взаємодію полів матерії  $\psi_a(x)$ , нелокальну як у просторі, так і в часі.

З огляду на часову нелокальність редукованого лагранжіану (5.2.4), (5.2.5), побудова гамільтонового опису є нетривіальною. Використаний в п.5.1.1 перехід до представлення Шредінгера з метою отримання локального гамільтоніану не є коректним: направді, такий перехід можливий *після* побудови гамільтонового опису, а не *для* цього. Тому, перш ніж квантувати теорію, необхідно звести її до локального у часі вигляду. Це можна здійснити у рамках деякої апроксимаційної схеми. Розвивалися дві такі схеми. В одній із них часова нелокальність усувалася безпосередньо в редукованому лагранжіяні та інтегралах руху - в рамках квазірелятивістичних наближень (з допомогою розкладів за запізненням, тобто оберне-

ною швидкістю світла [9, 12, 30]). Ця схема приводить до одно-, дво- чи багаточастинкових хвильових рівнянь Дірка в координатному представленні, зокрема до рівняння Брайта для електромагнетної взаємодії. Вона коротко викладена в наступному пункті. В іншій схемі нелокальність усувається на гамільтоновому рівні, розкладами за константою взаємодії. Ця схема буде представлена в підрозділі 6.1.

### 5.2.2. Квазірелятивістичний розклад редукованого лагранжіану та побудова гамільтоніану

Без втрати загальності пропагатор  $D_{nm}$  вважаємо діагональним:  $D_{nm}(x) = \delta_{nm}D_n(x)$ , де функція Гріна  $D_n(x)$  є симетричною, тобто залежить від інтервалу  $x^2 = t^2 - \mathbf{x}^2$ ; індекси  $n, m$  для простоти викладу упускаємо. Вживаючи підстановку  $t' = t + \lambda$  і розклад в ряд  $J(t + \lambda, \mathbf{x}') = J(t, \mathbf{x}') + \lambda \dot{J}(t, \mathbf{x}') + \dots$ , загальну структуру розв'язку (5.2.3) можна представити так:

$$\begin{aligned} & \int d^4x' D[(t-t')^2 - r^2] J(t', \mathbf{x}') = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int d^3x' D(\lambda^2 - r^2) \left\{ J(t, \mathbf{x}') + \lambda \dot{J}(t, \mathbf{x}') + \frac{1}{2}\lambda^2 \ddot{J}(t, \mathbf{x}') + \dots \right\} \\ &= \int d^3x' \left\{ u(r) J(t, \mathbf{x}') + \frac{1}{2}v(r) \ddot{J}(t, \mathbf{x}') + \dots \right\}, \end{aligned}$$

де  $\dot{J} = \partial J / \partial t$ ,  $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ , а функції

$$u(r) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda D(\lambda^2 - r^2) \quad \text{i} \quad v(r) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda D(\lambda^2 - r^2) \lambda^2 \quad (5.2.6)$$

пов'язані між собою співвідношенням:

$$v'(r) = ru(r). \quad (5.2.7)$$

Тоді члени взаємодії у редукованій дії (5.2.4) можна представити так:

$$\begin{aligned} \bar{I}^{\text{int}} &\equiv - \int d^4x \mathcal{U} \approx - \int d^4x \left\{ \mathcal{U}^{(0)} + \mathcal{U}^{(1)} + \dots \right\}, \\ \text{де } \mathcal{U}^{(0)} &= \frac{1}{2} \int d^3x' J(\mathbf{x}) u(r) J(\mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

$$\mathcal{U}^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^3x' \dot{J}(\mathbf{x}) v(r) \dot{J}(\mathbf{x}') \quad (5.2.9)$$

є локальними у часі потенціалами (аргумент  $t$  упущено). Членами розкладу з вищими похідними  $\mathcal{U}^{(2)}$  і т.д. у даному наближенні нехтуємо.

Наближений локальний лагранжіан

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sum_a \mathcal{L}_a^{\text{free}} - \mathcal{U}^{(0)} - \mathcal{U}^{(1)} \quad (\approx \bar{\mathcal{L}}) \quad (5.2.10)$$

приводить до рівнянь Ойлера-Лагранжа 2-го порядку за часовими похідними, які приписують ферміонним полям  $\psi_a$  надлишкові ступені вільності. Щоб усунути їх, похідні в квадратичних за  $\dot{J}$  потенціалах (5.2.9) вилучаються за допомогою рівнянь руху 0-го наближення:

$$\dot{J} \rightarrow \hat{J} \equiv \dot{J}|_{(i\gamma \cdot \partial - m)\psi = 0} = g \{ (\nabla \bar{\psi} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \Gamma \psi - \bar{\psi} \Gamma \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi + i m \bar{\psi} [\beta, \Gamma] \psi \} \quad (5.2.11)$$

(тут  $[a, b]$  позначає комутатор, а індекси полів для простоти упущено), так що замість лагранжіану (5.2.10) маємо  $\hat{\mathcal{L}} \equiv \tilde{\mathcal{L}}|_{j \rightarrow \hat{j}}$  за рахунок  $\hat{\mathcal{U}}^{(1)} \equiv \mathcal{U}^{(1)}|_{j \rightarrow \hat{j}}$ .

Хоча така процедура є математично некоректною [382], вона приводить до формально правильних результатів. Щоб у цьому переконатися, слід звернутися до коректної процедури.

Коректним є метод подвійного нуля [12, 382], що полягає у такій модифікації лагранжіану (5.2.10):

$$\tilde{\mathcal{L}} \rightarrow \underline{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{Z}, \quad (5.2.12)$$

$$\text{де } \mathcal{Z} = \frac{1}{4} \int d^3x' \left\{ \dot{J}(\mathbf{x}) - \hat{J}(\mathbf{x}) \right\} v(r) \left\{ \dot{J}(\mathbf{x}) - \hat{J}(\mathbf{x}) \right\}. \quad (5.2.13)$$

Легко бачити, що в силу (5.2.11) член  $\mathcal{Z}$  є подвійним нулем на р-нях руху 0-го наближення, і тому має таку властивість:

$$\delta \int d^3x \mathcal{Z} \Big|_{\delta \int d^3x \mathcal{L}^{(0)} = 0} = 0,$$

тому не змінює варіаційної задачі з прийнятною точністю. З іншого боку, він компенсує квадратичні за часовими похідними від полів  $\psi_a$  члени в  $\tilde{\mathcal{L}}$ . Тому модифікований лагранжіан  $\underline{\mathcal{L}}$  породжує рівняння руху, лінійні щодо  $\dot{\psi}_a$ .

Далі слід здійснити перетворення польових змінних  $\psi_a \rightarrow \underline{\psi}_a$ , що усуває похідні  $\dot{\underline{\psi}}_a$  із тих членів  $\underline{\mathcal{L}}$ , які описують взаємодію. Таким чином отримаємо

$$\underline{\mathcal{L}}[\psi] = \hat{\mathcal{L}}[\underline{\psi}] = \sum_a i \underline{\psi}_a^\dagger \dot{\underline{\psi}}_a - \mathcal{H}[\underline{\psi}], \quad (5.2.14)$$

$$\text{де } \mathcal{H}[\psi] = \sum_a \mathcal{H}_a^{\text{free}} + \mathcal{U}^{(0)} + \hat{\mathcal{U}}^{(1)} \quad (5.2.15)$$

є локальним гамільтоніаном системи. Очевидно, що його можна отримати безпосередньо з лагранжіану (5.2.10) шляхом заміни (некоректної) (5.2.11) та формального перепозначення аргументу  $\psi \rightarrow \underline{\psi}$ .

Нові змінні є функціоналами від старих:  $\underline{\psi}[\psi]$ ; їх явний вигляд залежить від конкретної взаємодії. Для векторної (електромагнетної) взаємодії член

$$\mathcal{Z}_v = \frac{1}{4} \int d^3x' v_v(r) \left\{ j^0(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) \right\} \left\{ j^0(\mathbf{x}') + \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') \right\}$$

є подвійним нулем завдяки закону збереження струму  $\partial_\mu J^\mu \equiv \dot{J}^0 + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , а зв'язок між старими і новими змінними такий:

$$\underline{\psi}_a = (1 - i q_a W_v) \psi_a \approx e^{-i q_a W_v} \psi_a, \quad \text{де } W_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int d^3x' v_v(r) \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')$$

В отриманому локальному гамільтоновому описі нові змінні є канонічними, тобто задовольняють співвідношення, аналогічні до (5.1.10). Для відповідних операторів можна вживати позначення  $\psi$  (замість  $\underline{\psi}$ ), і означити вакуумний (0-частинковий), 1-, 2- і 3-частинковий стани як у п. 5.1.2. Як і у випадку електродинаміки, усі ці стани є власними станами гамільтоніану (5.2.15), якщо коефіцієнтні хвильові ф-ї задовольняють відповідні хвильові рівняння. Для 2-частинкового стану отримаємо 2ЧРД (1.1.1, с.39) з потенціалом  $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = U^{(0)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + U^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , де  $U^{(0)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  – статичний потенціал із врахуванням лоренцової структури взаємодії, а  $U^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  враховує динамічні ефекти запізнення і має громіздкий вигляд. Випадки різних взаємодій розглядаються в [9, 12]. Для векторної (електромагнетної) взаємодії одержується потенціал Брайта (1.1.3) навіть при використанні калібрування Лоренца (порівн. з п. 5.1.1). Нижче подано узагальнення векторного (v) потенціалу, а також потенціали

для скалярної (s), псевдо-скалярної (p), псевдо-векторної тобто аксіальної (a) і тензорної (t) взаємодій з відповідними сталими зв'язку  $q_a, g_a, \tilde{g}_a, \tilde{q}_a$  і  $\varkappa_a$  ( $a = 1, 2$ ) для випадку довільних пропагаторів  $D(x)$  і відповідних ядер взаємодії (5.2.6).

### 5.2.3. Двоферміонні потенціали різних взаємодій

$$U_v^{(0)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = q_1 q_2 u_v(r) \{1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2\}, \quad (5.2.16)$$

$$U_v^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = U_v^{\parallel}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + U_v^{\perp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (5.2.17)$$

$$U_v^{\parallel}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2} q_1 q_2 \{u_v(r) \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + r u'_v(r) (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}_1) (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}_2)\}, \quad (5.2.18)$$

$$\begin{aligned} U_v^{\perp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = & \frac{1}{2} q_1 q_2 \{(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1)(\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2)(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2)v_v(r) \\ & - (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1)(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2)v_v(r)(\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2) \\ & - (\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2)(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2)v_v(r)(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1) \\ & + (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2)v_v(r)(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1)(\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2)\}\}, \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

$$U_s^{(0)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = g_1 g_2 u_s(r) \beta_1 \beta_2, \quad (5.2.20)$$

$$\begin{aligned} U_s^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = & -\frac{1}{2} g_1 g_2 \{v_s(r)(\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1)(\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2) \\ & + (\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1)v_s(r)(\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2) \\ & + (\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2)v_s(r)(\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1) \\ & + (\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1)(\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2)v_s(r)\} \\ = & \frac{1}{2} g_1 g_2 \beta_1 \beta_2 \{v_s(r)h_1(\mathbf{x}_1)h_2(\mathbf{x}_2) + h_1(\mathbf{x}_1)h_2(\mathbf{x}_2)v_s(r) \\ & + h_1(\mathbf{x}_1)v_s(r)h_2(\mathbf{x}_2) + h_2(\mathbf{x}_2)v_s(r)h_1(\mathbf{x}_1)\}, \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

$$U_p^{(0)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 u_p(r) \beta_1 \gamma_1^5 \beta_2 \gamma_2^5, \quad (5.2.22)$$

$$\begin{aligned} U_p^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = & \frac{1}{2} \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \gamma_1^5 \gamma_2^5 \beta_1 \beta_2 \{v_p(r)h_1(\mathbf{x}_1)h_2(\mathbf{x}_2) + h_1(\mathbf{x}_1)h_2(\mathbf{x}_2)v_p(r) \\ & + h_1(\mathbf{x}_1)v_p(r)h_2(\mathbf{x}_2) + h_2(\mathbf{x}_2)v_p(r)h_1(\mathbf{x}_1)\}, \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

$$U_{\text{a}}^{(0)}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 u_{\text{a}}(r) \gamma_1^5 \gamma_2^5 \{1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2\}, \quad (5.2.24)$$

$$\begin{aligned} U_{\text{a}}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = & \frac{1}{2} \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 \gamma_1^5 \gamma_2^5 \{u_{\text{a}}(r) \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + r u'_{\text{a}}(r) (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}_1) (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}_2) \\ & - 2i m_1 \beta_1 (\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{n}) r u_{\text{p}} + 2i m_2 \beta_2 (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{n}) r u_{\text{p}} \\ & - 4m_1 m_2 \beta_1 \beta_2 v_{\text{p}}(r) \\ & + (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1) (\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2) (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2) v_{\text{a}}(r) \\ & - (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1) (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2) v_{\text{a}}(r) (\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2) \\ & - (\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2) (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2) v_{\text{a}}(r) (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1) \\ & + (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2) v_{\text{a}}(r) (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1) (\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2)\}, \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

$$\begin{aligned} U_{\text{t}}^{(0)}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = & \frac{1}{4} \kappa_1 \kappa_2 u_{\text{t}}(r) \beta_1 \beta_2 \sigma_1^{\mu\nu} \sigma_{2\mu\nu} \\ = & \frac{1}{2} \kappa_1 \kappa_2 u_{\text{t}}(r) \beta_2 \beta_2 \{\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2\}, \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

$$\begin{aligned} U_{\text{t}}^{(1)}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = & -\frac{1}{8} \kappa_1 \kappa_2 \{(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1) (\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2) \sigma_1^{\mu\nu} \sigma_{2\mu\nu} v_{\text{t}}(r) \\ & + (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1) \sigma_1^{\mu\nu} \sigma_{2\mu\nu} v_{\text{t}}(r) (\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2) \\ & + (\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2) \sigma_1^{\mu\nu} \sigma_{2\mu\nu} v_{\text{t}}(r) (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1) \\ & + \sigma_1^{\mu\nu} \sigma_{2\mu\nu} v_{\text{t}}(r) (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1) (\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2) \\ & - im_1 [\beta_1, \sigma_1^{\mu\nu}] ((\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2) \sigma_{2\mu\nu} v_{\text{t}}(r) \\ & + \sigma_{2\mu\nu} v_{\text{t}}(r) (\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2)) \\ & - im_2 [\beta_2, \sigma_2^{\mu\nu}] ((\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1) \sigma_{1\mu\nu} v_{\text{t}}(r) \\ & + \sigma_{1\mu\nu} v_{\text{t}}(r) (\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1)) \\ & - m_1 m_2 [\beta_2, \sigma_1^{\mu\nu}] [\beta_2, \sigma_{2\mu\nu}] v_{\text{t}}(r)\}; \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

тут  $r = |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$ ,  $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$ ;  $\boldsymbol{\alpha}_a$ ,  $\beta_a$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_a$  – стандартні матриці Дірака, що діють на змінні  $a$ -ї частинки;  $h_a(\boldsymbol{x})$  означено в (5.1.15).

Замість пропагатора  $D(x)$ , довільною можна еквівалентно вважати функцію  $u(r)$  [див. р-ня (5.2.6)], що визначає статичний потенціал  $U^{(0)}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ . Тоді функцію  $v(r)$ , що входить в поправку  $U^{(1)}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ , можна визначити з рівняння (5.2.7). Така можливість є корисною у феноменологічних моделях двоферміонних систем.

### 5.3. Непертурбативне тлумачення 2ЧРД

З попередніх розділів дисертації очевидно, що двочастинкове рівняння Дірака (2ЧРД) все частіше використовують в релятивістичній задачі про зв'язані стани, з різноманітними потенціалами двоферміонної взаємодії, що виводяться з класичної [80–82, 95] та напів-квантової [9, 12, 69, 70, 79] теорії поля, або підбираються феноменологічно. Як приклади варто згадати потенціал Брайта (1.1.3) та його узагальнення (5.2.16)–(5.2.27), інші версії електромагнетного потенціалу (простіші [77–79] чи складніші [80–82]), а також різноманітні міжкваркові [83–89] та міжнуклонні [90, 91] потенціали; див. також підрозділи 1.1–1.2.

Часто використовують потенціали, що є локальними в координатному представленні – наприклад потенціал Брайта або феноменологічні потенціали сильної взаємодії [86–91]<sup>1</sup>. Навіть у цих випадках 2ЧРД довший час розглядали лише в рамках теорії збурень – квазірелятивістичних наближень і/або розкладів за константою взаємодії. Для випадку електромагнетної взаємодії тільки таке тлумачення рівняння Брайта (і то лише в 1-му наближенні) має фізичний сенс [2]. Тим більше це стосується потенціалів (5.2.16)–(5.2.27) з диференційними поправками на запізнення.

В задачах із сильним зв'язком використання теорії збурень є необґрунтованим. До 2ЧРД з різноманітними локальними потенціалами стали застосовувати непертурбативні методи, які полягають у зведенні його шляхом розділення змінних (на радіальну і спін-кутові) до системи звичайних диференційних рівнянь (так звана *радіальна редукція*) з подальшим аналітичним або чисельним інтегруванням [9, 79, 81–83, 85–91, 96].

І одразу непертурбативний розгляд 2ЧРД виявляє притаманні цьому рівнянню патологічні особливості. У багатьох фізично цікавих випадках радіально редукована система має залежні від енергії нефізичні полюси при скінченних відстанях між частинками [9, 97, 98]. Така краєва задача у строгому математичному

---

<sup>1</sup> В рівняннях квантово-польового походження, таких як рівняння Бете-Салпітера [2, 5] або квазі-потенціальни [92–94], взаємодія описується складним інтегральним оператором в імпульсному представленні; див. п. 1.1.1-2.

сенсі виявляється некоректною, або невідповідною її фізичному змістові. Це спонукало авторів у даній галузі до модифікації краєвої задачі [85], самих рівнянь [87, 88], або використання залежних від енергії потенціалів [98].

Попри значну кількість розглянутих часткових прикладів, загальний вигляд радіально зредукованого 2ЧРД, структура нефізичних патологій та шляхи їх уникнення у літературі майже не обговорювалися.

У цьому розділі здійснюється радіальна редукція 2ЧРД з загальним двоферміонним потенціалом, локальним у координатному представленні. Такий потенціал, що включає усі згадані вище приклади як часткові випадки, отримано Нікітіним та Фущичем [219] з вимоги обертової інваріантності рівняння<sup>2</sup>. З фізичних міркувань цей потенціал буде обмежено до ермітового, і явно параметризовано 48-ма дійсними скалярними функціями відстані між частинками.

Радіальна редукція 2ЧРД з таким потенціалом буде здійснена за відомою схемою [9, 79] (див. також [81–83, 85, 87, 89–91]), яка приводить до 2-х незв'язаних систем з 8-ми диференційних рівнянь 1-го порядку кожна. Подальша низка перетворень – спочатку до системи 4-х диференційних рівнянь 1-го порядку, а потім – до пари рівнянь 2-го порядку – дозволяє явно прослідкувати появу нефізичних сингулярностей, і звести задачу до зручного для аналізу вигляду.

Таким шляхом буде знайдено клас потенціалів, для яких одержана система рівнянь не є патологічна, а серед них – точно розв'язувані випадки, що є узагальненнями відомих у літературі діраківських осциляторів [108, 110, 292].

Для решти випадків пропонується псевдопертурбативний метод розв'язування 2ЧРД із застосуванням розкладів за  $1/j$  (де  $j$  – квантове число повного моменту імпульсу системи), який є застосовний до випадку сильного зв'язку і нечутливий до існування особливих точок краєвої задачі. Метод узагальнює техніку розкладів за  $1/N$  [383–385] або  $1/\ell$  [386, 387] на випадок двох зв'язаних рівнянь із нелінійною залежністю від спектрального параметру.

Результати точного та псевдопертурбативного аналізу 2ЧРД застосовуються до опису спектрів легких мезонів. Спочатку буде здійснена точно розв'язувана модель

---

<sup>2</sup>Обертова інваріантність є залишковою симетрією після переходу у систему відліку центра мас.

із потенціалом, що є суперпозицією лінійного та кулонівського членів із складною спіновою структурою. Далі методом  $1/j$  розглядається кілька моделей із різними лінійними потенціалами скалярного типу і кулонівськими – векторного типу. Отримані точні та наближені спектри аналізуються і порівнюються із реальними спектрами легких мезонів.

### 5.3.1. Загальна структура потенціалу

В системі відліку центра інерції 2ЧРД (1.1.1) має вигляд:

$$\{h_1(\mathbf{p}) + h_2(-\mathbf{p}) + U(\mathbf{r}) - E\} \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.3.1)$$

де  $\Phi(\mathbf{r})$  є 16-компонентною хвильовою функцією (діраківським  $4 \times 4$ -біспінором), залежним від відносного радіус-вектора  $\mathbf{r}$ , діраківські гамільтоніани вільних частинок  $h_a(\mathbf{p})$  з масами  $m_a$  (де  $a = 1, 2$  і  $\mathbf{p} = -i\nabla$ ) означені в р-ні (1.1.2), а  $U(\mathbf{r})$  – локальний потенціал взаємодії. Якщо скористатися  $4 \times 4$ -матричним представленням для  $\Phi(\mathbf{r})$ , то оператори  $\alpha_a$  та  $\beta_a$  діють так:  $\alpha_1 \Phi = \alpha \Phi$ ,  $\alpha_2 \Phi = \Phi \alpha^T$  і т.д., де  $\alpha$  та  $\beta$  – матриці Дірака.

Потенціал  $U(\mathbf{r})$  є мультиплікативним оператором в координатному представленні, інваріантним щодо просторових поворотів та інверсій. В [219] подано найбільш загальний вигляд такого потенціалу:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{A=1}^{48} U_A(r) \Gamma_A. \quad (5.3.2)$$

Він параметризується 48-ма довільними (взагалі кажучи, комплексними) функціями  $U_A(r)$  відстані між частинками  $r = |\mathbf{r}|$  (будемо називати їх парціальними потенціалами), а матриці  $\Gamma_A$  будуються в термінах матриць Дірака та одиничного вектора  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ .

Далі вимагатимемо, щоб потенціал  $U$  був ермітовим у скалярному добутку

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int d^3r \operatorname{Tr}(\Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r})), \quad (5.3.3)$$

а, отже, рівняння (5.3.1) – гамільтоновим. Вимога ермітовості зменшує довільність потенціалу (5.3.2) до 48-ми дійсних довільних парціальних потенціалів.

Нижче запропоновано ермітів базис для матриць  $\Gamma$ , що входять у загальний потенціал. Скористаємося для матриць Дірака співвідношенням  $\alpha = \gamma^5 \sigma$ , де компоненти  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) вектора  $\sigma$  можна розуміти або як  $2 \times 2$ -матриці Паулі, або як блок-діагональні  $4 \times 4$ -матриці  $\text{diag}(\sigma_i, \sigma_i)$  (що не повинно привести до непорозумінь). Цим самим  $\alpha$  розділено на два множники, один з яких діє на “частинково-античастинкові” ступені вільності, а інший – на власне спінові ступені вільності. Назовемо ці множники *діраківським* та *спіновим* відповідно. Подібно можна вчинити і з іншими матрицями Дірака чи їх добутками. Тепер враховуючи, що при поворотах та інверсіях  $\beta$  веде себе як скаляр,  $\gamma^5$  – як псевдо-скаляр,  $\mathbf{n}$  – як вектор,  $\sigma$  – як псевдо-вектор, зручно побудувати шуканий базис у вигляді добутку діраківського та спінового множників:

$$\Gamma_{ee} = \{I, \beta_1, \beta_2, \beta_1\beta_2\} \times S, \quad \Gamma_{oo} = \gamma_1^5 \gamma_2^5 \times \Gamma_{ee}, \quad (5.3.4)$$

$$\Gamma_{eo} = \{I, \beta_1, i\beta_2, i\beta_1\beta_2\} \times \gamma_2^5 \times T, \quad \Gamma_{oe} : 1 \leftrightarrow 2, \quad (5.3.5)$$

де  $I$  – одиничний оператор,

$$S = \{S_{(i)}, i = 1, 2, 3\} \equiv \{I, \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2, (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n})\} \quad (5.3.6)$$

– множина скалярних, а

$$T = \{T_{(i)}, i = 1, 2, 3\} \equiv \{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}, (\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2)\} \quad (5.3.7)$$

– псевдоскалярних спінових множників. Матриці  $\Gamma$  в (5.3.4)–(5.3.5) згруповано, згідно з класифікацією Храпливого [187], у парно-парні оператори  $\Gamma_{ee}$ , непарно-непарні  $\Gamma_{oo}$ , парно-непарні  $\Gamma_{eo}$  та непарно-парні  $\Gamma_{oe}$ . Усі інші  $O(3)$ -інваріантні ермітові матриці, побудовані у термінах матриць Дірака та вектору  $\mathbf{n}$ , виражаються через (5.3.4)–(5.3.5). Відповідно, і в потенціалі (5.3.2) можна виділити 4 доданки  $U_{ee}$ ,  $U_{oo}$ ,  $U_{eo}$  та  $U_{oe}$ .

Зручно перейти від матричного до блок-векторного представлення хвильової функції, розгорнувши у вектор її “частинково-античастинкові” ступені вільно-

сті:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \Phi_{++}(\mathbf{r}) & \Phi_{+-}(\mathbf{r}) \\ \Phi_{-+}(\mathbf{r}) & \Phi_{--}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad \dashrightarrow \quad \begin{bmatrix} \Phi_{++}(\mathbf{r}) \\ \Phi_{+-}(\mathbf{r}) \\ \Phi_{-+}(\mathbf{r}) \\ \Phi_{--}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}; \quad (5.3.8)$$

тут  $\Phi_{++}(\mathbf{r})$  –  $2 \times 2$ -спінорна матриця, що є велико-великою компонентою хвильової функції (згідно з термінологією Храпливого [187]), а  $\Phi_{+-}(\mathbf{r})$ ,  $\Phi_{-+}(\mathbf{r})$  і  $\Phi_{--}(\mathbf{r})$  – відповідно велико-мала, мало-велика і мало-мала компоненти  $\Phi(\mathbf{r})$ .

У цьому представленні структуру загального потенціалу (5.3.2) можна описати компактніше, зібралиши 48 парціальних потенціалів  $U_A(r)$  у меншу кількість матричних діраківських мультиплетів – парно-парних, парно-непарних і т. д. Кожен такий мультиплет містить парціальні потенціали, що мають спільний спіновий множник:

$$U = U_{ee} + U_{oo} + U_{eo} + U_{oe} = \sum_{i=1}^3 \left( \Delta^{(i)} S_{(i)} + \Omega^{(i)} T_{(i)} \right), \quad (5.3.9)$$

де (упускаючи індекс  $i$ )  $\Delta = \Delta_{ee} + \Delta_{oo}$ ,  $\Omega = \Omega_{ee} + \Omega_{oo}$ ,

$$\Delta_{ee} = \begin{bmatrix} U_{11} & & 0 \\ & U_{22} & \\ 0 & & U_{33} \\ & & U_{44} \end{bmatrix}, \quad \Delta_{oo} = \begin{bmatrix} 0 & & \gamma_{14} \\ & \gamma_{23} & \\ \gamma_{23}^* & & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3.10)$$

$$\Omega_{eo} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{12}^* & 0 & \\ 0 & & \gamma_{34} \end{bmatrix}, \quad \Omega_{oe} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{13} & 0 \\ & 0 & \gamma_{24} \\ \gamma_{13}^* & 0 & \\ 0 & \gamma_{24}^* & 0 \end{bmatrix}; \quad (5.3.11)$$

тут матричні елементи  $U_{\alpha\beta}$  є дійсними, а  $\gamma_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} + i Y_{\alpha\beta}$  – комплексними функціями від  $r$  (зірочка “\*” позначає комплексне спряження), і мається на увазі, що кожен елемент множиться на одиничний спіновий оператор  $I$ . З огляду на структуру діраківських множників потенціали  $U_{ee}$  і  $U_{oo}$  (та іх суперпозиції) будемо називати *власними*, а  $U_{eo}$  і  $U_{oe}$  – *невласними*.

Щоб переконатися в еквівалентності представлень (5.3.2) і (5.3.9) потенціалу  $U$  зауважимо, що діраківські множники  $\Delta = \Delta_{ee} + \Delta_{oo}$  і  $\Omega = \Omega_{eo} + \Omega_{oe}$

повинні бути ермітовими матрицями, причому власний множник  $\Delta$  – скаляром, а невласний  $\Omega$  – псевдоскаляром щодо просторової інверсії. Дія перетворення інверсії на діраківські множники  $\Delta$  і  $\Omega$  визначається оператором  $\beta_1\beta_2$ , який у даному представленні має вигляд:

$$\beta_1\beta_2 = \text{diag}(\mathbf{I}, -\mathbf{I}, -\mathbf{I}, -\mathbf{I}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & 0 \\ & -\mathbf{I} & & \\ & & -\mathbf{I} & \\ 0 & & & \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad (5.3.12)$$

тут  $\mathbf{I}$  – одинична  $2\times 2$  матриця. Легко переконатися, що  $\beta_1\beta_2\Delta\beta_1\beta_2 = \Delta$ ,  $\beta_1\beta_2\Omega\beta_1\beta_2 = -\Omega$ . Оскільки сума  $\Delta + \Omega$  є ермітовою  $4\times 4$ -матрицею загально-го вигляду, то  $\Delta$  є найзагальнішою ермітовою  $4\times 4$ -матрицею скалярного типу, а  $\Omega$  – псевдо-скалярного типу. Кожна з матриць (5.3.10)–(5.3.11) містить по 4 дійсних або 2 комплексних довільних функцій  $r$ , і таких квадруплетів у виразі (5.3.9) міститься  $4 \times 3 = 12$ , що еквівалентно наявності 48-ми парціальних потенціалів у (5.3.2).

Розглянемо нерелятивістичне наближення 2ЧРД (5.3.1) з загальним потенціалом (5.3.2), застосувавши перетворення Фолді-Вайтгаузена-Храпливого [187]. У результаті отримаємо гамільтоніан:  $H_{\text{nr}} = \sum_{a=1}^2 \beta_a (m_a + \mathbf{p}^2/2m_a) + U_{ee}$ , який після проєктування на додатньо-енергетичні стани приводить до рівняння Шредінгера з потенціалом

$$\begin{aligned} U_{\text{nr}}(\mathbf{r}) &= U_{11}^{(i)}(r)S_{(i)} \\ &= U_{11}^{(1)}(r) + U_{11}^{(2)}(r)\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + U_{11}^{(3)}(r)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Таким чином, із 48-ми парціальних потенціалів, що містяться у виразах (5.3.9)–(5.3.11), у нерелятивістичній границі виживає лише три.

Найцікавішими з фізичного погляду є потенціали, що допускають теоретико-польову інтерпретація взаємодії. Зокрема, потенціали, що відображають векторну структуру взаємодії, використовуються в задачах електродинаміки, скалярна структура з'являється в потенціальних моделях гадронів і т.д.

### 5.3.2. Радіальна редукція 2ЧРД

Здійснимо радіальну редукцію 2ЧРД, подібно до робіт [9, 79]. Оберім  $\Phi(\mathbf{r})$  власною функцією квадрату  $\mathbf{j}^2$  і компоненти  $j_3$  повного моменту імпульсу системи  $\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \mathbf{s} = -i\mathbf{r} \times \nabla + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$  та парності  $P$ , і представимо її у блок-векторному вигляді:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} i\phi_1(r)\mathcal{Y}^A(\mathbf{n}) + i\phi_2(r)\mathcal{Y}^0(\mathbf{n}) \\ \phi_3(r)\mathcal{Y}^-(\mathbf{n}) + \phi_4(r)\mathcal{Y}^+(\mathbf{n}) \\ \phi_5(r)\mathcal{Y}^-(\mathbf{n}) + \phi_6(r)\mathcal{Y}^+(\mathbf{n}) \\ i\phi_7(r)\mathcal{Y}^A(\mathbf{n}) + i\phi_8(r)\mathcal{Y}^0(\mathbf{n}) \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^{j\pm 1}, \quad (5.3.14)$$

$$(\mathcal{Y}^A, \mathcal{Y}^0) \leftrightarrow (\mathcal{Y}^-, \mathcal{Y}^+) \quad \text{для } P = (-)^j. \quad (5.3.15)$$

Тут  $\mathcal{Y}^A(\mathbf{n})$  є скороченим позначенням  $2 \times 2$ -матричної біспінорної гармоніки  $\mathcal{Y}_{\ell s j}^\mu(\mathbf{n})$  (у звичних позначеннях [25, 29, 388]), що відповідають повному спінові  $s = 0$  та орбітальному моменту  $\ell = j$ ; а  $\mathcal{Y}^0(\mathbf{n})$ ,  $\mathcal{Y}^-(\mathbf{n})$ ,  $\mathcal{Y}^+(\mathbf{n})$  відповідають триплетові з  $s = 1$  та  $\ell = j, j+1, j-1$ . Явний вигляд та властивості біспінорних гармонік подано в додатку А. Тоді для  $j > 0$  задача на власні стани (5.3.1) зводиться до системи 8-ми диференційних р-нь 1-го порядку із шуканими ф-ями  $\phi_1(r) \dots \phi_8(r)$  та власним значенням енергії  $E$ .

Представимо цю систему у матричному вигляді, означивши 8-вимірну вектор-функцію  $\Phi(r) = \{\phi_1(r), \dots, \phi_8(r)\}$ :

$$\left\{ \mathbf{H}(j) \frac{d}{dr} + \mathbf{V}(r, E, j) \right\} \Phi(r) = 0. \quad (5.3.16)$$

Тут  $8 \times 8$ -матриці  $\mathbf{H}(j)$  та

$$\mathbf{V}(r, E, j) = \mathbf{G}(j)/r + \mathbf{m} + \mathbf{U}(r, j) - E\mathbf{I} \quad (5.3.17)$$

мають властивості:  $\mathbf{H}$  – дійсна,  $\mathbf{H}^T = -\mathbf{H}$ ;  $\mathbf{V}^\dagger = \mathbf{V}$ ;  $\mathbf{I}$  – одинична  $8 \times 8$ -матриця; діагональна матриця  $\mathbf{m} = \text{diag}(m_+\mathbf{I}, m_-\mathbf{I}, -m_-\mathbf{I}, -m_+\mathbf{I})$ , де  $m_\pm = m_1 \pm m_2$  (а  $\mathbf{I}$  – одинична  $2 \times 2$ -матриця), та  $j$ - і  $P$ -залежні матриці  $\mathbf{H}(j)$ ,  $\mathbf{G}(j)$  є сталими (тобто незалежними від  $r$ ), а  $\mathbf{U}(r, j)$  представляє потенціал (5.3.2). Оператор у лівій частині р-ня (5.3.16) є ермітовим щодо скалярного добутку, індукованого

добутком (5.3.3):

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_0^\infty dr \ (\Psi^\dagger(r) \Phi(r)). \quad (5.3.18)$$

У випадку  $j = 0$  компоненти  $\phi_2 = \phi_4 = \phi_6 = \phi_8 = 0$  так що вимірність задачі (5.3.16) зменшується з 8 до 4.

Усі згадані вище матриці зручно подати у блок-матричному вигляді. Для цього біспінорні гармоніки об'єднаємо у два дублети з різними парностями:

$$\hat{o} = \begin{bmatrix} \phi^A \\ \phi^0 \end{bmatrix}, \quad \hat{e} = \begin{bmatrix} \phi^- \\ \phi^+ \end{bmatrix}, \quad (5.3.19)$$

так що компоненти хвильової функції (5.3.14)-(5.3.15) також об'єднаються у дублети:  $[\phi_1, \phi_2], \dots, [\phi_7, \phi_8]$ . Тепер, враховуючи властивості біспінорних гармонік [9, 79] та їх дублетів у додатку А і означивши величини:

$$A = \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}, \quad B = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}, \quad C = \sqrt{j(j+1)}, \quad (5.3.20)$$

та  $2 \times 2$ -матриці:

$$\sigma_\uparrow = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \sigma_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_\downarrow = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \sigma_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.3.21)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \quad (R \in O(2)), \quad (5.3.22)$$

отримаємо у цих термінах:

$$\mathbf{G} = - \begin{bmatrix} 0 & R(j+\sigma_\uparrow) & R^T(j\sigma_3+\sigma_\uparrow) & 0 \\ (j+\sigma_\uparrow)R^T & 0 & 0 & (j\sigma_3+\sigma_\uparrow)R \\ (j\sigma_3+\sigma_\uparrow)R & 0 & 0 & (j+\sigma_\uparrow)R^T \\ 0 & R^T(j\sigma_3+\sigma_\uparrow) & R(j+\sigma_\uparrow) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.23)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -R\sigma_3 & -R^T & 0 \\ \sigma_3R^T & 0 & 0 & R \\ R & 0 & 0 & \sigma_3R^T \\ 0 & -R^T & -R\sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^{j\pm 1} \quad (5.3.24)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & (j+\sigma_\uparrow)R^T & (j\sigma_3+\sigma_\uparrow)R & 0 \\ R(j+\sigma_\uparrow)\sigma_3 & 0 & 0 & R^T(j\sigma_3+\sigma_\uparrow) \\ R^T(j\sigma_3+\sigma_\uparrow) & 0 & 0 & R(j+\sigma_\uparrow) \\ 0 & (j\sigma_3+\sigma_\uparrow)R & (j+\sigma_\uparrow)R^T & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.25)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_3 R^T & -R & 0 \\ R\sigma_3 & 0 & 0 & R^T \\ R^T & 0 & 0 & R\sigma_3 \\ 0 & -R & -\sigma_3 R^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^j. \quad (5.3.26)$$

Щоб описати потенціал взаємодії (5.3.9)-(5.3.11) у матричному представленні, залишається обчислити дію спінових операторів на біспінорні дублети. Отримаємо:

$$\mathbf{S} = \text{giag}(S, \Sigma, \Sigma, S), \quad \mathbf{T} = \text{giag}(T, -T^\dagger, -T^\dagger, T) \quad \text{для } P = (-)^{j\pm 1}, \quad (5.3.27)$$

$$\mathbf{S} = \text{giag}(\Sigma, S, S, \Sigma), \quad \mathbf{T} = \text{giag}(T^\dagger, -T, -T, T^\dagger) \quad \text{для } P = (-)^j, \quad (5.3.28)$$

з такими  $2 \times 2$ -матричними блоками  $S, \Sigma, T$ :

$i$	1	2	3
$S_{(i)}$	$I$	$\sigma_1 \cdot \sigma_2$	$(\sigma_1 \cdot n)(\sigma_2 \cdot n)$
$\Sigma_{(i)}$	$I$	$\tau$	$-\sigma_3$
$\Sigma_{(i)}$	$I$	$I$	$-R\sigma_3 R^T$

$i$	1	2	3
$T_{(i)}$	$\sigma_1 \cdot n$	$\sigma_2 \cdot n$	$(n, \sigma_1, \sigma_2)$
$T_{(i)}$	$R$	$-R\sigma_3$	$-2iR\sigma_\uparrow$

У випадку  $j = 0$  в усіх  $2 \times 2$ -блоках, що входять в матриці системи (5.3.16), слід залишити лише лівий верхній елемент, поклавши у ньому  $j = 0$ .

### 5.3.3. Редукція радіальної системи до р-нь 2-го порядку

Виявляється, що  $\text{rank } \mathbf{H} = 4$  (2 у випадку  $j = 0$ ), тобто лише 4 з 8-ми рівнянь (5.3.16) (2 з 4-х) є диференційними, решта - алгебричні співвідношення. Їх можна розділити з допомогою ортогонального перетворення (з групи  $O(8)$ ):

$$\bar{\Phi} = \mathbf{O}\Phi, \quad \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{O}\mathbf{H}\mathbf{O}^T \quad \text{i т.д.,} \quad \text{де } \mathbf{O} = \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_1, \quad (5.3.30)$$

$$\mathbf{O}_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \sigma_3 R^T & -R^T \\ 0 & -\sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -I \\ 0 & -I & I & 0 \\ 0 & I & I & 0 \\ I & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^{j\pm 1},$$

$$\mathbf{O}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_3 R^T & 0 \\ 0 & I \\ 0 & -\sigma_3 & -R^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & I & -I & 0 \\ I & 0 & 0 & -I \\ -I & 0 & 0 & -I \\ 0 & I & I & 0 \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^j,$$

що зберігає скалярний добуток (5.3.18) і явно виділяє нетривіальний мінор матриці  $\mathbf{H}$ , а саме зводить  $\mathbf{H}$  до незалежного від  $P$  канонічного вигляду:

$$\bar{\mathbf{H}} = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3.31)$$

де  $\mathbf{J}$  – симплектична (невироджена)  $4 \times 4$ -матриця. Інші члени рівнянь (5.3.16)–(5.3.17) набувають форми:

$$\bar{\mathbf{G}} = 2 \begin{bmatrix} 0 & \sigma_\uparrow C\sigma_1 & 0 & 0 \\ \sigma_\uparrow & 0 & 0 & 0 \\ C\sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} 0 & m_\pm \\ -m_\mp & 0 \\ -m_\mp & 0 \\ m_\pm & 0 \end{bmatrix} \quad \text{для } P = \mp(-)^j, \quad (5.3.32)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} U_{11} & \Upsilon_{12} & \Upsilon_{13} & \Upsilon_{14} \\ * & U_{22} & \Upsilon_{23} & \Upsilon_{24} \\ * & * & U_{33} & \Upsilon_{34} \\ * & * & * & U_{44} \end{bmatrix}; \quad (5.3.33)$$

де  $U_{\alpha\beta}$  – дійсні, а  $\Upsilon_{\alpha\beta}$  – комплексні діагональні  $2 \times 2$ -блоки (лінійно пов’язані з вихідними парціальними потенціалами  $U_{\alpha\beta}$ ,  $\Upsilon_{\alpha\beta}$  в (5.3.9)–(5.3.11)), взагалі кажучи різні для різних парностей. Загальна кількість дійсних парціальних потенціалів – 32 для  $P = (-)^{j\pm 1}$  і 32 для  $P = (-)^j$ , однак серед них лише 48 є незалежними.

Представимо 8-вимірні вектори та матриці в термінах 4-вимірних блоків:

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_{11} & \bar{\mathbf{V}}_{12} \\ \bar{\mathbf{V}}_{21} & \bar{\mathbf{V}}_{22} \end{bmatrix} \quad (5.3.34)$$

і (5.3.31) для  $\mathbf{H}$ . В цих термінах система (5.3.16) розчеплюється на диференційну та алгебричну підсистеми:

$$2\mathbf{J}\bar{\Phi}'_1 + \bar{\mathbf{V}}_{11}\bar{\Phi}_1 + \bar{\mathbf{V}}_{12}\bar{\Phi}_2 = 0, \quad (5.3.35)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{21}\bar{\Phi}_1 + \bar{\mathbf{V}}_{22}\bar{\Phi}_2 = 0. \quad (5.3.36)$$

Виключивши  $\bar{\Phi}_2$  з (5.3.35) з допомогою (5.3.36), отримаємо систему диференційних рівнянь для 4-вектора  $\bar{\Phi}_1$ :

$$\left\{ \mathbf{J} \frac{d}{dr} + \mathbf{V}^\perp(r, E, j) \right\} \bar{\Phi}_1(r) = 0, \quad (5.3.37)$$

а для 4-вектора  $\bar{\Phi}_2$  маємо алгебричний вираз  $\bar{\Phi}_2 = -\Lambda \bar{\mathbf{V}}_{21} \bar{\Phi}_1$ ; тут

$$\Lambda = [\bar{\mathbf{V}}_{22}]^{-1}, \quad \mathbf{V}^\perp = (\bar{\mathbf{V}}_{11} - \bar{\mathbf{V}}_{12} \Lambda \bar{\mathbf{V}}_{21})/2. \quad (5.3.38)$$

Тепер представляємо 4-вектор  $\bar{\Phi}_1$  у 2+2-блочному вигляді:

$$\bar{\Phi}_1(r) = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^\perp = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.3.39)$$

вилючаємо  $\Phi_2$  і приходимо до системи диференційних рівнянь 2-го порядку для 2-вектора  $\Phi_1$ :

$$\mathcal{L}(E)\Phi_1 = \left\{ \left( \frac{d}{dr} + V_{12} \right) [V_{22}]^{-1} \left( \frac{d}{dr} - V_{21} \right) + V_{11} \right\} \Phi_1 = 0. \quad (5.3.40)$$

З означення матриці  $\mathbf{V}^\perp$  (5.3.39), (5.3.38) та вигляду її складових (5.3.32)–(5.3.34) і виразу для  $\bar{\mathbf{V}}$ , аналогічного до (5.3.17), випливає, що її блок  $V_{22}$  є діагональним. Тому можна зробити перетворення

$$\Psi = \Phi_1 / \sqrt{V_{22}}, \quad \bar{\mathcal{L}}(E) = \sqrt{V_{22}} \mathcal{L}(E) \sqrt{V_{22}}, \quad (5.3.41)$$

(де квадратний корінь з матриці обчислюється по-елементно), що зводить систему (5.3.40) до нормального вигляду:

$$\bar{\mathcal{L}}(E)\Psi \equiv \left\{ \left( \frac{d}{dr} + F \right) \left( \frac{d}{dr} - F^\dagger \right) + Z \right\} \Psi = 0, \quad (5.3.42)$$

$$\text{де } F = \sqrt{V_{22}} V_{12} / \sqrt{V_{22}} \quad (5.3.43)$$

$$\text{та } Z = \sqrt{V_{22}} V_{11} \sqrt{V_{22}} + \frac{1}{2} \left( F \frac{V'_{22}}{V_{22}} + \frac{V'_{22}}{V_{22}} F^\dagger \right) + \frac{1}{2} \frac{V''_{22}}{V_{22}} - \frac{3}{4} \left( \frac{V'_{22}}{V_{22}} \right)^2.$$

Введемо для матриці  $F$  її антиермітову  $A$  та ермітову  $B$  частини:

$$A = \frac{1}{2}(F - F^\dagger) = -A^\dagger, \quad B = \frac{1}{2}(F + F^\dagger) = B^\dagger. \quad (5.3.44)$$

Якщо  $F$  ермітова, тобто  $B = F$ , то в операторі  $\bar{\mathcal{L}}(E)$  відсутній член з похідною 1-го порядку, і р-ня (5.3.42) має матрично-двоочленну форму:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - W \right\} \Psi = 0, \quad \text{де } W = F^2 + F' - Z, \quad (5.3.45)$$

корисну для пошуку точних і наближених розв'язків.

Якщо ж  $F$  неермітова, то можна здійснити перетворення:

$$\tilde{\Psi} = C^{-1}\Psi, \quad \tilde{L} = C^{-1}\bar{L}_1C, \quad (5.3.46)$$

де матриця  $C$  задовольняє рівняння  $C' = -AC$  з формальним розв'язком:

$$C = T \exp \left( - \int dr A \right). \quad (5.3.47)$$

З антиермітовості  $A$  випливає унітарність  $C$ , а оператор

$$\tilde{L}(E) = \frac{d^2}{dr^2} - \tilde{W}, \quad \text{де} \quad \tilde{W} = C^\dagger (B^2 + B' + [A, B] - Z) C \quad (5.3.48)$$

набуває матрично-двочленного вигляду, як і відповідне рівняння. Зауважимо, що не в усіх випадках Т-експоненту в р-ні (5.3.47) можна обчислити явно.

Якщо замість  $\Phi_2$  із системи (5.3.37) виключити  $\Phi_1$ , прийдемо до системи для 2-вектора  $\Phi_2$ , яка відрізняється від (5.3.40) заміною індексів  $1 \leftrightarrow 2$ . Але оскільки блок  $V_{11}$ , взагалі кажучи, не є діагональним (на відміну від  $V_{22}$ ), то система для  $\Phi_2$  виявляється складнішою, ніж (5.3.40). Вона, однак, теж може бути корисною в застосуваннях.

## 5.4. Непертурбативний аналіз рівняння Брайта

Елементи матриці  $V_{22}$  (5.3.41), (5.3.40), в редукованому радіальному 2ЧРД рівнянні (5.3.39), (5.3.44), (5.3.42) можуть містити нефізичні полюси, що значно ускладнюють аналіз цих рівнянь.

Типовим прикладом 2ЧРД є рівняння Брайта (1.1.1), радіальну редукцію якого було раніше здійснено в [81, 82]. Виявилося, що сингулярності, які виникають у цьому випадку, роблять стандартну задачу на власні значення математично некоректною. З фізичного погляду непертурбативний аналіз рівняння Брайта також вважається непослідовним [2], оскільки описує як фізичні, так і нефізичні стани системи.

Із цими застереженнями на увазі розглянемо особливості радіальнно зредукованого р-ня Брайта. Для простоти розглядатимемо випадок  $j = 0$ , коли стани з

$(j=0, P=-1) \equiv 0^-$  можна асоціювати з нерелятивістичними синг'летними станами  ${}^1S_0$ , а  $(j=0, P=+1) \equiv 0^+$  – з триплетними  ${}^3P_0$ . У кожному з випадків  $P = \mp 1$  хвильова функція (5.3.14) містить лише 4 (а не 8) радіальні компоненти  $\phi_1(r)$ ,  $\phi_3(r)$ ,  $\phi_5(r)$ ,  $\phi_7(r)$ , а редукована система 1-го порядку (5.3.37) – дві компоненти  $\bar{\phi}_1(r)$ ,  $\bar{\phi}_3(r)$ . Вона має вигляд:

$$\frac{d}{dr} \bar{\phi}_1(r) = \frac{1}{r} \bar{\phi}_1(r) + \frac{1}{2} \left[ E + \frac{\alpha}{r} - \frac{m_{\pm}^2}{E + \alpha/r} \right] \bar{\phi}_3(r) \quad (5.4.1)$$

$$-\frac{d}{dr} \bar{\phi}_3(r) = \frac{1}{r} \bar{\phi}_3(r) + \frac{1}{2} \left[ E + 3\frac{\alpha}{r} - \frac{m_{\pm}^2}{E - \alpha/r} \right] \bar{\phi}_1(r), \quad P = \mp 1. \quad (5.4.2)$$

Очевидно, що окрім природнього полюса  $r = 0$ , п.ч. р-ня (5.4.2) містить залежний від енергії полюс  $r = \alpha/E$ , який фізично не обумовлений, і робить краєву задачу (з умовами в точках  $r = 0, \infty$ ) некоректною.

У випадку рівних мас  $m_1 = m_2 \equiv m$  для станів  $0^+ \sim {}^3P_0$  синг'уларність в рівняннях (5.4.1)-(5.4.2) пропадає. Отже краєва задача є добре означена, і її можна розв'язати числово. Фізично цей випадок відповідає ортопозитронію. Хоча точно-го аналітичного розв'язку системи (5.4.1)-(5.4.2) не знайдено, можна показати, що в околі  $r \rightarrow 0$  компоненти хвильової функції мають асимптотику  $\phi_i(r) \sim r^\gamma$ , де  $\gamma = \sqrt{1 - 3\alpha^2/4}$ . Отже необхідною умовою нормовності хвильової функції є обмеження константи взаємодії  $\alpha < \alpha_c = 2/\sqrt{3} = 1.154700538379252$ , подібно до випадку 1ЧРД з кулонівським потенціалом, де критична константа взаємодії  $\alpha_c = 1$ , а також часоасиметричної моделі, де для електромагнетної взаємодії  $\alpha_c = 1/2$ ; див. (2.3.15), (2.3.23, с.133).

Вимога обмеженості компонент  $\phi_i(r)$  при  $r \rightarrow \infty$  веде до дискретного спектру, кілька нижніх рівнів якого отримано для різних значень  $\alpha < \alpha_c$  числовим інтегруванням системи (5.4.1)-(5.4.2) методом Рунге-Кутта.

Цікаво ці результати порівняти з пертурбативними обчисленнями спектру. Як зазначено в п. 1.1.1, пертурбативне тлумачення р-ня Брайта також не цілком коректне: воно полягає у наближеному зведенні рівняння до форми Паулі-Шредінгера із квазірелятивістичними поправками, серед яких виникає такий не-

фізичний член  $\propto (\alpha/r)^2$  [187–189]:

$$H_{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{4m_+r^2}(3 - 2\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \sigma_{1r}\sigma_{2r}). \quad (5.4.3)$$

Він не виникає при більш послідовному квантово-польовому тлумаченні рівняння Брайта [194]. Натомість для електрон-позитронної (чи ферміон-антиферміонної) системи КЕД привносить додатковий анігіляційний член:

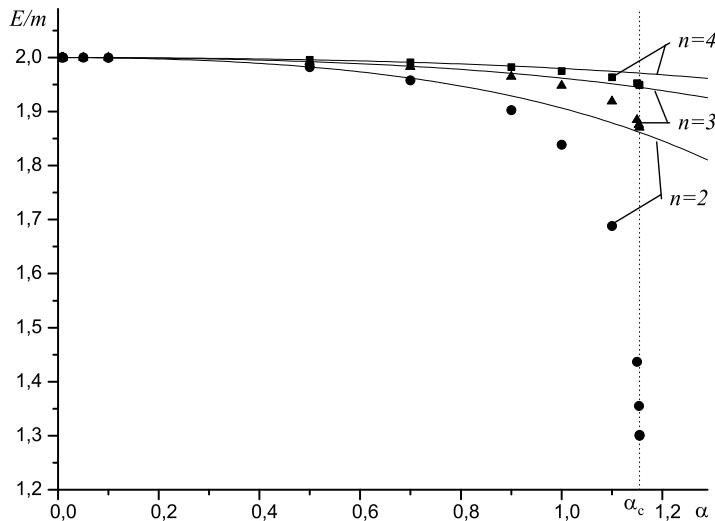
$$H_{\text{an}} = 2\pi\mu_0(3 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)\delta(\mathbf{r}) \quad (5.4.4)$$

( $\mu_0$  – магнетон Бора), що дає внесок зокрема у спектр парапозитронію  ${}^1S_0$ .

Цікаво, що для станів отропозитронію  ${}^3P_0$  середні від операторів (5.4.3) і (5.4.4) занулюються. Тому рівняння Брайта (1.1.1) не потребує для цього випадку квантово-польової корекції, і дає правильний пертурбативний спектр ортопозитронію з точністю до  $\alpha^4$ :

$$\frac{E}{m} = 2 - \frac{\alpha^2}{4n^2} + \alpha^4 \left\{ \frac{11}{64n^4} - \frac{1}{3n^3} \right\}, \quad (5.4.5)$$

де  $n = 2, 3, \dots$  – головне квантове число.



$n = 2$	Пертурбативні [п-ня (5.4.5)]	Числові [п-ня (5.4.1)–(5.4.2)]
1/137	1.999 996 669 9532	1.999 996 669 9532
0.01	1.999 993 749 6908	1.999 993 749 6908
0.05	1.999 843 556 7220	1.999 843 5564
0.1	1.999 371 907 5521	1.999 371 886
0.5	1.982 442 220 0521	1.982 028 02
0.7	1.961 950 032 5521	1.957 997 74
0.9	1.929 085 449 2188	1.902 4531
1.0	1.906 575 520 8333	1.838 781 05
1.1	1.879 098 470 0521	1.688 2317
1.15	1.863 256 642 6595	1.436 9434
1.154	1.861 924 191 0995	1.355 170 76
1.1547	1.861 689 995 0549	1.301 3199
$2/\sqrt{3}$	1.861 689 814 8148	1.299 74

Рис. 5.1. Значення  $E/m$  станів  $n = 2, n0^+(n^3P_0)$  для  $n = 2, 3, 4$  ( $m_1 = m_2 \equiv m$ ).

На рис. 5.1 значки  $\bullet$ ,  $\blacktriangle$ ,  $\blacksquare$  представляють числовий спектр для  $n = 2, 3, 4$  відповідно, а суцільні лінії – пертурбативні результати (5.4.5) в залежності від

константи взаємодії  $\alpha$ . Для  $\alpha = 1/137$  числові та пертурбативні результати узгоджуються з точністю не гірше як 14 знаків. Однак при прямуванні  $\alpha$  до критичного значення  $\alpha_c = 2/\sqrt{3}$  числові значення енергії різко падають, що свідчить про неаналітичну залежність  $E(\alpha)$  в околі  $\alpha_c$ .

Отримані результати можна застосувати в атомній і ядерній фізиці, наприклад для опису зв'язаних станів багатозарядних іонів.

## 5.5. Точно розв'язні моделі

Як було показано вище, будова матриці  $V_{22}$  (5.3.41), (5.3.40), що входить в рівняння (5.3.39), (5.3.44), (5.3.42) і (5.3.45), є джерелом нефізичних синг'улярностей, що значно ускладнюють аналіз цих рівнянь. Синг'улярності можуть зробити краєву задачу (з умовами в точках  $r = 0, \infty$ ) некоректною. В цьому підрозділі будемо підбирати довільні потенціали так, щоб 1) нефізичні полюси не виникали, і 2) рівняння було точно розв'язне.

Спочатку зауважимо, що у вільночастинковому випадку матриця  $V_{22}$  є сталою (незалежною від  $r$ ). Будемо вимагати, щоб  $V_{22}$  була такою і в присутності взаємодії. Достатніми умовами для цього є рівності:

$$U_{22} = U_{33} = \Upsilon_{23} = \Upsilon_{24} = \Upsilon_{34} = 0 \quad (5.5.1)$$

для елементів матриці (5.3.35), що ведуть до досить загального потенціалу виду (5.3.2) з 18-ма довільними дійсними парціальними потенціалами. Чотири з них становлять парно-парну частину  $U_{ee}$  взаємодії, 4 інших становлять непарно-непарну  $U_{oo}$ , а 10 решта утворюють потенціали типу  $U_{oe}$  і  $U_{eo}$ . Згідно з обмеженнями (5.5.1) обидва члени взаємодії  $U_{ee}$  і  $U_{oo}$  містять множник  $1 - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ . Він анулює взаємодію триплетної частини хвильової ф-ї  $\Phi$  і може дати хіба що бідний за структурою і сумнівний за фізичним змістом спектр зв'язаних станів. Тому відкинемо ці потенціали умовами:

$$U_{11} = U_{44} = \Upsilon_{14} = 0$$

для обидвох випадків парності  $P = -(-)^j$  і  $P = (-)^j$ .

Наступна вимога

$$\operatorname{Re} \Upsilon_{12} = \operatorname{Re} \Upsilon_{13} = 0 \quad (5.5.2)$$

забезпечує рівність  $\operatorname{Im} F = 0$  для (5.3.43), і тому  $F^\dagger = F$  (оскільки  $F$  діагональною, згідно з (5.5.1)). Цим забезпечується двочленний вигляд (5.3.45) хвильового рівняння. З іншого боку, 10 парціальних потенціалів, що містяться в елементах  $\Upsilon_{12}$  і  $\Upsilon_{13}$  матриці (5.3.35) зводяться, згідно з (5.5.2), до 6-ти потенціалів, що утворюють члени взаємодії типу  $U_{oe}$  і  $U_{eo}$ . Серед них член  $U_0(r)(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \mathbf{n}$  з довільною ф-єю  $U_0(r)$  є цілком калібрувальним, і може бути скомпенсований фазовим множником  $\exp\{-i \int dr U_0(r)\}$  функції  $\Psi$ . В результаті отримуємо такий анзац для потенціалу:

$$U = i \left\{ U_1(r) + U_2(r) \gamma_1^5 \gamma_2^5 \right\} \beta_1 \beta_2 (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \mathbf{n} + U_3(r) (\gamma_1^5 + \gamma_2^5) (\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{n} \\ + i \left\{ U_4(r) \beta_1 \gamma_1^5 - U_5(r) \beta_2 \gamma_2^5 \right\} (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2 + i \alpha_1 \times \alpha_2) \cdot \mathbf{n}, \quad (5.5.3)$$

де  $U_1(r), \dots, U_5(r)$  є довільними дійсними функціями.

Після вищевказаного спрощення матриці  $W_\pm$ , що входять у р-ня (5.3.45) і відносяться до випадків парності  $P = \mp(-)^j$  відповідно, мають вигляд:

$$W_\pm = \left[ f_{\uparrow\pm}^2 + \left( \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) f_{\uparrow\pm} - \frac{m_\mp}{E} \left( 2f_{\uparrow\pm} + \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) u_\pm + u_\pm^2 \right] \sigma_\uparrow \\ + \left[ f_\downarrow^2 \pm \frac{d}{dr} f_\downarrow \right] \sigma_\downarrow - \frac{C}{r} \left[ \frac{m_\mp}{E} (f_{\uparrow\pm} \pm f_\downarrow) - u_\pm \right] \sigma_1 - \frac{C^2}{r^2} - b(E),$$

де функції  $f_{\uparrow\pm} = \mp(U_1 + U_2) - 2U_3$ ,  $f_\downarrow = U_2 - U_1$ ,  $u_\pm = -2(U_4 \pm U_5)$  еквівалентно представляють парціальні потенціали, а функція енергії

$$b(E) = \frac{1}{4} \left( E - \frac{m_+^2}{E} \right) \left( E - \frac{m_-^2}{E} \right) \text{ обернена до } E(b) = \sum_{a=1}^2 \sqrt{m_a^2 + b}. \quad (5.5.4)$$

### 5.5.1. Узагальнені діраківські осцилятори

**Моделі I.** Вибір  $u = 0$  і  $f^2 = a^2 r^2$ , де  $a = \text{const}$ , веде до 4-х можливих наборів парціальних потенціалів у п.ч. (5.5.12) (решта занулюються):

$$\begin{aligned} \text{Ia). } & U_2 = ar, & \text{Ic). } & U_1 = -U_2 = U_3 = \frac{1}{2}ar, \\ \text{Ib). } & U_1 = ar, & \text{Id). } & U_1 = -U_2 = -U_3 = -\frac{1}{2}ar. \end{aligned}$$

Усі випадки ведуть до осциляторо-подібних рівнянь

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{4} \left( E - \frac{m_+^2}{E} \right) \left( E - \frac{m_-^2}{E} \right) - a^2 r^2 - \frac{C^2}{r^2} + a D_{\pm} \right\} \Psi = 0, \quad (5.5.5)$$

де  $D_{\pm}$  є сталю  $2 \times 2$ -матрицею. У випадку Ia ця матриця діагональна:

$$D_{\pm} = \text{diag} \{ \delta_{\uparrow\pm}, \delta_{\downarrow\pm} \}, \quad (5.5.6)$$

$$\text{Ia). } \delta_{\uparrow\pm} = \pm 3, \quad \delta_{\downarrow\pm} = \mp 1 \quad \text{для } P = \mp(-)^j. \quad (5.5.7)$$

Спектр енергії можна знайти з алгебричного співвідношення:

$$b(E) = |a|(2n + 3) - a\delta_{\uparrow\pm}, \quad n = j + 2n_r, \quad (5.5.8)$$

де  $n_r = 0, 1, \dots$  є радіальне квантове число. При даних  $j$  та  $n_r$  маємо 4 р-ня, що визначають 4 додатні значення енергії  $E_{\uparrow\pm}$ :

$$E_{\uparrow\pm} = \sum_{a=1}^2 \sqrt{m_a^2 + |a|(2n + 3) - a\delta_{\uparrow\pm}}. \quad (5.5.9)$$

У випадку Ib матриця  $D_{\pm}$  не є діагональна:

$$D_{\pm} = \pm \begin{bmatrix} 3 & -2m_{\mp}C/E \\ -2m_{\mp}C/E & 1 \end{bmatrix} \quad \text{для } P = \mp(-)^j. \quad (5.5.10)$$

$O(2)$ -перетворенням вона зводиться до виду (5.5.6) з власними значеннями:

$$\text{Ib). } \delta_{\uparrow\pm} = 2 + \sqrt{1 + (m_{\mp}C/E)^2}, \quad \delta_{\downarrow\pm} = 2 - \sqrt{1 + (m_{\mp}C/E)^2} \quad (5.5.11)$$

для  $P = \mp(-)^j$ . Система (5.5.5) розпадається на два осциляторо-подібних рівняння. Оскільки  $\delta$  в (5.5.11) залежать від енергії, то спектральні умови (5.5.8) у цьому випадку виявляються ірраціональними рівняннями, які можна звести до алгебричних рівнянь 4-го ступеня (3-го, якщо  $m_1 = m_2$ ) щодо  $E$ .

У випадках Ic і Id матриця  $D_{\pm}$  рівна або (5.5.6)-(5.5.7), або (5.5.10) для  $P = (-)^j$  і навпаки для протилежної парності. Відповідні власні значення

$$\text{Ic). } \delta_{\uparrow+} = 2 \pm \sqrt{1 + (m_-C/E)^2}, \quad \delta_{\uparrow-} = 1 \pm 2,$$

$$\text{Id). } \delta_{\uparrow+} = 1 \pm 2, \quad \delta_{\uparrow-} = 2 \pm \sqrt{1 + (m_+C/E)^2}$$

потрібно підставити у спектральні формули (5.5.8) або (5.5.9).

Якщо  $m_1 = m_2 = 0$ , то сталі  $\delta_{\uparrow\pm}$  не залежать від  $E$  та  $j$  і р-ня (5.5.8) спрощується до явної формули:

$$E_{\uparrow\pm}^2 = 4[|a|(2n + 3) - a\delta_{\uparrow\pm}].$$

У цьому випадку енергетичні рівні  $E_{\uparrow\pm}$  виструнчуються у  $(E^2, j)$ -площині в паралельні прямі (т.зв. *траєкторії Редже*) з коефіцієнтом нахилу  $8|a|$ .

Усі траєкторії можна недвозначно маркувати трійкою квантових чисел  $n_r$ ,  $\uparrow\downarrow$ ,  $\pm$ , однак деякі траєкторії, що відповідають різним числам, можуть збігатися (тобто вироджуватися). Приклади траєкторій Редже для безмасових моделей Іа–Іс показано на рис. 5.2.

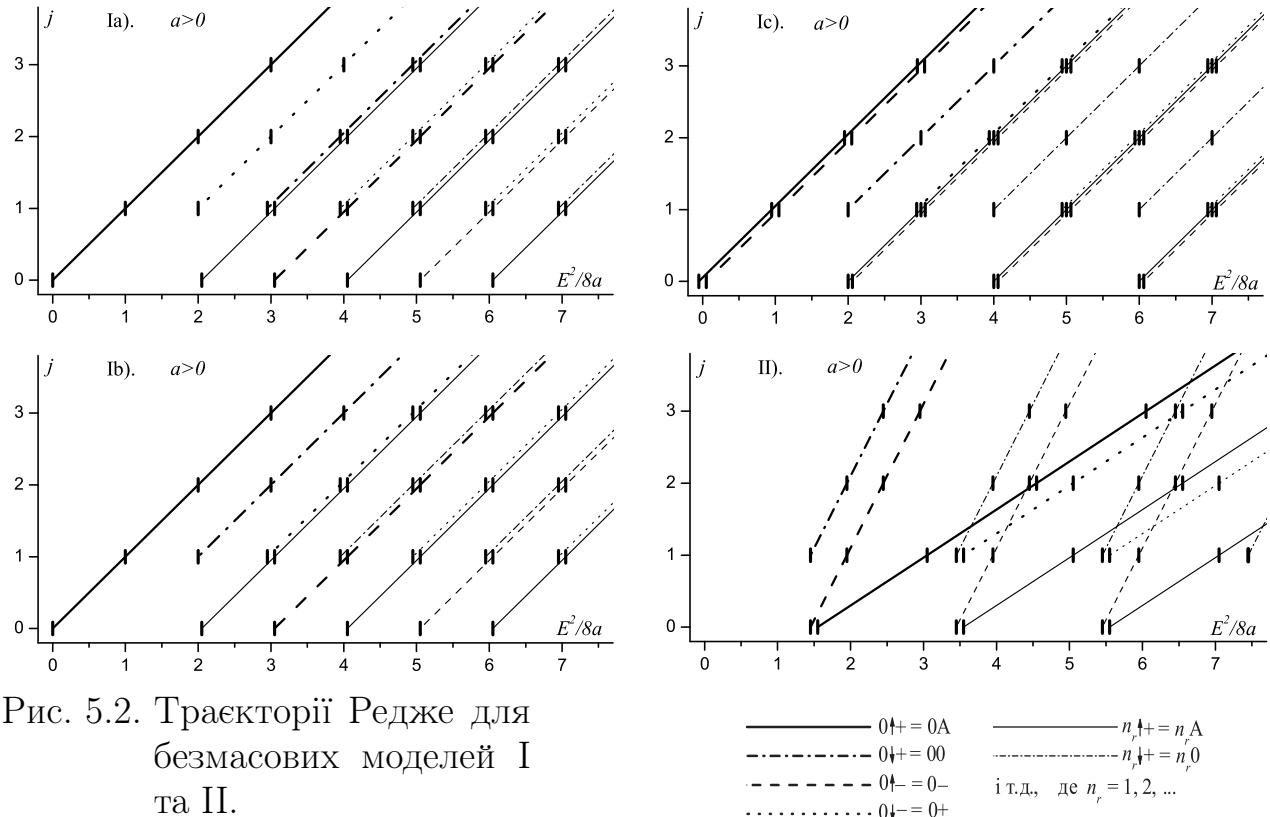


Рис. 5.2. Траєкторії Редже для безмасових моделей І та ІІ.

**Моделі ІІ.** Вибір  $f_\uparrow = 0$  і  $f_\downarrow^2 = u^2 = a^2 r^2$  дає 4 набори потенціалів:

$$\begin{array}{ll} \text{ІІа). } U_1 = U_4 = \frac{1}{2}ar, & \text{ІІс). } U_1 = U_5 = \frac{1}{2}ar, \\ \text{ІІб). } U_1 = -U_4 = -\frac{1}{2}ar, & \text{ІІд). } U_1 = -U_5 = -\frac{1}{2}ar \end{array}$$

(решта – нулі). Цей вибір веде до 4-х точно розв'язних моделей, що описуються осциляторо-подібними р-ням (5.5.5) з деякими матрицями D. Розглянемо тут лише

безмасовий випадок. Усі моделі ІІ–ІІд мають спільний спектр при  $a > 0$ :

$$\begin{aligned} E_{\uparrow+}^2 &= 4|a|(3j + 4n_r + 3), & E_{\uparrow-}^2 &= 4|a|(j + 4n_r + 3), \\ E_{\downarrow+}^2 &= 4|a|(j + 4n_r + 2), & E_{\downarrow-}^2 &= 4|a|(3j + 4n_r + 4). \end{aligned}$$

При  $a < 0$  траекторії Редже переставляються:  $E_{\uparrow+}^2 \leftrightarrow E_{\uparrow-}^2$ . На відміну від моделей І, тут траекторії не є паралельними: два сімейства мають нахил  $4|a|$ , два інші –  $12|a|$  (див. рис. 5.2).

**Моделі ІІІ.** Умови  $f_{\uparrow-} = u_+ = 0$ ,  $f_{\uparrow+}^2 = f_{\downarrow}^2 = u_-^2 = a^2 r^2$  дають чотири розв'язні моделі, одна з яких задається потенціалами:

$$U_1 = \frac{3}{4}ar, \quad U_2 = U_5 = -\frac{1}{4}ar, \quad U_3 = U_4 = \frac{1}{4}ar.$$

Ці моделі (у безмасовому випадку) ведуть до послідовності траекторій Редже з трьома різними нахилами:  $4|a|$ ,  $8|a|$  і  $12|a|$ .

Серед усіх знайдених тут моделей дві були відомі в літературі раніше. Модель Іа еквівалентна до моделі Сазджана з псевдо-скалярною утримною взаємодією [25]; вона збігається з однією з версій двочастинкового діраківського осцилятора з потенціалом (1.2.9, с.64), запропонованого в [109]; див. п. 1.2.6. Суперсиметричні аспекти цієї моделі вивчено в [107, 110]. Модель Іб є іншою версією діраківського осцилятора [108] з потенціалом (1.2.8), узагальненого на випадок різних мас спокою частинок.

Хоча знайдені моделі не мають безпосереднього фізичного змісту, однак власним значенням енергії цих моделей притаманні деякі риси акуальних спектрів мезонів, описаних в п. 1.2.3.

### 5.5.2. Точні моделі спектрів легких мезонів

Багато особливостей спектрів мас легких мезонів, описаних в п. 1.2.3, характерні для спектрів енергії побудованих вище моделей Іа–Ід. Дійсно, у безмасовому випадку траекторії Редже є прямі і паралельні. Траекторії  $\uparrow+$ , що складаються з енергетичних рівнів  $E_{\uparrow+}$  парності  $P = -(-)^j$ , можна тлумачити як синглетні траекторії, що відповідають  $s = 0$ ,  $\ell = j$  (і марковані як "A"; див. п. 5.3.2). Подібно, триплетні квантові числа  $s = 1$ ,  $\ell = j, j \mp 1$  можна приписати траекторіям

$\downarrow+, \uparrow-$  (маркованих як "0,  $\mp$ "). У цих термінах спектр моделі Ia з  $m_1 = m_2 \equiv m$  узгоджується з результатами в [25, 107, 109, 110]:

$$E^2 = 8|a|(\ell + 2n_r + 3/2) + 8a(2s - 3/2) + 4m^2.$$

Модель Ic відрізняється лише іншим коефіцієнтом біля  $s$ :

$$E^2 = 8|a|(\ell + 2n_r + 3/2) + 8a(s - 3/2) + 4m^2.$$

Усі моделі Ia–Id виявляють вироджені траекторії. Але виродження не є типу  $\ell s$ . Щоб забезпечити  $\ell s$ -виродження, треба би мати модель, що має додаткову O(3)-симетрію з відповідними збережуваними генераторами [282]. Повний спін  $\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$  не підходить на цю роль, оскільки оскільки навіть вільночастинковий діраківський гамільтоніан не комутує з  $\mathbf{s}$ . Нижче пропонуються узагальнення моделей типу I, що володіють наближенням  $\ell s$ -виродженням при певних значеннях вільних параметрів.

**Модель IV** є інтегровним розширенням моделі Ib з потенціалами:

$$U_1 = ar - \frac{\kappa_+ - \kappa_- + 2\chi}{4r}, \quad U_2 = -\frac{\kappa_+ - \kappa_- - 2\chi}{4r}, \quad U_3 = -\frac{\kappa_+ + \kappa_- - 2}{4r}, \quad (5.5.12)$$

де  $\kappa_+$ ,  $\kappa_-$ ,  $\chi$  – довільні сталі. Отже разом із параметром нахилу  $a$  і масами спокою  $m_1$ ,  $m_2$  модель містить 6 довільних параметрів.

Матриця  $W_{\pm}$  у хвильовому рівнянні (5.3.45) має вигляд:

$$\begin{aligned} W_{\pm} = & a^2 r^2 + a(2\chi \pm 1) + \frac{C^2 + \chi(\chi \pm 1)}{r^2} - b(E) \\ & - 2 \left( \pm a - \frac{\kappa_{\pm} \pm \chi - 1}{2r^2} \right) \begin{bmatrix} \kappa_{\pm} \mp \chi & -m_{\mp} C/E \\ -m_{\mp} C/E & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

Її можна діагоналізувати, подібно до випадку Ib. Тоді р-ня (5.3.45) розчеплюється на два осциляторо-подібних рівняння з  $j$ - і  $E$ -залежним вільним членом та коефіцієнтом біля  $1/r^2$ . Спектральна умова в загальному випадку є громіздким ірраціональним р-ням, яке годі явно розв'язати. У безмасовому випадку отримаємо точні вирази:

$$\begin{aligned} E_{\uparrow\pm}^2 &= 8|a|(k_{\uparrow\pm} + 2n_r + \tfrac{3}{2}) \mp 8a(\kappa_{\pm} + \tfrac{1}{2}), & k_{\uparrow\pm} &= \sqrt{(j + \tfrac{1}{2})^2 + \kappa_{\pm}(\kappa_{\pm} - 1)} - \tfrac{1}{2}, \\ E_{\downarrow\pm}^2 &= 8|a|(k_{\downarrow\pm} + 2n_r + \tfrac{3}{2}) - 8a(\chi + \tfrac{1}{2}), & k_{\downarrow\pm} &= \sqrt{(j + \tfrac{1}{2})^2 + \chi(\chi \pm 1)} - \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Кулоно-подібні члени у потенціалах (5.5.12) викривляють траєкторії Редже (особливо внизу), залишаючи їх асимптотики (при  $j \rightarrow \infty$ ) прямолінійними (оскільки  $k_{\uparrow\pm} \stackrel{j \rightarrow \infty}{\approx} j + O(1/j)$ ). Якщо обрати  $\varkappa_+ = \chi$ ,  $\varkappa_- = -\chi - 2$  (де  $\chi$  все ще довільний), траєкторії стають асимптотично виродженими у площині  $(E^2, \ell)$ . Отже, ця модель наблизено відповідає властивості 4 (на с. 59) спектру легких мезонів, але значно переобтяжує їх маси.

**Модель V** є іншим розширенням моделі Ib з 6-ма вільними параметрами:

$$U_1 = ar - \frac{\chi}{r}, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = \frac{1/2}{r}, \quad U_4 = -\frac{\varkappa_+ + \varkappa_-}{2r}, \quad U_5 = -\frac{\varkappa_+ - \varkappa_-}{2r}.$$

Діагоналізація матриці  $Q_{\pm}$  (тут не показаної) веде до розчепленої пари осциляторо-подібних р-нь і спектральних умов, подібних до випадку IV. У безмасовому випадку маємо спектр:

$$E_{\uparrow}^2 = 8|a|(k_{\uparrow} + 2n_r + \tfrac{3}{2}) - 8a(\chi \pm \tfrac{1}{2}), \quad \text{де} \\ k_{\uparrow} = \sqrt{C^2 + (\chi \mp \tfrac{1}{2})^2 + 2|\varkappa|(|\varkappa| \pm \sqrt{C^2 + \varkappa^2})} - 1/2 \stackrel{j \rightarrow \infty}{\approx} j \pm |\varkappa| + O(1/j)$$

(індекс парності "±" упущено). Траєкторії Редже асимптотично лінійні, але бракує параметру, що забезпечив би  $\ell s$ -виродження.

Моделі IV і V представляють максимальні розв'язні розширення моделі Ib. Існують розширення інших моделей сімейства I, що відображають певні риси спектроскопії мезонів, але точно інтегровні з меншою кількістю вільних параметрів, ніж моделі IV і V. Тут розглянемо один приклад, що має близький стосунок до спектроскопії мезонів.

**Модель VI** є інтегровним розширенням моделі Ic з потенціалами

$$U_1 = \frac{1}{2} \left( ar - \frac{\varkappa + \chi - 1}{2r} \right), \quad U_2 = -\frac{1}{2} \left( ar + \frac{\varkappa - 3\chi - 1}{2r} \right), \\ U_3 = \frac{1}{2} \left( ar + \frac{\varkappa + \chi - 1}{2r} \right). \quad (5.5.14)$$

Матрицю  $W_+$ , тотожну до (5.5.13), можна діагоналізувати, як в моделі IV. Матриця  $W_- = \text{diag}\{W_{\uparrow-}, W_{\downarrow-}\}$  – діагональна, з елементами:

$$W_{\uparrow-} = a^2 r^2 - a\{2(\chi \pm 1) + 1\} + \frac{C^2 + \chi(\chi + 1)}{r^2} - b(E).$$

У випадку  $a > 0$  і рівних мас  $m_1 = m_2 \equiv m$  отримаємо спектр мас явно:

$$\begin{aligned} E_{\uparrow+}^2 &= 8a(k_{\uparrow+} + 2n_r + 1 - \varkappa) + 4m^2, \quad k_{\uparrow+} = \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 + \varkappa(\varkappa - 1)} - \frac{1}{2}, \\ E_{\downarrow+}^2 &= 8a(k_{\downarrow+} + 2n_r + 1 - \chi) + 4m^2, \quad k_{\downarrow+} = \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 + \chi(\chi - 1)} - \frac{1}{2}, \\ E_{\downarrow-}^2 &= 8a(k_{\downarrow-} + 2n_r \pm 1 - \chi) + 4m^2, \quad k_{\downarrow-} = \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 + \chi(\chi + 1)} + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

Траєкторії Редже асимптотично лінійні і, якщо  $\varkappa = \chi$ ,  $\ell s$ -вироджені; рис. 5.3.

З допомогою формул (5.5.15), що містять 4 параметрами припасування  $a$ ,  $\chi$ ,  $\varkappa$  і  $m$ , можна спробувати описати спектр легких мезонів ( $\pi$ - $\rho$ )-сім'ї. Найкраще узгодження з експериментом відповідає таким значенням параметрів:  $a = 0.145 \text{ GeV}^2$ ,  $\chi = 0.227$ ,  $\varkappa = 0.342$  і  $m^2 = -0.0865 \text{ GeV}^2$ ; рис. 5.4. Від'ємне значення  $m^2 < 0$  використовується в деяких осциляторних моделях типу ПРОМ [27, 389] чи Бете-Салпітера [318], і може бути пов'язане з тахіонними станами кварків. Але в рамках даної моделі (5.5.1) уявні маси спокою порушують ермітовість двочастинкового ермітового гамільтоніану. Тому тут їх слід розглядати лише як феноменологічні параметри припасування.

З рис. 5.4 видно, що спостережувані стани досить добре лягають на траєкторії Редже. Однак частина радіальних збуджень не попадає на дочірні траєкторії, особливо у їх нижній ділянці. Однією з причин цієї невідповідності може бути специфічний характер викривленості модельних траєкторій: траєкторії  $n_r \uparrow \pm$  мають додатню кривину, тоді як  $n_r \downarrow \pm$  – від'ємну. Інша причина – асимптотично наближене випадкове виродження типу  $\ell + 2n_r$ , що дає замало дочірніх траєкторій. Очевидно, наприклад, що станам  $\boldsymbol{\pi}(1300)$ ,  $\pi_2(2100)$  і  $a_1(1640)$  бракує “своїх” дочірніх траєкторій типу  $\uparrow+$  і  $\downarrow+$ , а стани  $\rho(2265)$  чи  $\rho(2280)$  не попадають на траєкторію  $2\downarrow-$  через її викривленість. З іншого боку, викривленість траєкторії  $0\uparrow+$  добре узгоджується із реальними станами  $\boldsymbol{\pi}_0$ ,  $\mathbf{b}_1(1235)$  і т.д.

У випадку  $\varkappa = \chi = 0$  траєкторії стають лінійними і точно  $\ell s$ -виродженими, а формули (5.5.15) дуже спрощуються:

$$E^2 = 8|a|(\ell + 2n_r + \frac{3}{2}) + 4(m^2 - a). \quad (5.5.16)$$

З точністю до адитивної сталої ця формула збігається з виразом (1.2.7, с.63), отри-

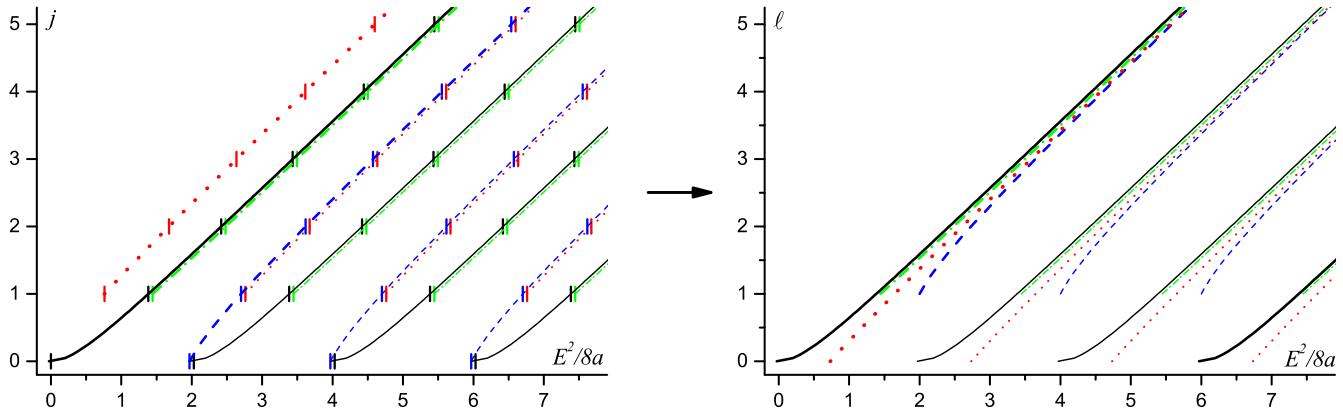


Рис. 5.3. Траєкторії Редже з моделі VI:  $m_1 = m_2 = 0$ ,  $\chi = \kappa = 1/2$ .

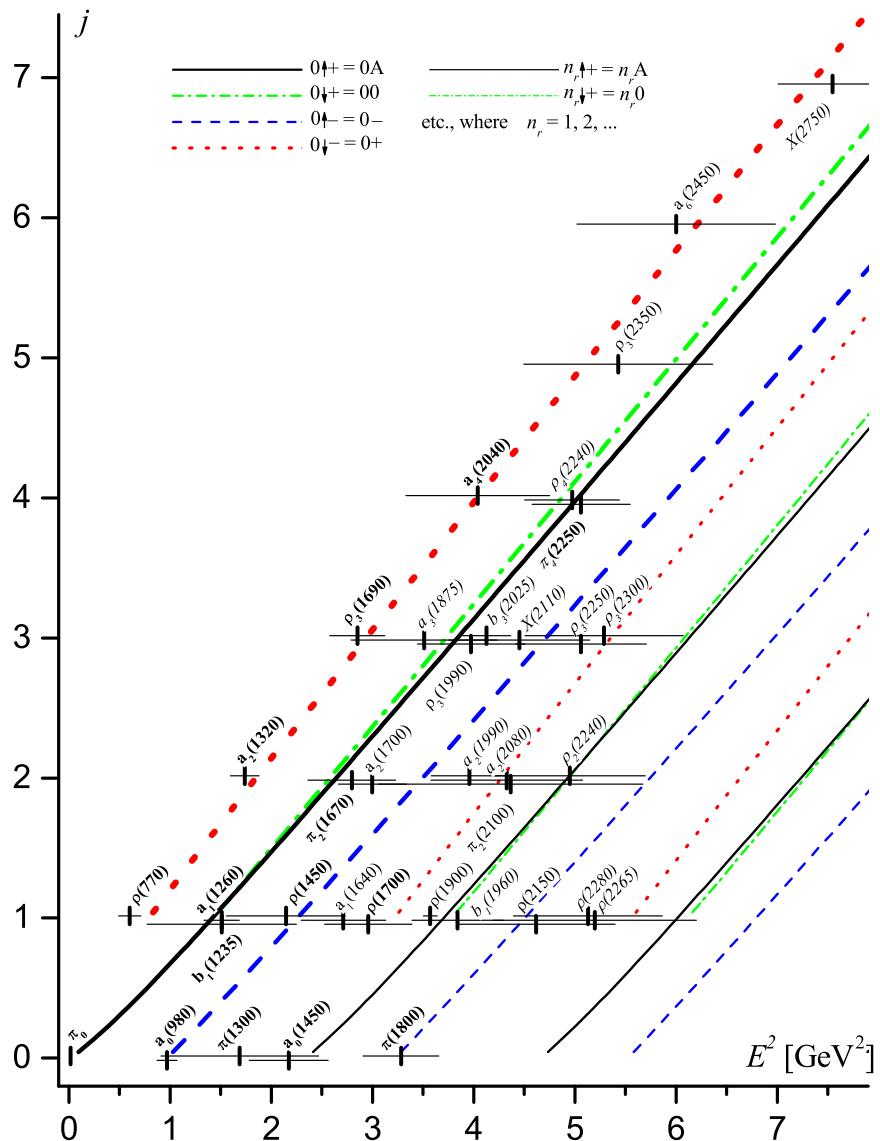


Рис. 5.4. Спектр  $\pi$ - та  $\rho$ -мезонів і оптимальні траєкторії Редже з моделі VI. Найдійні дані зазначені **товстим**, сумнівні – *курсивом*. Тонкі горизонтальні лінії – фактичні ширини розпадів.

маним в рамках безспінової ПРОМ [27, 284, 290]. В рамках моделі VI, заданої парціальними потенціалами (5.5.14) з  $\varkappa = \chi = 0$  простота спектру (5.5.16) забезпечується повним потенціалом досить нетривіального вигляду:

$$\begin{aligned} U = & \frac{i}{2} ar\beta_1\beta_2(\gamma_1^5 - \gamma_2^5)(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{n} + \frac{i}{4r}\beta_1\beta_2(\gamma_1^5 + \gamma_2^5)(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{n} \\ & + \frac{1}{2} \left( ar + \frac{1}{2r} \right) (\gamma_1^5 + \gamma_2^5)(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

## 5.6. Псевдо-пертурбативний метод $1/j$ -розкладів

Тут розглядається можливість уникнути синг'улярностей 2ЧРД застосуванням псевдопертурбативної техніки, подібної до розкладів за  $1/N$  [383–385] або  $1/\ell$  [386, 387]. Ці методи застосовні у випадку сильного зв'язку, і не чутливі до патологій краєвої задачі. У випадку 2ЧРД, редукованого до системи радіальних хвильових р-нь 2-го порядку, природнім параметром розкладу є  $1/j$ .

### 5.6.1. Метод $1/\ell$ для рівняння Тодорова

Розглянемо рівняння типу Тодорова, що описує релятивістичну систему 2-х взаємодіючих скалярних частинок у системі відліку центра мас [8, 10, 201]:

$$\{\mathbf{p}^2 + U(r, E) - b(E)\} \Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.6.1)$$

Тут  $\mathbf{p} = -i \nabla$ , квазіпотенціал  $U(r, E)$  залежить від енергії системи  $E$ , а функція  $b(E)$  енергії системи  $E$  означена в (5.5.4).

Відповідне радіальне рівняння набуває вигляду

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - W(r, E, \ell) \right\} \Psi(r) = 0, \quad (5.6.2)$$

де  $\ell$  – орбітальне квантове число, а

$$W(r, E, \ell) = U(r, E) + \ell(\ell + 1)/r^2 - b(E). \quad (5.6.3)$$

Розглянемо рух системи в околі класичної стійкої колової орбіти. За даного значення  $\ell > 0$  радіус  $r_c = r_c(\ell)$  щієї орбіти і відповідна енергія  $E_c = E_c(\ell)$

задовільняють умови:

$$W(r_c, E_c, \ell) = 0, \quad (5.6.4)$$

$$\partial W(r_c, E_c, \ell) / \partial r_c = 0, \quad (5.6.5)$$

$$\partial^2 W(r_c, E_c, \ell) / \partial r_c^2 > 0; \quad (5.6.6)$$

тут  $\partial W(r_c, E_c, \ell) / \partial r_c \equiv \partial W(r, E, \ell) / \partial r \Big|_{\substack{r=r_c \\ E=E_c}}$  і т.д.

Покладімо  $r = r_c + \Delta r$  та  $E = E_c + \Delta E$ , де  $\Delta r$  та  $\Delta E$  є малими, і розкладемо функцію  $W(r_c + \Delta r, E_c + \Delta E, \ell)$  у степеневий ряд за  $\Delta r$  і  $\Delta E$ . Тоді, згідно з умовами (5.6.4)–(5.6.6), головний член цього розкладу представляє потенціал гармонічного осцилятора, а інші (малі) члени – ангармонічні поправки. Якщо умови (5.6.4)–(5.6.6) виконуються для довільних великих значень  $\ell$ , то шляхом певного перенормування  $\Delta r$  і  $\Delta E$  можна виокремити незалежну від  $\ell$  задачу про гармонічний осцилятор (як нульове наближення) та ангармонічні збурення, що зникають при  $\ell \rightarrow \infty$ . У цьому й полягає ідея методу розкладів за  $1/\ell$ . Застосування псевдо-пертурбативної техніки цього типу [383–387] до нашого випадку має дві особливості: рівняння (5.6.2) представляє собою нелінійну спектральну задачу, і точний розв'язок рівнянь (5.6.4)–(5.6.5) може виявитися невідомим або занадто громіздким для практичних обчислень. З огляду на це пропонується модифікація методу.

Введемо параметр  $\lambda = 1/\sqrt{\ell}$ , що є малим при великих  $\ell$ . Оскільки точний вигляд функцій  $r_c(\ell)$  і  $E_c(\ell)$  взагалі кажучи невідомий, в першу чергу визначаємо асимптотики  $r_c \sim r_\infty(\lambda)$ ,  $b_c = b(E_c) \sim b_\infty(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , які можна знайти значно простіше. Тоді функції  $r_c(\ell)$  та  $E_c(\ell)$  можна представити у вигляді:

$$r_c(\lambda) = r_\infty(\lambda)\rho(\lambda), \quad b_c(\lambda) = b_\infty(\lambda)\mu(\lambda), \quad (5.6.7)$$

$$\rho(\lambda) = 1 + \lambda\rho^{(1)} + \lambda^2\rho^{(2)} + \dots, \quad \mu(\lambda) = 1 + \lambda\mu^{(1)} + \lambda^2\mu^{(2)} + \dots \quad (5.6.8)$$

де коефіцієнти розкладу  $\rho^{(n)}$ ,  $\mu^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (а тому й аналітичні функції  $\rho(\lambda)$  та  $\mu(\lambda)$ ) визначаються крок за кроком з умов:

$$\bar{W}(\rho, \mu, \lambda) = 0, \quad \partial \bar{W}(\rho, \mu, \lambda) / \partial \rho = 0 \quad (5.6.9)$$

та  $\partial^2 \bar{W}(\rho, \mu, \lambda) / \partial \rho^2 > 0$ ; тут безрозмірна функція  $\bar{W}(\rho, \mu, \lambda)$  утворена шляхом підстановки (5.6.7)-(5.6.8) в (5.6.3) та перенормування з метою забезпечення її регулярності при  $\lambda \rightarrow 0$ :

$$\bar{W}(\rho, \mu, \lambda) = \lambda^4 r_\infty^2 W [r_\infty \rho, E(b_\infty \mu), 1/\lambda^2]. \quad (5.6.10)$$

Введемо безрозмірні змінну  $r \rightarrow \xi$  та спектральний параметр  $b(E) \rightarrow \epsilon$ :

$$r = r_\infty(\lambda)[\rho(\lambda) + \lambda \xi], \quad b = b_\infty(\lambda)[\mu(\lambda) + \lambda^2 \epsilon], \quad (5.6.11)$$

в термінах яких рівняння (5.6.2) набуває вигляду:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{\lambda^2} w(\xi, \epsilon, \lambda) \right\} \psi(\xi) = 0, \quad (5.6.12)$$

де

$$\psi(\xi) = \Psi[r_\infty(\rho + \lambda \xi)], \quad (5.6.13)$$

$$w(\xi, \epsilon, \lambda) = \bar{W}(\rho + \lambda \xi, \mu + \lambda^2 \epsilon, \lambda). \quad (5.6.14)$$

Якщо ф-ї  $\rho(\lambda)$  та  $\mu(\lambda)$  задовольняють умови (5.6.9), то р-ня (5.6.12) є несингулярним при  $\lambda \rightarrow 0$ . Це твердження залишається вірним, якщо в перетворенні (5.6.11) замість точних виразів для  $\rho(\lambda)$  і  $\mu(\lambda)$  взяти їх перші наближення:

$$\rho(\lambda) = 1 + \lambda \rho^{(1)}, \quad \mu(\lambda) = 1 + \lambda \mu^{(1)}. \quad (5.6.15)$$

Дійсно, скориставшись позначеннями

$\partial \bar{W}^{(0)} / \partial \mu = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \partial \bar{W} / \partial \mu = \partial \bar{W} / \partial \mu (\rho=1, \mu=1, \lambda=0)$  і т.д., маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} w(\xi, \epsilon, \lambda) &= \frac{1}{\lambda^2} \bar{W} [\rho(\lambda) + \lambda \xi, \mu(\lambda) + \lambda^2 \epsilon, \lambda] \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \bar{W}^{(0)} + \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\partial \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho} (\rho^{(1)} + \xi) + \frac{\partial \bar{W}^{(0)}}{\partial \mu} (\mu^{(1)} + \lambda \epsilon) + \frac{\partial \bar{W}^{(0)}}{\partial \lambda} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho^2} (\rho^{(1)} + \xi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \mu^2} [\mu^{(1)}]^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \lambda^2} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho \partial \mu} (\rho^{(1)} + \xi) \mu^{(1)} + \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho \partial \lambda} (\rho^{(1)} + \xi) + \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \mu \partial \lambda} \mu^{(1)} + O(\lambda). \end{aligned} \quad (5.6.16)$$

Синг'улярних членів у цьому розкладі немає, якщо

$$\bar{W}^{(0)} = 0, \quad \partial\bar{W}^{(0)}/\partial\rho = 0, \quad (5.6.17)$$

$$\frac{\partial\bar{W}^{(0)}}{\partial\mu}\mu^{(1)} + \frac{\partial\bar{W}^{(0)}}{\partial\lambda} = 0. \quad (5.6.18)$$

Крім цього, члени нульового порядку, лінійні за  $\xi$ , випадають, якщо

$$\frac{\partial^2\bar{W}^{(0)}}{\partial\rho^2}\rho^{(1)} + \frac{\partial^2\bar{W}^{(0)}}{\partial\rho\partial\mu}\mu^{(1)} + \frac{\partial^2\bar{W}^{(0)}}{\partial\rho\partial\lambda} = 0. \quad (5.6.19)$$

Зауважимо, що р-ня (5.6.17) та (5.6.18)–(5.6.19) представляють собою умови (5.6.9) у 0-му та 1-му порядках за  $\lambda$  відповідно. Тому умови (5.6.17) задовольняються тотожньо, а (5.6.18)–(5.6.19) є лінійними рівняннями для  $\rho^{(1)}$  та  $\mu^{(1)}$ .

У 0-му наближенні рівняння (5.6.12) зводяться до задачі про осцилятор:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} + \kappa\epsilon - \nu - \omega^2\xi^2 \right\} \psi(\xi) = 0 \quad (5.6.20)$$

де

$$\kappa = -\frac{\partial\bar{W}^{(0)}}{\partial\mu}, \quad \omega^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{W}^{(0)}}{\partial\rho^2}, \quad (5.6.21)$$

$$\nu = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{W}^{(0)}}{\partial\rho^2}[\rho^{(1)}]^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{W}^{(0)}}{\partial\mu^2}[\mu^{(1)}]^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{W}^{(0)}}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2\bar{W}^{(0)}}{\partial\mu\partial\lambda}\mu^{(1)}, \quad (5.6.22)$$

$$\mu^{(1)} = -\frac{\partial^2\bar{W}^{(0)}/\partial\lambda}{\partial^2\bar{W}^{(0)}/\partial\mu},$$

$$\rho^{(1)} = -\frac{1}{\partial^2\bar{W}^{(0)}/\partial\rho^2} \left\{ \frac{\partial^2\bar{W}^{(0)}}{\partial\rho\partial\mu}\mu^{(1)} + \frac{\partial^2\bar{W}^{(0)}}{\partial\rho\partial\lambda} \right\}. \quad (5.6.23)$$

Члени вищого порядку у розкладі (5.6.16) можна тлумачити як збурення осцилятора. В загальному вони залежать від спектрального параметру  $\epsilon$  і можуть бути враховані з-допомогою відповідної пертурбативної процедури [201]. В усьому іншому процедура є близькою до описаної в [383–387].

Власні значення 0-го наближення

$$\epsilon_{n_r} = [\omega(2n_r + 1) + \nu]/\kappa, \quad (5.6.24)$$

де  $n_r = 0, 1, \dots$  – радіальне квантове число, уточнюються пертурбативними правками вищих порядків. Тоді, використовуючи 2-гу рівність (5.6.11) в (5.5.4), отримуємо енергетичний спектр системи.

Для прикладу розглянемо рівняння Тодорова (2.3.26)–(2.3.29, с.135) з мінімально включеними векторним кулонівським та скалярним лінійними потенціалами. Функція  $W(r, M, \ell)$  у цьому разі має вигляд [10]:

$$W(r, M, \ell) = (m_M + ar)^2 - (E_M + \alpha/r)^2 + \ell(\ell + 1)/r^2, \quad (5.6.25)$$

де  $M = E_{\text{СМ}} \equiv E_{P=0}$ . Обчисливши асимптотики  $r_\infty(\lambda)$  та  $b_\infty(\lambda)$ , отримаємо для спектру в 0-му наближенні формулу:

$$M^2 = 8a \left( \ell + 2n_r + 3/2 - \sqrt{2}\alpha \right) + 2 \left( m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{2}m_1m_2 \right), \quad (5.6.26)$$

що збігається з результатом, отриманим в [10] з евристичних міркувань.

### 5.6.2. Метод $1/j$ для 2ЧРД

Повернімося до радіально зредукованого 2ЧРД у матрично-двоочленному вигляді (5.3.45), або заданого оператором (5.3.48). Представивши хвильовому функцію  $\bar{\Phi}_1$  (5.3.46) та матрицю  $W$  через їх компоненти:

$$\bar{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \Psi_\uparrow \\ \Psi_\downarrow \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} W_\uparrow & Y \\ * & W_\downarrow \end{bmatrix}, \quad (5.6.27)$$

отримуємо пару зв'язаних рівнянь 2-го порядку:

$$\frac{d^2}{dr^2} \Psi_\uparrow(r) - W_\uparrow(r, E, j) \Psi_\uparrow(r) = Y(r, E, j) \Psi_\downarrow(r), \quad (5.6.28)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \Psi_\downarrow(r) - W_\downarrow(r, E, j) \Psi_\downarrow(r) = Y^*(r, E, j) \Psi_\uparrow(r). \quad (5.6.29)$$

Застосуємо до неї псевдопертурбативний розклад за параметром  $\lambda = 1/\sqrt{j}$ .

Припустимо тичасово, що правою стороною системи (5.6.28)–(5.6.29) можна знехтувати, так що рівняння розчеплюються. Тоді до кожного з рівнянь можна застосувати схему, викладену у попередньому підрозділі 6.1. Означаємо радіуси та енергії колових орбіт умовами:

$$W_i(r_i, E_i, j) = 0, \quad \frac{\partial W_i(r_i, E_i, j)}{\partial r} = 0, \quad (5.6.30)$$

$\partial^2 W_i(r_i, E_i, j)/\partial r^2 > 0$ ,  $i = \uparrow, \downarrow$ . Тоді виділяємо асимптотики цих ф-й від  $\lambda$ :

$$r_i(\lambda) = r_{i\infty}(\lambda)\rho_i(\lambda), \quad b_i(\lambda) = b_{i\infty}(\lambda)\mu_i(\lambda), \quad (5.6.31)$$

$$\rho_i(\lambda) = 1 + \lambda\rho_i^{(1)} + \lambda^2\rho_i^{(2)} + \dots, \quad \mu(\lambda) = 1 + \lambda\mu_i^{(1)} + \lambda^2\mu_i^{(2)} + \dots, \quad (5.6.32)$$

і, використовуючи рівності

$$r = r_{i\infty}(\lambda)[\rho_i(\lambda) + \lambda\xi_i], \quad b = b_{i\infty}(\lambda)[\mu_i(\lambda) + \lambda^2\epsilon_i], \quad i = \uparrow, \downarrow, \quad (5.6.33)$$

переформулюємо р-ня (5.6.28) безрозмірної змінної  $\xi_\uparrow$  і спектрального параметру  $\epsilon_\uparrow$ , тоді як р-ня (5.6.29) – в термінах  $\xi_\downarrow$  та  $\epsilon_\downarrow$ . Нарешті здійснюємо розклад рівнянь за степенями  $\lambda$  і розв’язуємо незалежно одне від одного.

Перш ніж враховувати актуальне спарювання рівнянь (5.6.28)–(5.6.29) зауважимо, що змінні  $\xi_\uparrow$  та  $\xi_\downarrow$  не є незалежними одна від одної, так само, як і спектральні параметри  $\epsilon_\uparrow$  and  $\epsilon_\downarrow$ . Тому ми повинні вибрати спільні для обидвох рівнянь змінні.

Виберім спочатку  $\xi = \xi_\uparrow$ ,  $\epsilon = \epsilon_\uparrow$ . Система (5.6.28)–(5.6.29) зводиться до вигляду:

$$\psi''_\uparrow(\xi) - \frac{1}{\lambda^2}w_\uparrow(\xi, \epsilon, \lambda)\psi_\uparrow(\xi) = y(\xi, \epsilon, \lambda)\psi_\downarrow(\xi), \quad (5.6.34)$$

$$\psi''_\downarrow(\xi) - \frac{1}{\lambda^2}w_\downarrow(\xi, \epsilon, \lambda)\psi_\downarrow(\xi) = \hat{y}(\xi, \epsilon, \lambda)\psi_\uparrow(\xi), \quad (5.6.35)$$

де

$$\psi_i(\xi) = \Psi_i[r_{i\infty}(\rho_i + \lambda\xi)], \quad i = \uparrow, \downarrow, \quad (5.6.36)$$

$$w_i(\xi, \epsilon, \lambda) = \lambda^4 r_{i\infty}^2 W_i [r_{i\infty}(\rho_i + \lambda\xi), E(b_{i\infty}(\mu_i + \lambda^2\epsilon)), 1/\lambda^2], \quad (5.6.37)$$

$$y(\xi, \epsilon, \lambda) = \lambda^2 r_{i\infty}^2 Y [r_{i\infty}(\rho_i + \lambda\xi), E(b_{i\infty}(\mu_i + \lambda^2\epsilon)), 1/\lambda^2]. \quad (5.6.38)$$

Функції (5.6.37)–(5.6.38) є регулярними при  $\lambda \rightarrow 0$ . Навіть більше, загальна структура функції  $w_\uparrow$  є такою ж як і  $w$  в підрозділі 6.1 (див р-ня (5.6.14), (5.6.16)). Зокрема,  $w_\uparrow = O(\lambda^2)$ . Тому рівняння (5.6.34) є подібним до (5.6.12) (але з правою частиною). Воно допускає подібний розклад за  $\lambda$ .

Функція ж  $w_\downarrow$  (на відміну від  $w_\uparrow$ ) може мати іншу поведінку при  $\lambda \rightarrow 0$ . Тут ми розглянемо три випадки.

**1).** Нехай  $r_{\downarrow\infty} \neq r_{\uparrow\infty}$  і  $b_{\downarrow\infty} \neq b_{\uparrow\infty}$ . Тоді  $w_\downarrow = O(\lambda^{-n})$ ,  $n \geq 0$  (за винятком дуже спеціальних випадків, які ми тут не розглядаємо). У цьому випадку рівняння (5.6.35) можна формально розв'язати відносно  $\psi_\downarrow(\xi)$ :

$$\psi_\downarrow = - \left( 1 - \frac{\lambda^2}{w_\downarrow} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right)^{-1} \frac{\lambda^2}{w_\downarrow} \overset{*}{y} \psi_\uparrow = - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda^2}{w_\downarrow} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right)^n \frac{\lambda^2}{w_\downarrow} \overset{*}{y} \psi_\uparrow. \quad (5.6.39)$$

Це представлення веде до втрати тих розв'язків для  $\psi_\downarrow$ , що не є аналітичними за  $\lambda$ . Однак у пертурбативних процедурах такі розв'язки відкидаються a priori. Підстановка виразу (5.6.39) у праву частину (5.6.34) дозволяє вилучити  $\psi_\downarrow$  з (5.6.34) і таким чином отримати замкнуте рівняння для  $\psi_\uparrow$ . Структура та розгляд цього рівняння є таким же ж як і рівняння (5.6.12). Навіть більше, із (5.6.39) очевидно, що принаймні 0-й та 1-й члени розкладу  $\psi_\downarrow$  за  $\lambda$  зникають. Тому права частина рівняння (5.6.34) не дає вкладу в нижні порядки пертурбативної процедури. В 0-му наближенні маємо осциляторне рівняння.

**2).** Нехай  $r_{\downarrow\infty} = r_{\uparrow\infty}$  і  $b_{\downarrow\infty} = b_{\uparrow\infty}$ , але  $\rho_\downarrow - \rho_\uparrow = O(\lambda)$  і  $\mu_\downarrow - \mu_\uparrow = O(\lambda)$ . Тоді  $w_\downarrow = O(\lambda)$ . Оскільки  $\lambda^2/w_\downarrow = O(\lambda)$ , використання пертурбативного розкладу (5.6.39) в рівнянні (5.6.34) є також законним. Єдина відмінність від випадку 1 полягає в тому, що права частина рівняння (5.6.34) може давати внесок вже у 1-му порядку за  $\lambda$ .

В обидвох випадках, розглянених вище, ми ввели безрозмірну змінну  $\xi_\uparrow$  і отримали замкнуте рівняння на власні значення (яке ми називатимемо *задачею*  $\uparrow$ ) для хвильової функції  $\psi_\uparrow(\xi_\uparrow)$  і спектрального параметру  $\epsilon_\uparrow$ . Подібно, можемо ввести змінну  $\xi_\downarrow$  і сформулювати на власні значення (яке ми називатимемо *задачею*  $\downarrow$ ) для хвильової функції  $\psi_\downarrow(\xi_\downarrow)$  і спектрального параметру  $\epsilon_\downarrow$ . На перший погляд видається, що обидві *задачі*  $\uparrow$  і  $\downarrow$  еквівалентні і дають одинаковий спектр (у термінах енергії  $E$ ). Насправді ж ці *задачі* доповнюють одна одну. Це очевидно з рівностей (5.6.33), що ведуть до співвідношення:

$$\epsilon_\downarrow - \epsilon_\uparrow = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{b_{\uparrow\infty}}{b_{\downarrow\infty}} \mu_\uparrow - \mu_\downarrow \right\} + \left\{ \frac{b_{\uparrow\infty}}{b_{\downarrow\infty}} - 1 \right\} \epsilon_\uparrow. \quad (5.6.40)$$

Дійсно, в обидвох випадках 1 і 2  $|\epsilon_\downarrow - \epsilon_\uparrow| \rightarrow \infty$  якщо  $\lambda \rightarrow 0$ . Це означає, що

довільний рівень енергії  $E$ , обчислений з використанням власного значення  $\epsilon_{\uparrow}^{(0)}$  0-го наближення (осциляторної) задачі  $\uparrow$  (з використанням формул (5.6.33) і (5.5.4)) не можна обчислити з допомогою будь-якого скінченного власного значення  $\epsilon_{\downarrow}^{(0)}$  задачі  $\downarrow$ , і навпаки. Поправки вищого порядку до  $\epsilon_{\uparrow}^{(0)}$  (або  $\epsilon_{\downarrow}^{(0)}$ ) є малими, і якісно не змінюють картини. Тому різні задачі породжують різні гілки енергетичного спектру вихідної системи рівнянь. У цьому відношенні наступний спеціальний випадок істотно відрізняється від двох попередніх.

**3).** Нех.  $r_{\downarrow\infty} = r_{\uparrow\infty}$  і  $b_{\downarrow\infty} = b_{\uparrow\infty}$ , але  $\rho_{\downarrow} - \rho_{\uparrow} = O(\lambda^n)$  і  $\mu_{\downarrow} - \mu_{\uparrow} = O(\lambda^n)$ ,  $n \geq 2$ . Тоді  $w_{\downarrow} = O(\lambda^2)$ . Обидва рівняння (5.6.34) і (5.6.35) мають подібну структуру, і можуть розглядатися на рівних правах. У цьому випадку принаїдними спільними змінними є  $\xi$  і  $\epsilon$ , означені рівностями (5.6.11) і (5.6.15). У 0-му наближенні отримуємо зв'язану пару хвильових рівнянь (на відміну від випадків **1** і **2**, де ми мали одне р-ня). У фізично змістовних випадках (див. підрозділ 6.3) вони мають вигляд:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} + \kappa\epsilon - \nu_{\uparrow} - \omega^2\xi^2 \right\} \psi_{\uparrow}(\xi) = \chi\psi_{\downarrow}(\xi), \quad (5.6.41)$$

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} + \kappa\epsilon - \nu_{\downarrow} - \omega^2\xi^2 \right\} \psi_{\downarrow}(\xi) = \chi\psi_{\uparrow}(\xi), \quad (5.6.42)$$

де  $\chi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} y = \text{const}$ , а параметри  $\nu_{\uparrow}$ ,  $\kappa$  і  $\omega$  пов'язані із функціями  $w_{\uparrow}$  рівностями типу (5.6.21) і (5.6.22). Рівняння (5.6.41), (5.6.42) можна очевидно звести до пари подібних рівнянь, але з новими параметрами  $\tilde{\nu}_{\uparrow} = \{\nu_{\uparrow} + \nu_{\downarrow} \pm \sqrt{(\nu_{\uparrow} - \nu_{\downarrow})^2 + 4\chi^2}\}/2$  і  $\tilde{\chi} = 0$ , в результаті чого отримуємо пару розчленених рівнянь типу (5.6.20). Власні значення  $\epsilon$ , що відповідають 1-му та 2-му рівнянням, розділені скінченною сталою  $\tilde{\nu}_{\uparrow} - \tilde{\nu}_{\downarrow}$ . Тому відповідні стани змішуються у вищих наближеннях пертурбативної процедури.

### 5.6.3. Псевдопертурбативні траєкторії Редже з 2ЧРД

Точно розв'язана модель легких мезонів, побудована у попередньому підрозділі, базується на суперпозиції лінійного та кулонівського двоферміонних потенціалів із складною спін-кутовою залежністю. Фізична інтерпретація такого потенці-

алу не є очевидною. Крім того, він задається невласним оператором (див. п.5.3.1) і, отже, зникає у нерелятивістичній границі. Тому модель придатна до опису лише легких мезонів, що вважаються істотно релятивістичними.

Тут розглянемо 2ЧРД з потенціалами, що допускають певну теоретико-польову інтерпретацію взаємодії, а в нерелятивістичній границі зводяться до корнельського (1.2.2, с.56). Такі моделі придатні до опису і важких мезонів.

З літератури і даної дисертації (див. п. 1.1.1, 5.2.3) відомо, що двоферміонні потенціали релятивістичних взаємодій є загалом нелокальними, або містять диференційні поправки на запізнення. Тут обмежимося локальними частинами, які можна обрати по-різному. Для векторних взаємодій вживають принаймні три загальні потенціали:

$$U_v^{(st)}(r) = u_v(r), \quad (5.6.43)$$

$$U_v^{(EG)}(r) = \{1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2\}u_v(r), \quad (5.6.44)$$

$$U_v^{(B)}(\mathbf{r}) = \{1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2\}u_v(r) + \frac{1}{2}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}_1)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}_2)ru'_v(r), \quad (5.6.45)$$

де  $u' = du/dr$ . Потенціал  $U_v^{(st)}$  враховує лише статичну компоненту 4-векторного поля-носія взаємодії (див. [79]). Він входить у 2ЧРД як добавка до енергії  $E$  і збігається із його нерелятивістичною границею  $u_v(r)$ . В конструкції  $U_v^{(EG)}$  (див.[12, 89]), що узагальнює потенціал Едінгтона-Ганта (1.1.4), [77, 78], врахована релятивістична кінематика векторної взаємодії. В узагальненні  $U_v^{(B)}$  потенціялу Брайта (1.1.3) враховано також члени, що описують ефекти запізнення; див. (5.2.16)-(5.2.17) і [12].

Два різних скалярних потенціалів:

$$U_s^{(Y)}(r) = \beta_1\beta_2u_s(r), \quad (5.6.46)$$

$$U_s^{(\min)}(r) = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)u_s(r), \quad (5.6.47)$$

походять із двох різних типів спарювання скалярного поля-медіатора із ферміонними полями. Потенціал  $U_s^{(Y)}$  виникає із взаємодії Юкави (див. (5.2.19) і [12, 70]), тоді як  $U_s^{(\min)}$  відповідає так-званому “мінімальному” спарюванню: в 2ЧРД він з'являється як добавка до мас спокою частинок [85–88].

У дво-ферміонних рівняннях квантово-польового походження члени взаємодії домножуються на 2-частинкові проекційні оператори (1.1.7, с.41), побудовані в термінах 1-частинкових додатньо- та від'ємно-енергетичних проекторів (1.1.5). У різних квантово-польових рівняннях використовують різні проекційні оператори: Браун і Рейвенгол [197] ввели у рівняння Брайта проектори  $\Lambda^{++}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ , у рівнянні Салпетера –  $\Lambda^{(-)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  [5], а в одній з версій квазіпотенціальних рівнянь Матвеєв, Мурадян і Тавхелідзе використали проектор  $\Lambda^{(-)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  [93]. Ці проектори є нелокальними у координатному представленні, і взагалі кажучи, порушують ермітовість членів взаємодії. Однак у статичному наближенні ( $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ ) вони спрощуються (1.2.10, с.67) і породжують ще дві статичні та ермітові версії скалярного потенціалу [97]:

$$U_s^{(\text{BR})}(r) = \frac{1}{4}(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)u_s(r), \quad (5.6.48)$$

$$U_s^{(\text{MMT})}(r) = \frac{1}{2}(1 + \beta_1\beta_2)u_s(r); \quad (5.6.49)$$

далі будемо їх називати (за походженням проекторів) потенціалами Брауна-Рейвенгола і Матвеєва-Мурадяна-Тавхелідзе відповідно.

Суперпозиції скалярних та векторних потенціалів (5.6.43)–(5.6.49) можна використати в 2ЧРД як потенціальних моделях. Однак, всі вони не є точно розв'язувані, а деякі з них – математично погано означені. Можливість конфайнменту із скалярними потенціалами (5.6.46)–(5.6.49) якісно досліджувалась в [97], і, з огляду на калькулятивні труднощі, лише 2ЧРД з лінійним скалярним мінімальним потенціалом (5.6.47),  $u_s(r) = ar$ , було детально досліджено аналітично і чисельно, і обчислено спектри [86–88].

Тут ми вживаємо нерелятивістичні лінійну та кулонівську потенціальні функції у векторних та скалярних потенціалах різної спінової структури (5.6.43)–(5.6.49) і обчислюємо спектри методом  $1/j$ -розкладів.

Якщо знехтувати короткосяжною векторною взаємодією і вжити скалярні потенціали (5.6.46)–(5.6.49) із ф-єю  $u_s(r) = ar$ , то псевдопертурбативний спектр мезонів у 0-му наближенні задається спільною загальною формулою:

$$\begin{aligned} E_A^2 &= ka[\ell + \frac{1}{2} + \varkappa(n_r + \frac{1}{2})] + \kappa m_+ \sqrt{2a\ell} + \delta_1 m_+^2 - \delta_2 m_1 m_2 + O(1/\sqrt{\ell}), \\ E_0^2 &= E_A^2, \quad E_\pm^2 = E_A^2 \pm \varsigma a, \end{aligned} \quad (5.6.50)$$

де  $k, \varkappa, \kappa, \delta_1, \delta_2, \varsigma$  – безрозмірні сталі, залежні від обраних потенціалів. Тут стани класифікуються так, як вказано на початку п. 5.5.2, тобто шляхом ототожнення позначок  $\uparrow + = A, \downarrow + = 0, \uparrow - = \mp$ , де  $A, 0, \mp$  маркують біспінорні гармоніки (A.1). Це дозволяє виразити квантове число  $j$  через  $\ell$ .

Чотири сім'ї енергетичних рівнів  $E_i$  ( $i = A, 0, -, +$ ) утворюють у площині  $(E^2, \ell)$  траєкторії Редже, що є майже прямими. Дійсно, для усіх потенціалів  $\kappa = 0 \div 2$ , а конституентні маси  $m_a$  ( $a=1,2$ ) легких мезонів є малими у порівнянні з енергетичною шкалою  $\sqrt{\sigma} = \sqrt{ka}$ . Тому й член  $\kappa m_+ \sqrt{a}$ , що визначає кривину траєкторій, є малим. Параметри  $\delta_1$  і  $\delta_2$  визначають спільний зсув усіх траєкторій. Важливішим є обговорення параметрів  $k, \varkappa$  і  $\varsigma$ , що визначають нахил траєкторій та їх властивості щодо виродження.

**Y).** У випадку (5.6.46)  $k = 4$ , так що нахил  $\sigma = ka$  при  $a = 0.25 \div 0.3 \text{ GeV}^2$  цілком відповідає властивості 2 на с. 59; але  $\varsigma = 4$  веде до  $j$ -залежності енергії (а не  $\ell$ -залежності), тобто виродження не є  $\ell s$ -типу; тому  $\varkappa = 2$  дає випадкове виродження  $(j + 2n_r)$ -типу, але у площині  $(E^2, j)$ , а не в  $(E^2, \ell)$ . Оскільки  $\kappa = 0$ , траєкторії – асимптотично прямі.

**min).** У випадку (5.6.47)  $k = 4$  і  $\varkappa = 2$ , так що нахил і випадкове виродження траєкторій є те саме, що й у випадку **Y**, а  $\varsigma = 4 - 3\sqrt{2} \approx -0.243$  забезпечує наближене  $\ell s$ -виродження, з точністю 6%, що відповідає актуальному  $ss$ -розщепленню для легких мезонів [278]. Оскільки  $\kappa = 2\sqrt{2}$ , то завдяки членові  $\sim \sqrt{\ell}$  усі траєкторії дещо викривлені у нижній частині, на відміну від попереднього випадку. Параметри  $\delta_1 = 5/4, \delta_2 = 2$  разом з масами кварків  $m_a$  визначають інтерцепт траєкторій  $E_i(\ell = 0, n_r = 0)$ , отже і маси основних станів мезонів. Вони виявляються завеликими навіть при  $m_a = 0$ .

Врахування векторної короткосяжної взаємодії (один з потенціалів (5.6.43)–(5.6.45) із  $u_v(r) = -\alpha/r$ ) дає паралельний зсув усіх траєкторій Редже вліво (пони-

жує маси мезонів). Величина зсуву  $-\delta_3\alpha a$ , де  $\delta_3 \sim O(1)$ , залежить від конкретного потенціалів; для мінімального лінійного (5.6.47) і різних кулонівських членів (5.6.43), (5.6.45), (5.6.45)  $\delta_3 = 2, 3, 5/2$  відповідно.

Для мінімального лінійного потенціалу (5.6.47) зі статичною кулонівською поправкою (5.6.43) отримано оптимальних значеннях параметрів моделі:  $a = 0.228 \text{ GeV}^2$ ,  $\alpha = 2.7$ ,  $m_1 = m_2 = 0.275 \text{ GeV}$ . Картина в цілому подібна на ту, що отримана в рамках точно розв'язної моделі VI п.5.5.2 (рис. 5.4), з деякими відмінностями у відтворенні радіальних збуджень (на дочірніх траекторіях). Маси кварків близькі до конституентних значень. Слід, однак, відзначити занадто велике значення для  $\alpha$ .

**BR).** У випадку (5.6.48)  $k = \sqrt{23 - \sqrt{17}}(7 + \sqrt{17})^2/128 \approx 4.2$  узгоджується з вимогою 2 на с. 59;  $\varsigma = 0$  забезпечує точне  $\ell s$ -виродження;  $\varkappa = \sqrt{102 + 26\sqrt{17}}(\sqrt{17} - 3)/8 \approx 2.03$  дає майже точне  $(\ell + 2n_r)$ -виродження, з точністю 1.5%. Ці та інші параметри мало відрізняються від випадку **min**.

**ММТ).** У випадку (5.6.49)  $k = 3\sqrt{3} \approx 5.196$ , але  $\varkappa = \sqrt{3} \approx 1.732$  не дає випадкового виродження.

В окремих потенціальних моделях показана можливість конфайнменту під дією векторної далекосяжної взаємодії [311, 390, 391]. Тут в рамках  $1/j$ -розкладів для 2ЧРД були протестовані векторні потенціали (5.6.43)–(5.6.45) з ф-єю  $u_v(r) = ar$ . Статичний потенціал (5.6.43) дає незадовільний результат, якісно тотожній і кількісно близький до випадку (5.6.49). В інших випадках (5.6.44), (5.6.45) нахил  $k > 16$  більш як у двічі перевищує бажаний, і різний для різних спінових станів  $i = A, 0, -, +$  (тобто траекторії не паралельні).

## 5.7. Висновки

Виходимо із класичної теоретико-польової моделі двох (кількох) ферміонних полів, що взаємодіють через довільну суперпозицію (псевдо) скалярної, векторної і тензорної взаємодій. За відсутності (або нехтуванні) вільних квантів для бозонних полів-носіїв взаємодії знайдено вирази у термінах відповідних симетричних

функцій Гріна та струмів ферміонних джерел. В такий спосіб отримано частково редуковану теорію поля (ЧРТП), що описується ефективним нелокальним лагранжіаном у термінах лише ферміонних полів матерії.

Шляхом квазірелятивістичного розкладу та низки еквівалентних перетворень редукований лагранжіан наближено зведене до локального вигляду, що дає змогу перейти до гамільтонового опису і прокvantувати теорію.

Характерною рисою підходу є те, що гамільтоніан редукованої теорії має точні кілька-ферміонні стани, якщо нетрадиційно означити т.зв. "порожній" вакуумний стан (5.1.11). Тому у даній роботі двоферміонна задача постає як задача на власні стани і власні значення енергії. Отримано релятивістичне хвильове рівняння для системи 2-х ферміонів з довільною суперпозицією (псевдо) скалярної, векторної та тензорної взаємодії. Воно має вигляд 2ЧРД з двочастинковим потенціалом  $U = U^{(0)} + U^{(1)}$ , де окрім статичного члена  $U^{(0)}$ , що враховує лише лоренцівську структуру взаємодії, міститься член  $U^{(1)}$ , що враховує запізнення у 1-му нетривіальному наближенні.

Потенціали (5.2.16)-(5.2.27) та їх суперпозиції є досить загальними, і можуть служити для опису різних систем: двонуклонних, двокваркових і мюоно-подібних атомних систем. Останній випадок (мюонію) відповідає потенціалу Брайта. У даній роботі його отримано як  $U_B = U_v^{(0)} + U_v^{\parallel}$  з  $G_v = -\alpha/r$ , причому відтворено як при калібруванні Кулона в п.5.1.2, так і Лоренца в п.5.2.2.

Випадок скалярної взаємодії досліджено Чілдерсом [84]. Фактично, його рія (3.7) тотожне представленому в (5.2.20)-(5.2.21) результату  $U_s^{(0)} + U_s^{(1)}$  із сутокулонівською взаємодією  $G_s \propto 1/r$  і  $Q_s \propto r$ . Але тут ще й знайдено загальний вигляд потенціалів для довільної суперпозиції (псевдо) скалярної, векторної та тензорної взаємодій із врахуванням членів запізнення.

В літературі часто розглядаються двоферміонні задачі з емпіричною формою потенціалів. Наприклад, в [85, 88] та ін. введено скалярну утримну взаємодію з т.зв. мінімальним зв'язком:  $(\beta_1 + \beta_2)r$  (де є сума  $\beta$ -матриць замість добутку, як у виразі (5.2.20) для  $U_s$ ). Сименог і Туровський в [90] означають псевдо-скалярний потенціал як  $\alpha_1 \beta_1 \cdot \alpha_2 \beta_2 V_p(r)$ , на відміну від отриманого тут

$U_p = \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \beta_1 \gamma_1^5 \beta_2 \gamma_2^5 G_p(r)$ . Варто зазначити, що формули (5.2.16)–(5.2.27) виведено (а не означені) на підставі реформульованої КТП.

Дискусійним залишається питання – чи усі отримані тут члени запізнення дають внесок у 1-му нетривіальному наближенні? Дійсно, поперечний член запізнення  $U_v^\perp$  векторної взаємодії є квадратичним щодо  $\alpha$ -матриць. Якщо скористатись оцінкою  $\alpha \sim 1/c$ , вжитою у даній роботі, то цей член  $\sim 1/c^4$  є нехтувано малим. З іншою, поздовжньою поправкою  $U_v^\parallel$  потенціал  $U_v^{(0)} + U_v^\parallel$  (із  $G_v = -\alpha/r$ ) збігається із потенціалом Брайта (1.1.3), а без  $U_v^\parallel$  – із потенціалом Едингтона-Ганта (1.1.4).

З іншого боку, оцінка  $\alpha \sim 1/c$  пов’язана із тим фактом, що  $\alpha$  має лише позадіагональні елементи, і тому змінює місцями малі та великі компоненти хвильової функції. Те саме стосується і матриць  $\gamma$ ,  $\gamma^5$  тощо. Але добутки цих матриць ще далі рухають компоненти, і можуть повернути велику компоненту на її вихідне місце. З цього погляду добутки  $\alpha$ -матриць слід оцінювати швидше як 1, ніж як  $1/c^2$ . Ця неоднозначність не постає у звичній КТП, у якій оператори хвильових рівнянь (таких, як Салпітера тощо), що містять матриці Дірака, проєктуються на додатньо-енергетичні стани. Тому члени позадіагональних операторів занулюються. У даному підході (з "порожнім" вакуумом) додатньо- і від’ємно-енергетичні стани змішуються між собою. Тому добутки позадіагональних операторів треба придушувати “руками”, тобто із використанням оцінки  $\alpha \sim 1/c$ .

Розмаїття потенціалів у 2ЧРД та їх використання у задачах із сильним зв’язком робить актуальним розвиток непертурбативних методів розв’язування цього рівняння. Тут, услід за роботами [81–83, 86, 90] розвинuto і вдосконалено техніку радіальної редукції 2ЧРД із локальним обертово-інваріантним потенціалом загального вигляду [219]. Він параметризується 48-ма (дійсними за умови ермітовості) функціями від  $r$ , і тут представлений у компактному матричному вигляді. Завдяки обертовій інваріантності рівняння здійснено його радіальну редукцію, що приводить до системи 8-ми (4-х у випадку  $j = 0$ ) пов’язаних між собою звичайних диференційних рівнянь 1-го порядку для радіальних компонент хви-

льової функції. Матриця коефіцієнтів біля похідних є виродженою. Це дозволяє виразити половину компонент хвильової функції через решту, для якої отримати невироджену систему 4-х (2-х у випадку  $j = 0$ ) рівнянь 1-го порядку, а потім – 2-х рівнянь 2-го порядку. У коефіцієнтах цих систем як правило з'являються нефізичні особливості – полюси у деяких залежностях від енергії точках  $r_E$  (відсутні у вихідному потенціалі), які роблять звичайну краєву задачу (з умовами в точках  $r = 0, \infty$ ) математично некоректною. Зміна краєвих умов (шляхом, наприклад, перенесення їх у точки  $r_E$ ) може привести до відсутності зв'язаних станів для утримних потенціалів.

Усі ці особливості стосуються і рівняння Брайта. Винятком є випадок  $j = 0^+$ ,  $m_1 = m_2$ , що відповідає парапозитронію. Для цього випадку редуковане р-ня є регулярним, і може бути розв'язане числово. Отриманий тут числовий результат показує, що залежність енергії  $E$  від константи взаємодії  $\alpha$  якісно подібна до випадку 1ЧРД з кулонівським потенціалом. При малих значеннях  $\alpha$  власні значення енергії, отримані числово, дуже добре узгоджуються з пертурбативним спектром. Але далі  $E(\alpha)$  усе швидше монотонно спадає до  $E(\alpha_c) > 0$ , коли  $\alpha$  прямує до критичного значення  $\alpha_c$ . В роботі отримано значення  $\alpha_c = 2/\sqrt{3}$  (у випадку 1ЧРД  $\alpha_c = 1$ , для часоасиметричної моделі  $\alpha_c = \frac{1}{2}$ ). Випадок великих значень  $\alpha \lesssim \alpha_c$  сьогодні актуальний у зв'язку із дослідженням багатозарядній іонів.

Структура редукованої системи 2-го порядку дозволяє вказати широкий клас потенціалів (параметризований 14-ма функціями), вільних від нефізичних особливостей. У цьому класі знайдено сім'ю точно розв'язних моделей, що узагальнюють відомі діраківські осцилятори [108, 110, 292]. Зокрема, моделі IV і V є 6-параметричними розширеннями осциляторної моделі [108].

5-параметричну модель VI запропоновано як розв'язну потенціальну модель легких мезонів. Певний вибір параметрів веде до лінійних  $\ell s$ -та випадково  $(\ell + 2n_r)$ -вироджених траекторій Редже. Цим відтворено ідеалізовані спектри мезонів (див. с. 59), отримані раніше в рамках ПРОМ [27, 284, 290]. Відповідний

двоферміонний потенціал виявився неочікувано складним.

Для адекватного опису мас легких ( $\pi$ - $\rho$ )-мезонів доводиться для мас кварків покласти  $m^2 < 0$ . Вибір параметрів у цьому випадку не дає точного виродження, так що траекторії Редже є асимптотично паралельними прямыми, але дещо викривленими внизу. Модель VI добре описує стани на головних траекторіях, гірше – на дочірніх. Причиною цього мабуть є брак дочірніх траекторій при випадковому виродженню  $(\ell + 2n_r)$ -типу. Більш прина гідне виродження  $(\ell + n_r)$ -типу поки не вдається отримати в рамках 2ЧРД. Хоча у нерелятивістичній границі міжкварковий потенціял моделі VI зникає, вона виявилася придатною і для опису важких мезонів. В роботі [111] цю модель застосовано до мезонів, що містять як легкі, так і дивні (s) і важкі (c, b) кварки, що дало змогу авторам успішно описати більше 50-ти мезонних станів.

2ЧРД із потенціалами скалярного та векторного типу вважаються фізично змістовнішими кандидатами на релятивістичні потенціальні моделі. Кілька версій таких потенціалів, локальних у координатному представленні, відомі з літератури. Однак відповідні 2ЧРД не є точно інтегровні, і загалом мають згадані вище нефізичні особливості. Щоб обійти ці труднощі, запропоновано наближений метод  $1/j$ -розкладів.

Метод узагальнює техніку  $1/\ell$ -розкладів, застосовних до радіального рівняння Шредінгера. У даному випадку 2ЧРД зведено до двох зв'язаних р-нь квазі-потенціального типу, структура яких вимагає істотної модифікації техніки. Інші зміни пов'язані із тим, що рівняння представляють нелінійну спектральну задачу. З фізичного погляду метод застосовний до випадку сильного зв'язку, і нечутливий, принаймні у нижніх порядках теорії збурень, до крайових особливостей задачі.

Тут метод  $1/j$ -розкладів застосовано до 2ЧРД із кількома версіями скалярного лінійного та векторного кулонівського потенціалів, відомих з літератури. Усі вони дають у нерелятивістичній границі корнельський потенціал (1.2.2), що використовується для опису важких мезонів. Тому ці приклади можуть претендувати

на роль універсальних потенціальних моделей.

В усіх випадках отримано аналітичні вирази для спектру енергії в 0-му наближенні методу, які описують прямі або дещо викривлені паралельні траєкторії Редже. Кут їх нахилу узгоджується з параметрами нерелятивістичної моделі для усіх версій скалярного лінійного потенціалу. Але потенціял Матвеєва-Мурадян-Тавхелідзе (5.6.48) (запропонованого в [97] для опису легких мезонів), як і лінійний потенціал Юкави (5.6.46), не дає  $\ell s$ -виродження траєкторій. Воно наближено забезпечується мінімальним лінійним потенціалом (5.6.47), а точно – потенціялом Брауна-Рейвенгола (5.6.49). В обидвох цих випадках  $\ell s$ -виродження, а також деяка кривина головних траєкторій Редже дає хороший опис орбітально збуджених станів  $(\pi\rho)$ -сім'ї мезонів. Однак випадкове виродження  $(\ell + 2n_r)$ -типу приводить до браку дочірніх траєкторій (як і в моделі VI) для деяких радіальних збуджень цієї сім'ї.

Моделі з векторними лінійними потенціалами взагалі не забезпечують випадкового виродження, дають завеликий нахил траєкторій Редже, а деякі з них породжують непаралельні траєкторії.

Спектр для мінімальної лінійної взаємодії узгоджується з отриманими раніше числовими результатами в [86–88], де однак для легких мезонів отримано завищені значення мас. В даній роботі ця проблема усувається врахуванням векторної кулонівської взаємодії. Щодо лінійного потенціалу Брауна-Рейвенгола, то в строгому математичному сенсі він не дає зв'язаних станів через невідповідну поведінку коефіцієнтів радіальних рівнянь при  $r \rightarrow \infty$  [97]. Отриманий тут псевдо-пертурбативний спектр описує квазізв'язані стани, які утримуються ефективним потенціальним бар'єром (що зводиться до ями у нерелятивістичній границі).

## РОЗДІЛ 6

# НЕСТАНДАРТНІ ТА НЕЛІНІЙНІ МОДЕЛІ ЧРТП

В основі частково редукованої теорії поля (ЧРТП) є редукція потенціалів полів-носіїв взаємодії у класичних лагранжіанах квантової теорії поля. Процедура редукції приводить до варіанту нелокальної теорії поля, гамільтонізація та квантування якої є нетривіальними. У попередньому розділі ЧРТП наблизено переформульовувалась до локальної форми шляхом квазірелятивістичного розкладу ефективних нелокальних лагранжіанів за запізненням, гамільтонізації та квантування у координатному просторі, та означення "порожнього" вакууму. Це дало змогу в рамках частково редукованої спінорної електродинаміки та подібних теорій отримати рівняння Брайта і його узагальнення як замкнуту задачу на зв'язані стани 2-х діраківських частинок.

У цьому розділі буде застосовано іншу процедуру, запропоновану Лльозою та Вівесом [105] для гамільтонізації нелокальних гамільтоніанів. Процедура має формальний характер, і вимагає знання явних розв'язків польових рівнянь руху, які можна отримати в імпульсному представленні пертурбативно. В цьому ж представленні можна отримати гамільтоніан та здійснити квантування із стандартним означенням вакууму. Тепер 2-х, 3-х і N-частинкові стани не можуть бути власними станами гамільтоніану, але їх можна взяти як анзаци у квантово-польовій версії варіаційного наближення. У такий спосіб будуть отримані 2- і 3-частинкові хвильові рівняння на зв'язані стани.

Метод буде використано у кількох нестандартних та нелінійних моделях ЧРТП, стандартний квантово-польовий опис яких є непослідовний, або пов'язаний із великими труднощами.

Результати цього розділу опубліковані в статтях [11, 17–21, 23], матеріалах і тезах конференцій [33, 40–47], та препрінтах [179–182, 185].

## 6.1. Варіаційне гамільтонове тлумачення частково редукованих моделей типу Юкави

У цьому підрозділі розглядається послідовна процедура гамільтонізації та квантування частково редукованих (ЧР) лагранжіанів, що ґрунтуються на розкладах за константою взаємодії. окрему увагу приділено збережним величинам, що відповідають пуанкарє-інваріантності нелокального лагранжіану.

Спочатку процедура ілюструється на прикладі скалярної ЧР-моделі Юкави, для яких в 1-му наближенні отримано варіаційне 2-частинкове хвильове рівняння. Тоді розглядається узагальнення моделі Юкави, в якій функцію Гріна р-ня Кляйна-Гордона (для поля-медіатора) замінено на довільне коваріантне симетричне ядро, в залежності від властивостей взаємодії. Це ядро можна обрати феноменологічно, або вивести з деякої ефективної КТП. Воно може виникати з деяких нестандартних класичних теорій поля, послідовне квантування яких є складним або непослідовним. Тут будуть подані приклади, а деякі з них будуть розвинуті в наступних підрозділах.

### 6.1.1. Скалярна модель Юкави у стандартному і частково редукованому формулюванні

У даній моделі матерія описується "зарядженими" (комплексними) скалярними полями  $\phi_a(x)$  кількох сортів ( $a = 1, 2, \dots$ ) з масами  $m_a$ , що взаємодіють через дійсне скалярне поле  $\chi(x)$ . Густота лагранжіану системи:

$$\mathcal{L} = \sum_a \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_Y \quad (6.1.1)$$

(далі – просто лагранжіан) містить:  $\mathcal{L}_a$  – стандартні лагранжіани вільних полів  $\phi_a(x)$ , означені в (6.1.7),  $\mathcal{L}_\chi$  – лагранжіан поля-медіатора  $\chi(x)$ , і член взаємодії Юкави  $\mathcal{L}_Y = \rho\chi$  із скалярним струмом  $\rho = \sum_a g_a \phi_a^* \phi_a$ .

Для моделі Юкави лагранжіан  $\mathcal{L}_\chi$  поля-медіатора  $\chi(x)$  маси  $m$  має вигляд:

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2}\{(\partial_\mu\chi)(\partial^\mu\chi) - m^2\chi^2\}. \quad (6.1.3)$$

Варіація дії  $I = \int d^4x \mathcal{L}(x)$  веде до зв'язаної системи польових рівнянь

$$(\square + m_a^2)\phi_a = g_a\phi_a\chi, \quad (\square + m_a^2)\phi_a^* = g_a\phi_a^*\chi, \quad (6.1.4)$$

$$(\square + m^2)\chi = \rho. \quad (6.1.5)$$

Рівняння (6.1.5) можна розв'язати точно [71, 72]:

$$\chi(x) = [D_{\text{sym}} * \rho](x) + \chi_0(x) \equiv \int d^4x' D_{\text{sym}}(x - x'; m)\rho(x') + \chi_0(x), \quad (6.1.6)$$

де  $D_{\text{sym}}(x - x'; m)$  – симетрична ф-я Гріна (1.3.27, с.87) р-ня Кляйна-Гордона (6.1.5), а  $\chi_0(x)$  – однорідний розв'язок цього р-ня. Підставивши розв'язок у вихідний інтеграл дії і поклавши  $\chi_0 = 0$  (відсутність вільних "хіонів"), отримаєм ЧР-лагранжіан, залежний лише від полів матерії  $\phi_a$ .

Надалі ф-ю Гріна  $D_{\text{sym}}(x - x'; m)$  замінимо довільним симетричним пуанкарє-інваріантним ядром  $K(x - x') = K(x' - x)$ . Нелокальна лагранжева густина

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_a \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_{\text{int}} \\ &= \sum_a \{(\partial_\mu\phi_a^*)(\partial^\mu\phi_a) - m_a^2\phi_a^*\phi_a\} + \frac{1}{2} \int d^4x' \rho(x)K(x - x')\rho(x'), \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

може бути корисною для опису різноманітних систем частинок. Наприклад, якщо  $K(x - x') \propto G(x - x')$  є розв'язком рівняння  $\square^2 G(x - x') = \delta(x - x')$ , то модель дає утримну взаємодію кварків у гадронах (див. п. 3.1.5).

### 6.1.2. Збережні величини

Пуанкарє-інваріантність моделі Юкави веде до існування збережного тензору енергії-імпульсу  $T^{\mu\nu}$  та тензору моменту імпульсу  $M^{\mu\lambda\sigma} = T^{\mu\lambda}x^\sigma - T^{\mu\sigma}x^\lambda$ . Вона породжують відповідні збережні величини: 4-імпульс  $P^\mu = \int d^3x T^{0\mu}$  та момент імпульсу  $J^{\lambda\sigma} = \int d^3x M^{0\lambda\sigma}$  (тут  $\mu, \nu, \lambda, \sigma = 0, \dots, 3$ ). Тензор моменту імпульсу можна записати так:

$$T^{\mu\nu} = \sum_a T_a^{\mu\nu} + T_\chi^{\mu\nu} + T_Y^{\mu\nu}, \quad (6.1.8)$$

де  $T_a^{\mu\nu} = \{(\partial^\mu \phi_a^*)(\partial^\nu \phi_a) + (\partial^\nu \phi_a^*)(\partial^\mu \phi_a)\} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_a$ ,

$$T_\chi^{\mu\nu} = (\partial^\mu \chi)(\partial^\nu \chi) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_\chi, \quad T_Y^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \rho \chi.$$

Підстановка розв'язку  $\chi = D * \rho$  в р-ня (6.1.8) дає збережні величини для ЧР-моделі. Ці вирази не є задовільні з кількох причин; зокрема, не очевидно, як їх узагальнити на випадок довільного ядра. Тому, їх доцільно перетворити до іншого вигляду.

Врахування польових рівнянь (6.1.5) дозволяє отримати рівність  $\partial_\mu T_\chi^{\mu\nu} = \rho \partial^\nu \chi$ , яка, після інтегрування за усім 3-простором дає

$$\int d^3x \partial_\mu T_\chi^{\mu\nu} = \frac{d}{dt} \int d^3x T_\chi^{0\nu} = \int d^3x \rho \partial^\nu \chi. \quad (6.1.9)$$

Подальше інтегрування за часом і вживання (6.1.6) дає результат:

$$\begin{aligned} \int d^3x T_\chi^{0\nu} &= \int_{-\infty}^t dx^0 \int d^3x \rho \partial^\nu \chi \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^t \int_t^\infty - \int_t^\infty \int_{-\infty}^t \right] dx^0 dx'^0 \int d^3x \int d^3x' \rho(x) \{ \partial^\nu D_{\text{sym}}(x - x') \} \rho(x'). \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

Остання рівність вірна завдяки кососиметричності ядра:  $\partial^\nu D_{\text{sym}}(x - x') = -\partial^\nu D_{\text{sym}}(x' - x)$  яка, у свою чергу, є наслідком симетричності  $D_{\text{sym}}(x - x')$ .

Обчислення інших членів 4-імпульсу є безпосереднім, зокрема

$$\int d^3x T_Y^{0\mu} = \eta^{0\mu} \int d^3x \int d^4x' \rho(x) D_{\text{sym}}(x - x') \rho(x'). \quad (6.1.11)$$

Тепер 4-імпульс є лінійним за "хіонним" пропагатором. Навіть більше, заміна  $D_{\text{sym}}(x - x')$  на  $K(x - x')$  у р-нях (6.1.10) і (6.1.11) дає 4-імпульс для узагальненої моделі, означеної густинною лагранжіану (6.1.7).

Тлумачення моменту імпульсу є подібним, хоч громіздкішим [20]. Упустимо деталі, і запишемо остаточні вирази для 4-імпульсу та моменту імпульсу для

узагальненої моделі:

$$\begin{aligned} P^\mu(t) = & \sum_a \int d^3x T_a^{0\mu}(x)|_{x^0=t} - \eta^{0\mu} \int d^3x \int d^4x' \rho(x) K(x-x') \rho(x')|_{x^0=t} \\ & - \int d^4x \int d^4x' \Xi(x^0-t, x'^0-t) \rho(x) \{\partial^\nu K(x-x')\} \rho(x'), \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

$$\begin{aligned} J^{\lambda\sigma}(t) = & \sum_a \int d^3x T_a^{0[\lambda}(x)x^{\sigma]}|_{x^0=t} - \int d^3x \int d^4x' \rho(x) \eta^{0[\lambda} x^{\sigma]} K(x-x') \rho(x')|_{x^0=t} \\ & - \int d^4x \int d^4x' \Xi(x^0-t, x'^0-t) \rho(x) \{\partial^{[\lambda} K(x-x') x^{\sigma]}\} \rho(x'). \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

В р-нях (6.1.13) вжито позначення  $a^{[\mu} b^{\nu]} \equiv a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu$ , а сходинкова ф-я  $\Xi(t, s)$  означена в (4.2.10, с.208). Знову, для виведення р-ня (6.1.13) враховано кососиметрію ядра  $\partial^{[\lambda} K(x-x') x^{\sigma]} = -\partial^{[\lambda} K(x'-x) x'^{\sigma]}$ .

### 6.1.3. Гамільтонова структура нелокального лагранжіану

Член взаємодії  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  у лагранжіані (6.1.7) є функціоналом (а не функцією) польових змінних. Тому він представляє нелокальну теоретико-польову модель.

Нелокальні польові теорії виникли як спроба уникнути ультрафіолетові розбіжності [380]; їх вивчення розвинулося у самостійну гілку теоретичної фізики [392], що об'єднує різноманітні моделі частинок, методи перенормування [393, 394] тощо. Результати формулюються переважно на мові функціонального інтегрування, а їх тлумачення не є простим.

У цьому підрозділі вжито тлумачення, якомога близьке до канонічного квантування, тобто модель буде перекладено на гамільтонову мову на класичному рівні, а вже тоді прокvantовано. Це дасть змогу відділити труднощі, зумовлені нелокальністю, від інших загальних проблем квантування.

Стандартний перехід до гамільтонового опису непридатний через нелокальність моделі. Тому буде вжито процедуру, розроблену для гамільтонізації фок-керівських інтегралів дії [340], та узагальнену Лльозою і Вівесом для довільних нелокальних лагранжіанів [105].

Ідея гамільтонізації нелокальних лагранжіанів полягає в наступному. Нехай

лагранжіан  $L(t, [q])$  є функціоналом динамічної змінної  $q(t)$ . Цю змінну замінюють на "польову" зміну  $Q(t, \lambda)$  означену на 2-вимірному (часо)  $\times$  ("просторі"), а новий лагранжіан  $L(t, Q)$  розглядається як локальний за часовою змінною  $t$  і нелокальний за "просторовою" змінною  $\lambda$ . Цей опис доповнюється в'яззю  $(\partial_t - \partial_\lambda)Q(t, \lambda) = 0$ . Перехід до канонічного опису цієї нової системи здійснюється згідно з діраківським формалізмом з в'язями [220]. Із в'язі маємо  $Q(t, \lambda) = q(t + \lambda)$ . Навіть більше, гамільтонів потік є дотичним до підмноговиду фазового простору, означеного вихідними рівняння Ойлера-Лагранжа  $\delta \left\{ \int dt' L(t', [q]) \right\} / \delta q(t) = 0$ . тому симплектичну структуру і гамільтоніан можна отримати "pull-backвідображенням на цей підмноговид.

У випадку теорії поля вихідні поля  $\phi(x) = \phi(x^0, \mathbf{x})$  на (1+3)-просторі Мінковського  $\mathbb{M}_4$  замінюються на допоміжні змінні (2+3)-вимірного простору, що разом з гамільтоновою структурою знову редукується на  $\mathbb{M}_4$ . Теоретико-польова модифікація процедури Лльози і Вівеса дозволяє одразу записати вирази для форми Ліувіля та гамільтоніану:

$$\Theta(t) = \int d^4x \int d^4x' \Xi(x^0 - t, x'^0 - t) \times \times \sum_a \left\{ \mathcal{E}_a(x', x; [\phi]) \tilde{\delta}\phi_a(x) + {}_* \mathcal{E}_a(x', x; [\phi]) \tilde{\delta}\phi_a^*(x) \right\}, \quad (6.1.14)$$

$$H(t) = \int d^4x \int d^4x' \Xi(x^0 - t, x'^0 - t) \times \times \sum_a \left\{ \mathcal{E}_a(x', x; [\phi]) \dot{\phi}_a(x) + {}_* \mathcal{E}_a(x', x; [\phi]) \dot{\phi}_a^*(x) \right\} - L(t); \quad (6.1.15)$$

тут  $\tilde{\delta}\phi_a(x)$  є функціональним зовнішнім диференціалом польової змінної [105],  $\dot{\phi}_a(x) = \frac{\partial \phi_a(x)}{\partial x^0}$ ,  $\mathcal{E}_a(x, x'; [\phi]) = \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta \phi_a(x')}$ ,  ${}_* \mathcal{E}_a(x, x'; [\phi]) = \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta \phi_a^*(x')}$ ,

а  $L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(x)|_{x^0=t}$  – лагранжіан системи.

Форма Ліувіля визначає симплектичну форму:  $\Omega = \tilde{\delta}\Theta$ , а отже, і дужки Пуасона. Гамільтоніан  $H$  генерує еволюцію системи у термінах дужок Пуасона. Зауважимо, що гамільтоніан (6.1.15), обчислений для лагранжевої густини (6.1.7), тотожній до енергії  $E = P^0$ , даної р-ням (6.1.12).

Рівності (6.1.14) і (6.1.15) мають лише формальне значення, допоки інтегрування не здійснене явно. Для цього потрібен явний розв'язок польових рівнянь частково редукованої теорії (6.1.5). Оскільки ці рівняння не є прості і тим більше точно розв'язні, необхідно звернутися до апроксимаційної схеми, описаної далі.

#### 6.1.4. Пертурбативна схема і 1-ше наближення

Тут буде вжито формальний розклад за константою взаємодії. Замінимо константи взаємодії  $g_a$  на  $g_a\sqrt{\varepsilon}$  у частково редукованих рівняннях поля (тобто у р-нях (6.1.4) з виразами (6.1.6) у правій частині). Будемо шукати розв'язок у вигляді  $\phi_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \phi_a^{(n)}(x)$ . Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових ступенів  $\varepsilon$ , отримаємо нескінчений ланцюжок рівнянь:

$$(\square + m_a^2) \phi_a^{(n)}(x) = J_a^{(n)}(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.1.16)$$

де  $J_a^{(0)}(x) = 0$ , а  $J_a^{(n)}$  ( $n \geq 1$ ) – функціонали від  $\phi_a^{(m)}$  із  $m \leq n - 1$ . Т.ч., р-ня (6.1.16) утворюють ієархію, яку можна розв'язати ітеративно, від  $n = 0$ .

Р-ня для  $\phi_a^{(0)}$  є однорідним р-ням Кляйна-Гордона, розв'язок якого представляє пласкі хвилі. Усі функції вищого порядку  $\phi_a^{(n)}$  можна знайти з допомогою функції Гріна  $D_a(x, x') = D(x, x'; m_a)$  цього рівняння:

$$\phi_a^{(n)}(x) = \int d^4x' D_a(x, x') J_a^{(n)}(x'), \quad (6.1.17)$$

Іх зручно обрати так:  $D_a(x, x') = D_{\text{sym}}(x - x'; m_a) + \frac{1}{2}\text{sgn } x^0 D_{\text{PJ}}(x - x'; m_a)$ , де  $D_{\text{PJ}}(x - x'; m_a)$  – функція Паулі-Йордана [395]. Тоді розв'язки  $\phi_a^{(n)}$  для усіх  $n \geq 1$  є дотичні до  $\phi_a^{(0)}$  в момент  $x^0 = 0$ :

$$\phi_a^{(n)}(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \dot{\phi}_a^{(n)}(0, \mathbf{x}) = 0, \quad n \geq 1, \quad (6.1.18)$$

так що

$$\phi_a(\mathbf{x}) \equiv \phi_a(0, \mathbf{x}) = \phi_a^{(0)}(0, \mathbf{x}), \quad \dot{\phi}_a(\mathbf{x}) \equiv \dot{\phi}_a(0, \mathbf{x}) = \dot{\phi}_a^{(0)}(0, \mathbf{x}). \quad (6.1.19)$$

Вживання розкладів для  $\phi_a(\mathbf{x})$  у п.ч. р-нь (6.1.14), (6.1.15) і (6.1.12) дає ряди для форми Ліувіля  $\Theta$ , гамільтоніану  $H$  та імпульсу  $\mathbf{P}$ :

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Theta^{(n)}, \quad H = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n H^{(n)}, \quad \mathbf{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{P}^{(n)}. \quad (6.1.20)$$

Симплектичну форму та інші збережні величини можна обчислити подібно. Після обчислення усіх коефіцієнтів формальних рядів (до бажаного ступеня) параметр  $\varepsilon$  слід покласти рівним 1.

Оскільки усі величини в (6.1.20) обчислюються у спільний момент часу, то нехай  $t = 0$ . Це відповідає картина Шредингера на квантовому рівні.

Легко показати з допомогою (6.1.19), що в 0-му наближенні матимемо:

$$\Theta^{(0)} \equiv \Theta^{\text{free}}[\phi] = \sum_a \int d^3x \left\{ \dot{\phi}_a^*(\mathbf{x}) \tilde{\delta} \phi_a(\mathbf{x}) + \dot{\phi}_a(\mathbf{x}) \tilde{\delta} \phi_a^*(\mathbf{x}) \right\}, \quad (6.1.21)$$

$$\begin{aligned} H^{(0)} \equiv H^{\text{free}}[\phi] = \sum_a \int d^3x & \left\{ \dot{\phi}_a^*(\mathbf{x}) \dot{\phi}_a(\mathbf{x}) + (\nabla \phi_a^*(\mathbf{x})) \cdot (\nabla \phi_a(\mathbf{x})) \right. \\ & \left. + m_a^2 \phi_a^*(\mathbf{x}) \phi_a(\mathbf{x}) \right\}, \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

$$\mathbf{P}^{(0)} \equiv \mathbf{P}^{\text{free}}[\phi] = - \sum_{a=1}^2 \int d^3x \left\{ \dot{\phi}_a^*(\mathbf{x}) \nabla \phi_a(\mathbf{x}) + \dot{\phi}_a(\mathbf{x}) \nabla \phi_a^*(\mathbf{x}) \right\}, \quad (6.1.23)$$

Зауважимо, що в цьому наближенні форма Ліувіля і, отже, симплектична форма мають канонічний вигляд. Тому змінні  $\{\phi_a(\mathbf{x}), \dot{\phi}_a(\mathbf{x})\}$  і  $\{\phi_a^*(\mathbf{x}), \dot{\phi}_a^*(\mathbf{x})\}$  утворюють канонічно-спряжені пари, що параметризують фазовий простір.

Поправки 1-го порядку можна записати так:

$$\Theta^{(1)} \equiv \Theta^{\text{nc}}[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' \Xi(x^0, x'^0) \rho^{(0)}(x') K(x' - x) \tilde{\delta} \rho^{(0)}(x), \quad (6.1.24)$$

$$\begin{aligned} H^{(1)} \equiv H^{\text{nc}}[\phi] + H^{\text{int}}[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' \Xi(x^0, x'^0) \rho^{(0)}(x') K(x' - x) \dot{\rho}^{(0)}(x) \\ - \frac{1}{2} \int d^3x \int d^4x' \rho^{(0)}(x') K(x' - x) \rho^{(0)}(x)|_{x^0=0}, \end{aligned} \quad (6.1.25)$$

$$\mathbf{P}^{(1)} \equiv \mathbf{P}^{\text{nc}}[\phi] = - \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' \Xi(x^0, x'^0) \rho^{(0)}(x') K(x' - x) \nabla \rho^{(0)}(x). \quad (6.1.26)$$

У цьому наближенні змінні  $\phi_a, \dot{\phi}_a, \phi_a^*, \dot{\phi}_a^*$  вже не є канонічними – через член  $\Theta^{(1)} \equiv \Theta^{\text{nc}}$  форми Ліувіля (це вказано позначкою "nc"). Члени  $H^{\text{nc}}$  і  $\mathbf{P}^{\text{nc}}$  мають те ж походження.

Щоб обчислити  $\Theta^{(1)}$  і  $H^{(1)}$  явно, зручно розкласти кожне комплексне поле у пару дійсних полів:

$$\phi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{a1} + i\phi_{a2}), \quad \phi_a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{a1} - i\phi_{a2}). \quad (6.1.27)$$

У 0-му наближенні отримаємо:

$$\phi_{a\alpha}^{(0)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{A=\pm} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{k_{a0}}} a_{a\alpha k}^A e^{i A k_a \cdot x}, \quad a = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2, \quad (6.1.28)$$

де 4-імпульс  $k_a$  означене на масовій оболонці  $a$ -ї частинки:

$$k_a = (k_{a0}, \mathbf{k}), \quad \text{де} \quad k_{a0} = \sqrt{m_a^2 + \mathbf{k}^2} \stackrel{(1.1.6)}{\equiv} E_a(\mathbf{k}). \quad (6.1.29)$$

Для стисності позначень замінимо подвійний індекс  $a\alpha$  на єдиний  $a$  ( $a = 1, \dots, 4$ ) у проміжних обчисленнях. Маємо:

$$\Theta^{\text{free}} = \sum_a \int d^3 x \dot{\phi}_a(\mathbf{x}) \tilde{\delta} \phi_a(\mathbf{x}) = \frac{i}{2} \sum_a \sum_{AB} \int d^3 k A a_{ak}^A \tilde{\delta} a_{a,-Abk}^B, \quad (6.1.30)$$

$$\begin{aligned} H^{\text{free}} &= \frac{1}{2} \sum_a \int d^3 x \left\{ \dot{\phi}_a^2(\mathbf{x}) + (\nabla \phi_a(\mathbf{x}))^2 + m_a^2 \phi_a^2(\mathbf{x}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_a \sum_A \int d^3 k k_{a0} a_{ak}^A a_{ak}^{-A}, \end{aligned} \quad (6.1.31)$$

$$\mathbf{P}^{\text{free}} = - \sum_a \int d^3 x \dot{\phi}_a(\mathbf{x}) \nabla \phi_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_a \sum_A \int d^3 k \mathbf{k} a_{ak}^A a_{ak}^{-A}; \quad (6.1.32)$$

тут і далі великі латинські літери  $A, B, C, \dots$  набувають значень  $+, -$ . У нових позначеннях функція  $\rho(x)$ , (р-ня (6.1.5)) набуває вигляду:

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \sum_a g_a \phi_a^2(x). \quad (6.1.33)$$

Розглянемо поправки 1-го порядку до  $\Theta$  і  $H$ . В імпульсному представленні:

$$\begin{aligned} \Theta^{\text{nc}} &= -\frac{i}{2} \sum_{ab} \sum_{ABCD} \int d^3 k d^3 q d^3 u d^3 v S_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &\quad \times [\tilde{\delta} a_{ak}^A] a_{aq}^B a_{bu}^C a_{bv}^D, \end{aligned} \quad (6.1.34)$$

$$\begin{aligned} H^{\text{nc}} &= \frac{1}{2} \sum_{ab} \sum_{ABCD} \int d^3 k d^3 q d^3 u d^3 v S_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &\quad \times A k_{a0} a_{ak}^A a_{aq}^B a_{bu}^C a_{bv}^D, \end{aligned} \quad (6.1.35)$$

$$\begin{aligned} H^{\text{int}} &= \frac{1}{2} \sum_{ab} \sum_{ABCD} \int d^3 k d^3 q d^3 u d^3 v T_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &\quad \times a_{ak}^A a_{aq}^B a_{bu}^C a_{bv}^D. \end{aligned} \quad (6.1.36)$$

Тут

$$S_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{g_a g_b}{16(2\pi)^3} \frac{\delta(A\mathbf{k} + B\mathbf{q} + C\mathbf{u} + D\mathbf{v})}{\sqrt{k_{a0} q_{a0} u_{b0} v_{b0}}} \times \mathcal{P} \frac{\tilde{K}(Ak_a + Bq_a) - \tilde{K}(Cu_b + Dv_b)}{Ak_{a0} + Bq_{a0} + Cu_{b0} + Dv_{b0}}, \quad (6.1.37)$$

$$T_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\frac{g_a g_b}{16(2\pi)^3} \frac{\delta(A\mathbf{k} + B\mathbf{q} + C\mathbf{u} + D\mathbf{v})}{\sqrt{k_{a0} q_{a0} u_{b0} v_{b0}}} \times \tilde{K}(Ak_a + Bq_a), \quad (6.1.38)$$

$\mathcal{P}$  означає "в сенсі головного значення" , а

$$\tilde{K}(k) = \int d^4x e^{-ik \cdot x} K(x). \quad (6.1.39)$$

Поправку  $\mathbf{P}^{\text{nc}}$  до імпульсу можна легко отримати шляхом підстановки  $\tilde{\delta}a_{ak}^A \rightarrow iAk a_{ak}$  у р-ні (6.1.34) для  $\Theta^{\text{nc}}$ .

Як зазначено вище, польові змінні не є канонічними ні в координатному, ні в імпульсному представленні через член 1-го порядку  $\Theta^{\text{nc}}$  у формі Ліувіля. Щоб це виправити, здійснимо таке неканонічне перетворення змінних  $a \rightarrow \underline{a}$ :

$$a_{ak}^A = \underline{a}_{ak}^A + \varepsilon \sum_b \sum_{BCD} \int d^3q d^3u d^3v \frac{A}{2} S_{ab}^{-ABCD}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \underline{a}_{aq}^B \underline{a}_{bu}^C \underline{a}_{bv}^D + O(\varepsilon^2).$$

Тоді в лінійному за  $\varepsilon$  наближенні отримаємо:

$$\Theta^{\text{free}}[a] + \varepsilon \Theta^{\text{nc}}[a] = \Theta^{\text{free}}[\underline{a}] + O(\varepsilon^2), \quad (6.1.40)$$

$$H = H^{\text{free}}[a] + \varepsilon(H^{\text{nc}}[a] + H^{\text{int}}[a]) = H^{\text{free}}[\underline{a}] + \varepsilon H^{\text{int}}[\underline{a}] + O(\varepsilon^2), \quad (6.1.41)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\text{free}}[a] + \varepsilon \mathbf{P}^{\text{nc}}[a] = \mathbf{P}^{\text{free}}[\underline{a}] + O(\varepsilon^2). \quad (6.1.42)$$

Тобто у нових змінних  $\underline{a}$  форма Ліувіля стає канонічною (принаймні, у даному наближенні), гамільтоніан спрощується, а імпульс зводиться до вільночастинкового. Просторово-подібні компоненти моменту імпульсі  $J^{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) також набувають вільночастинкового вигляду, але часо-подібні компоненти  $J^{0j}$  містять члени взаємодії. Така структура канонічних генераторів групи Пуанкаре притаманна миттєвій формі релятивістичної динаміки [244], у якій параметр еволюції  $t$  є координатним часом  $x^0$  (як у даному випадку); див. також п. 1.2.8.

### 6.1.5. Канонічне квантування і двочастинкові варіаційні стани

Повернімося до подвійного індексу  $a\alpha$  (замість єдиного  $a$ , тимчасово введеного після р-ня (6.1.28)) та введемо нові комплексні польові змінні:

$$b_a = \frac{a_{a1}^- + i a_{a2}^-}{\sqrt{2}}, \quad b_a^* = \frac{a_{a1}^+ - i a_{a2}^+}{\sqrt{2}}, \quad d_a = \frac{a_{a1}^- - i a_{a2}^-}{\sqrt{2}}, \quad d_a^* = \frac{a_{a1}^+ + i a_{a2}^+}{\sqrt{2}}. \quad (6.1.43)$$

Перепишемо в цих термінах форму Ліувіля (6.1.40) з точністю до повних диференціалів, які не дають внеску у симплектичну форму. Отримаємо:

$$\Theta = i \sum_a \int d^3k \left\{ b_{ak}^* \tilde{\delta} b_{ak} + d_{ak}^* \tilde{\delta} d_{ak} \right\}. \quad (6.1.44)$$

Отже  $\{b_{ak}, b_{ak}^*\}$  і  $\{d_{ak}, d_{ak}^*\}$  є канонічно спряженими парами. У квантовому описі розглядатимемо ці змінні як оператори знищення і народження  $b_{ak}$ ,  $b_{ak}^\dagger$ ,  $d_{ak}$ ,  $d_{ak}^\dagger$ , що задовільняють стандартні комутаційні співвідношення та стандартну умову вакуумного стану [71, 72].

Квантові оператори, що відповідають гамільтоніану (6.1.41) та імпульсу (6.1.42), стають (тут  $\varepsilon = 1$ ):

$$H = H^{\text{free}} + H^{\text{int}}, \quad (6.1.45)$$

$$H^{\text{free}} = \sum_a \int d^3k k_{a0} \{ b_{ak}^\dagger b_{ak} + d_{ak}^\dagger d_{ak} \} \quad (6.1.46)$$

$$\begin{aligned} H^{\text{int}} = & - \sum_{ab} \frac{g_a g_b}{(4\pi)^3} \int \frac{d^3k d^3q d^3u d^3v}{\sqrt{k_{a0} q_{a0} u_{b0} v_{b0}}} : \left\{ \tilde{K}(u_b - v_b) \times \right. \\ & \times [\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} - \mathbf{v}) d_{ak} b_{aq} d_{bu} d_{bv}^\dagger + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{u} + \mathbf{v}) d_{ak} b_{aq} d_{bu}^\dagger d_{bv} \\ & + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} + \mathbf{u} - \mathbf{v}) d_{ak} d_{aq}^\dagger d_{bu} d_{bv}^\dagger + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{u} + \mathbf{v}) d_{ak} d_{aq}^\dagger b_{bu}^\dagger b_{bv} \\ & + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{u} + \mathbf{v}) b_{ak}^\dagger b_{aq} d_{bu} d_{bv}^\dagger + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} + \mathbf{u} - \mathbf{v}) b_{ak}^\dagger b_{aq} b_{bu}^\dagger b_{bv} \\ & + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{u} + \mathbf{v}) b_{ak}^\dagger d_{aq}^\dagger d_{bu} d_{bv}^\dagger + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} - \mathbf{v}) b_{ak}^\dagger d_{aq}^\dagger b_{bu}^\dagger b_{bv}] \\ & + \tilde{K}(u_b + v_b) [\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v}) d_{ak} b_{aq} d_{bu} b_{bv} + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{u} - \mathbf{v}) d_{ak} b_{aq} b_{bu}^\dagger d_{bv}^\dagger \\ & + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v}) d_{ak} d_{aq}^\dagger d_{bu} b_{bv} + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{u} - \mathbf{v}) d_{ak} d_{aq}^\dagger b_{bu}^\dagger b_{bv}^\dagger \\ & + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{u} - \mathbf{v}) b_{ak}^\dagger b_{aq} d_{bu} b_{bv} + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v}) b_{ak}^\dagger b_{aq} b_{bu}^\dagger b_{bv}^\dagger \\ & + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{u} - \mathbf{v}) b_{ak}^\dagger d_{aq}^\dagger d_{bu} b_{bv} + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v}) b_{ak}^\dagger d_{aq}^\dagger b_{bu}^\dagger d_{bv}^\dagger] : \end{aligned} \quad (6.1.47)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\text{free}} = \sum_a \int d^3k \mathbf{k} \left\{ b_{a\mathbf{k}}^\dagger b_{a\mathbf{k}} + d_{a\mathbf{k}}^\dagger d_{a\mathbf{k}} \right\}, \quad (6.1.48)$$

де  $\cdot$  позначає нормальне впорядкування.

Розглянемо тепер двочастинкову задачу. Почнемо з анзацу “частинка 1 + частинка 2”:  $|1+2\rangle = \int d^3p d^3q F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) b_1^\dagger(\mathbf{p}) b_2^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle$ , де  $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  – амплітуда стану. Двочастинковий сектор простору Фока не є інваріантним щодо дії гамільтоніану (6.1.45)–(6.1.47). Тому стан  $|1+2\rangle$  не може бути точним власним станом  $H$ , якою б не була ф-я  $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  (на відміну від двочастинкових станів у попередньому розділі). Будемо тлумачити цю функцію як КТП-відповідник параметрів припасування у варіаційному наближенні у квантовій механіці.

У системі центра мас  $\mathbf{P}|1+2\rangle = 0$ , і хвильова функція набуває вигляду  $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = f(\mathbf{p})\delta(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ , що випливає з вільночастинкової структури оператору імпульсу (6.1.48). Тоді, варіаційний принцип  $\delta\langle 1+2|H - E|1+2\rangle = 0$  веде, услід за роботою [71], до такого рівняння для хвильової ф-ї  $f(\mathbf{p})$ :

$$\left[ \sum_{a=1}^2 p_{a0} - E \right] f(\mathbf{p}) = \frac{g_1 g_2}{8(2\pi)^3} \int \frac{d^3q f(\mathbf{q})}{\sqrt{p_{10} p_{20} q_{10} q_{20}}} \sum_{a=1}^2 \tilde{K}(p_a - q_a), \quad (6.1.49)$$

де ф-ю  $\tilde{K}$  означено в (6.1.39), а її аргументи – 4-імпульси  $p_a, q_a$  – взято на масовій оболонці (6.1.29). Це є релятивістичне рівняння типу Салпітера (1.1.8, с.42) для хвильової функції стаціонарних станів двочастинкової системи.

Подібно, з анзацом  $|1+\bar{1}\rangle = \int d^3p d^3q f(\mathbf{p})\delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) b_1^\dagger(\mathbf{p}) d_1^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle$ , можна отримати хвильове рівняння для системи “частинка + античастинка” (скажімо, для частинки 1 і античастинки  $\bar{1}$ ; тут номер сорту частинок  $a=1$  упущено):

$$\begin{aligned} [2p_0 - E] f(\mathbf{p}) &= \frac{g^2}{8(2\pi)^3} \int \frac{d^3q f(\mathbf{q})}{p_0 q_0} \times \\ &\times \left\{ 2\tilde{K}(p^+ - q^+) + \tilde{K}(p^+ - p^-) + \tilde{K}(q^+ - q^-) \right\}, \end{aligned} \quad (6.1.50)$$

де  $p_0 = p_{10} = p_{20}$  (оскільки  $m = m_1 = m_2$ ), а  $p^\pm = p_1^\pm = p_2^\pm = (\pm p_0, \mathbf{p})$  є 4-імпульсом на верхньому (+) та нижньому (-) листі масової оболонки (в означенні (6.1.29) і рівнянні (6.1.49) – на верхньому за замовчуванням). Зауважимо, що член

$2\tilde{K}(p^+ - q^+)$  відповідає обміну одним квантом поля-медіатора, тоді як  $\tilde{K}(p^+ - p^-)$  і  $\tilde{K}(q^+ - q^-)$  відповідають віртуальній анігіляції.

Розглянемо тепер нерелятивістичну границю  $|\mathbf{p}| \ll m$  рівнянь (6.1.49) і (6.1.50). Візьмемо до уваги, що симетричне пуанкарє-інваріантне ядро  $K(x)$  є функцією інтервалу  $x^2$ , а тому фур'є-образ  $\tilde{K}(p)$  – функція від  $p^2$ . Маємо:

$$\tilde{K}(p^+ - q^+) = \tilde{K}(p_0 - q_0, \mathbf{p} - \mathbf{q}) \longrightarrow \tilde{K}(0, \mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (6.1.51)$$

$$\tilde{K}(p^+ - p^-) = \tilde{K}(2p_0, \mathbf{0}) \longrightarrow \tilde{K}(2m, \mathbf{0}). \quad (6.1.52)$$

Тоді рівняння (6.1.49) зводиться до вигляду:

$$\left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2m_r} - \mathcal{E} \right] f(\mathbf{p}) = \frac{g_1 g_2}{4(2\pi)^3 m_1 m_2} \int d^3 q f(\mathbf{q}) \tilde{K}(0, \mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (6.1.53)$$

де  $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , а  $\mathcal{E} = E - (m_1 + m_2)$  – нерелятивістична енергія. В координатному представленні це р-ня є звичним р-ням Шрединг'ера:

$$-\frac{1}{2m_r} \Delta \psi(\mathbf{r}) + U(r) \psi(\mathbf{r}) = \mathcal{E} \psi(\mathbf{r}), \quad (6.1.54)$$

з потенціалом  $U(r) = -\frac{g_1 g_2}{4m_1 m_2} u(r)$ , де

$$u(r) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{K}(0, \mathbf{k}) = \int dx^0 K(x). \quad (6.1.55)$$

Подібно, частинково-античастинкове рівняння (6.1.50) дає нерелятивістичне р-ня Шрединг'ера (6.1.54) з  $m_r = m/2$  і потенціалом

$$U(r) = -\frac{g^2}{4m^2} \left\{ u(r) + \tilde{K}(2m, \mathbf{0}) \delta(\mathbf{r}) \right\}, \quad (6.1.56)$$

що включає контактний  $\delta$ -член віртуальної анігіляції.

Для моделі Юкави ядро є ф-єю Гріна р-ня Кляйна-Гордана (1.3.27), і в нерелятивістичній границі дає потенціал Юкави

$$U_Y(r; \mathcal{M}) = \frac{\alpha}{r} e^{-\mathcal{M}r}, \quad (6.1.57)$$

де  $\alpha = -g_1 g_2 / (16\pi m_1 m_2)$ , і константу в (6.1.56):  $\tilde{K}(2m, \mathbf{0}) = (\mathcal{M}^2 - 4m^2)^{-1}$ .

Різні нестандартні польові теорії, що можуть приводити до труднощів на квантовому рівні, тим не менше використовуються як ефективні теорії поля. Прикладами є теорія тахіонів [396, 397], польові теорії з вищими похідними [102, 104] та нелокальні польові теорії [380, 392]. Серед їх проблем у першу чергу можна вказати труднощі послідовного опису вільних квантів. З іншого боку, якщо нестандартне поле вживається лише як медіатор взаємодії (а вільні кванти відсутні), то такі теорії можуть стосуватися фізичних систем. Найбільш радикальною реалізацією цієї ідеї є теорія віртонів [392], де нелокальні польові рівняння не мають розв'язків для вільних квантів, але функція Гріна і, отже відповідна взаємодія не є тривіальними. Кvantування віртонної теорії є дуже нетривіальним. На противагу до неї, запропонована тут схема, в якій поля-медіатори вилучаються на класичному рівні, видається найпростішим способом отримати фізично змістовний зиск з нестандартних польових теорій. Продуктом цієї схеми є коваріантна функція Гріна відповідного польового рівняння. У наступних підрозділах розглянемо кілька прикладів.

## 6.2. Про стани, зв'язані тахіонним обміном

Концепція *тахіонів* – частинок, що рухаються швидше за світло – відома понад півстоліття [398, 399]. Труднощі у квантово-польовій теорії тахіонів [396, 397] дають підстави думати, що вільних тахіонних квантів у природі не існує, і це узгоджується з експериментом [400].

Сьогодні тахіонне поле рідко розглядають як новий фундаментальний вид матерії. Воно радше служить як ефективний опис більш або менш звичної матерії у нестабільних або метастабільних станах. Ефективні тахіонні поля виникають в рамках квантової гравітації [401], суперсиметричної теорії поля [402], теорії струн [403] тощо.

Існує інший погляд на тахіони, як на приховані чи віртуальні об'єкти [404, 405]. Віртуальні тахіонні стани (чим би вони не були) можуть відігравати роль у взаємодії між *брадіонами* (тобто повільнішими за світло частинками) [406, 407].

Зокрема, піки в мезон-нуклонних диференційних перетинах розсіяння ефективно тлумачаться як тахіонні резонанси [408].

У цьому розділі вивчається можливість виникнення зв'язаних станів частинок, що взаємодіють через тахіонне поле – поле Кляйна-Гордона з уявною масою. Оскільки вільних тахіонів немає, то симетрична ф-я Гріна цього поля [397] є адекватною для опису взаємодії через обмін віртуальними тахіонами.

В п. 6.2.1 буде введено цю ф-ю Гріна та виведено нерелятивістичний потенціал тахіонно-обмінної взаємодії. Прикладне значення цього потенціалу також буде обговорено. В п. 6.2.2 розглядається відповідне рівняння Шредінгера. Його варіаційний розв'язок буде отримано в п. 6.2.3, а числовий – в п. 6.2.4.

### 6.2.1. Потенціал тахіонно-обмінної взаємодії

Існують різні можливості, щоб вивести потенціал тахіонно-обмінної взаємодії. Одна можливість виникає із класичної теорії дії на відстані типу Вілер-Фейнмана [17, 36, 37, 42, 43, 259], у якій електромагнетне поле замінено на тахіонне; див. підрозділ 3.1 Друга можливість – це частково редукована теорія поля, що поєднує риси обидвох підходів [11, 20, 68, 71, 72, 409]; підрозділ. 6.1.

В усіх випадках тахіонно-обмінну взаємодію брадіонів можна виразити через ф-ю Гріна тахіонного поля, тобто поля Кляйна-Гордона з уявною масою  $m = i\mu$  [397]. Лише симетрична ф-я Гріна:

$$\tilde{G}_{\text{sym}}(k; \mu) = D_{\text{sym}}(k; i\mu) = -\mathcal{P} \frac{1}{k^2 + \mu^2}, \quad (6.2.1a)$$

$$G_{\text{sym}}(x; \mu) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \delta(x^2) - \Theta(-x^2) \frac{\mu}{2\sqrt{-x^2}} J_1(\mu\sqrt{-x^2}) \right\}, \quad (6.2.1b)$$

де  $J_1(x)$  – ф-я Бесселя 1-го роду, є пуанкаре-інваріантною (і дійсною), і може слугувати ядром інтегралу дії типу Фоккера (1.3.28), або нелокального лагранжіану (6.1.7). Причинна структура тахіонно-обмінної взаємодії показана на рис. 1.2d. Відповідний статичний потенціал, згідно з (6.1.55), має вигляд:

$$U(r; \mu) = \text{Re } U_Y(r; i\mu) = \frac{\alpha}{r} \cos \mu r, \quad (6.2.2)$$

де  $\alpha$  – стала зв'язку. Він є далекосяжним, і веде до нетривіальної задачі про зв'язані стани навіть у нерелятивістичному наближенні [23, 47].

Очевидно, що потенціал (6.2.2) є дійсною частиною потенціалу Юкави (6.1.57) з уявною масою  $m = i\mu$  поля-медіатора. Можна також взяти *a priori* нерелятивістичний екранований потенціал у плазмі, формально поклавши у ньому радіус Дебая уявним:  $r_D = i/\mu$ . З фізичного погляду, цей антиекранований потенціал може виникати у деякому метастабільному середовищі, такому такому як діелектрик при від'ємних температурах [410]. Іншим, астрофізичним тлумаченням може бути тяжіння, “одягнене” у темну матерію [411].

Тут буде вивчатися питання: чи може потенціал (6.2.2) породжувати зв'язані стани частинок, і якщо так, то за яких умов.

### 6.2.2. Рівняння Шредингера

Припускаємо, що стала зв'язку  $\alpha$  в (6.2.2) може бути як від'ємною, так і додатньою. В обидвох випадках потенціал (6.2.2) є послідовністю потенціальних ям і бар'єрів, що переходят одні в одних при зміні знаку  $\alpha$ . Тому при класичному розгляді зв'язані стани частинок можливі для обидвох знаків  $\alpha$ : вони відповідають рухові частинок в межах тієї чи іншої потенціальної ями.

При квантовому розгляді глибини ям чи висоти бар'єрів потенціалу (6.2.2) набувають значення з огляду на можливість тунелювання між ними. Тому загалом вигляд хвильової функції не є очевидним. Можна очікувати існування зв'язаних станів принаймні для  $\alpha < 0$  за малих значень метамаси  $\mu$ , коли потенціал (6.2.2) близький до кулонівського.

Щоб розв'язати рівняння Шредингера (6.1.54) з потенціалом (6.2.2) здійснимо стандартну радіальну редукцію та введемо безрозмірні змінні:  $\rho = r/a_B$ ,  $\epsilon = \mathcal{E}/\mathcal{E}_{Ry}$ ,  $\eta = a_B\mu$ . Тут  $a_B = 1/(m|\alpha|)$  та  $\mathcal{E}_{Ry} = m\alpha^2$  є аналогами радіусу Бора та сталої Рідберга,  $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  – зведенна маса взаємодіючих частинок  $m_1$  та  $m_2$ , а  $\mathcal{E}$  – власне значення енергії системи. Тоді рівняння для радіальної

хвильової ф-ї  $\psi(\rho)$  набувають вигляду:

$$\{H^{(\mp)} - \epsilon\}\psi(\rho) = 0, \quad (6.2.3)$$

$$\text{де} \quad H^{(\mp)} \equiv \frac{1}{2} \left\{ -\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right\} + u^{(\mp)}(\rho), \quad (6.2.4)$$

$$\text{та} \quad u^{(\mp)}(\rho) = \mp \frac{\cos \eta \rho}{\rho} \equiv \mp \frac{1}{2\rho} \{ e^{i\eta\rho} + e^{-i\eta\rho} \}. \quad (6.2.5)$$

Оператори  $H^{(\mp)}$  та  $u^{(\mp)}$  відповідають випадкам  $\alpha = \mp|\alpha| \leq 0$  які називатимемо "притяганням" та "відштовхуванням". Насправді ці назви є умовними і не відображають реальних властивостей взаємодії.

## Варіаційний розв'язок

Розв'язок рівняння Шредингера із потенціалом (6.2.2), що є суперпозицією потенціальв Юкави з уявними показниками, невідомий. Можна очікувати, що обчислення енергії основного стану варіаційним методом Рітці може бути ефективним, за аналогією із випадком звичайного потенціалу Юкави [357].

Оскільки потенціал (6.2.2) на відстанях  $\rho \ll 1/\eta$  близький до кулонівського, то для пробної функції можна взяти таку:

$$\tilde{\psi}_{\ell 0} \equiv \sqrt{k} \psi_{\ell 0}(k\rho); \quad (6.2.6)$$

де  $k$  – варіаційний параметр, а функція  $\psi_{\ell 0}(\rho)$  описує основний стан ( $n_r = 0$ ) радіального гамільтоніану  $H_{\eta=0}^{(-)}$  (6.2.4)-(6.2.5). Функція (6.2.6) нормована на одиницю і має правильну поведінку при  $\rho \rightarrow 0$ .

Скориставшись технікою інтегрування гіпергеометричних функцій [358] отримаємо такий вираз для середньої енергії у варіаційному стані (6.2.6):

$$\langle \epsilon \rangle_{\varkappa} \equiv \left\langle -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{2\rho^2} + u(\rho) \right\rangle_{\varkappa} = \frac{\eta^2}{8\varkappa^2} - \frac{\eta}{4n\varkappa} f(\varkappa), \quad (6.2.7)$$

$$\text{де} \quad f(\varkappa) = \frac{1}{(1 + i\varkappa)^{2n}} + \frac{1}{(1 - i\varkappa)^{2n}}, \quad n = \ell + 1, \quad (6.2.8)$$

і замість  $k$  для зручності вжито новий варіаційний параметр  $\varkappa = n\eta/(2k)$ .

Умова мінімуму  $\frac{\partial}{\partial \varkappa} \langle \epsilon \rangle_{\varkappa} = 0$  для функції (6.2.7) приводить до рівності:

$$\eta = \frac{\varkappa}{n} \{ f(\varkappa) - \varkappa f'(\varkappa) \} \quad (6.2.9)$$

яка, разом з (6.2.7), визначає енергію основного стану як задану параметрично (у термінах  $\varkappa$ ) безрозмірної метамаси  $\eta$ .

Розглянемо основний S-стан, поклавши  $n = 1$ . З р-нь (6.2.7)-(6.2.9) випливає, що  $\langle \epsilon \rangle \leq 0$  якщо  $\varkappa \in [0, \sqrt{2}-1]$ . При цьому енергія  $\langle \epsilon \rangle \in [-\frac{1}{2}, 0]$  монотонно зростає разом з безрозмірною метамасою  $\eta \in [0, 1]$ . Оскільки  $\langle \epsilon \rangle$  мажорує істинне значення енергії, то зв'язаний стан з певністю існує для  $\eta \in [0, 1]$ . Отже, можна оцінити критичне значення  $\eta_c$  метамаси (при якому зникають зв'язані стани) знизу як  $\eta_c \geq 1$ .

У даній роботі не вдалося знайти аналітичну оцінку для значення  $\eta_c$ . Варто зауважити, що метод Седова [412], який дає оцінку для критичного параметру екранування потенціалу Юкави, у нашому випадку незастосовний, оскільки приводить до ряду з розбіжними членами.

## Числовий розв'язок

В принципі, істинне значення енергії можна як завгодно точно визначити числовим інтегруванням рівняння Шредінгера (6.1.54) з потенціалом (6.2.2). На рис. 6.1a представлена залежність  $\epsilon(\eta)$ , отриману варіаційним та числовим методами, для гамільтоніану  $H^{(-)}$  (тобто для випадку "притягання"  $\alpha < 0$ ). Очевидно, що варіаційне наближення є задовільним майже в усьому проміжку  $\eta \in [0, 1[$ , за винятком околу  $\eta \gtrsim 1$  де воно стає некоректним. У той же час числові результати дають зв'язані стани до значення  $\eta \approx 2.5$ . Далі енергія зв'язку стає нехтувано малою:  $|\epsilon|_{\eta>2.5} < 10^{-9}$ , а технічні труднощі числового інтегрування швидко зростають, тому критичне значення метамаси  $\eta_c$  визначити таким чином не вдається.

З рис. 6.1b очевидно, що залежність  $1/\ln |\epsilon|$  від  $\eta$  виходить на асимптотику, яка перетинає вісь абсцис у точці  $\eta \approx 3$ . Вірогідно, що зв'язаних станів немає для  $\eta > \eta_c \approx 3$ . Звичайно, це припущення вимагає більш строгого математичного обґрунтування, якого тут отримати не вдалося. Варто зазначити, що точне значення для  $\eta_c$  у практиці не так важливе, оскільки стани з нехтувано малою енергією зв'язку можна не вважати зв'язаними.

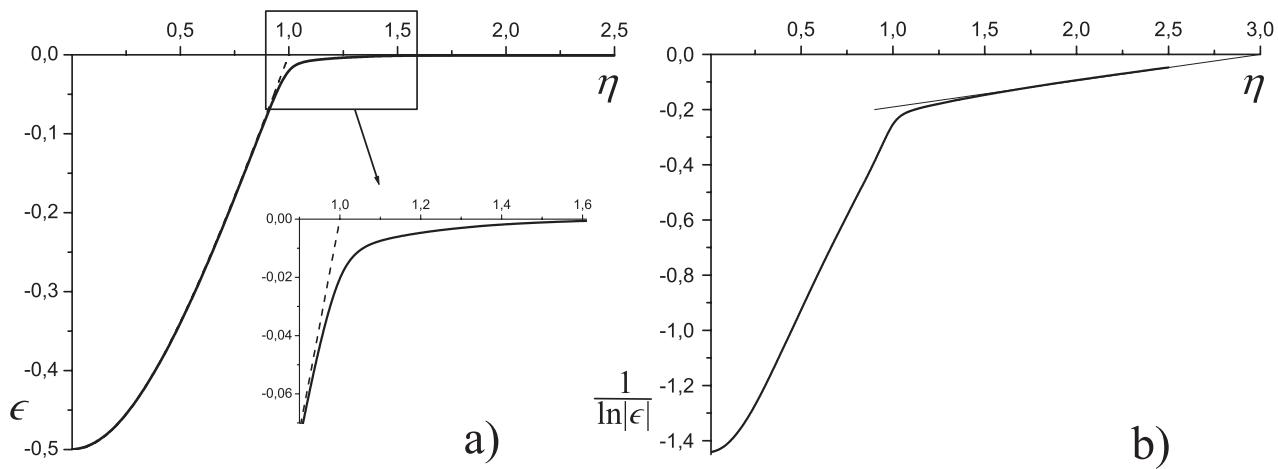


Рис. 6.1. а) залежність енергії основного стану від метамаси тахіонного посередника взаємодії (у безрозмірних змінних  $\epsilon$ ,  $\eta$ ) для випадку "притягання"  $\alpha < 0$ : суцільна крива – числові результати, пунктир – варіаційне наближення; б) асимптотична поведінка енергії при  $1 < \eta < 3$ .

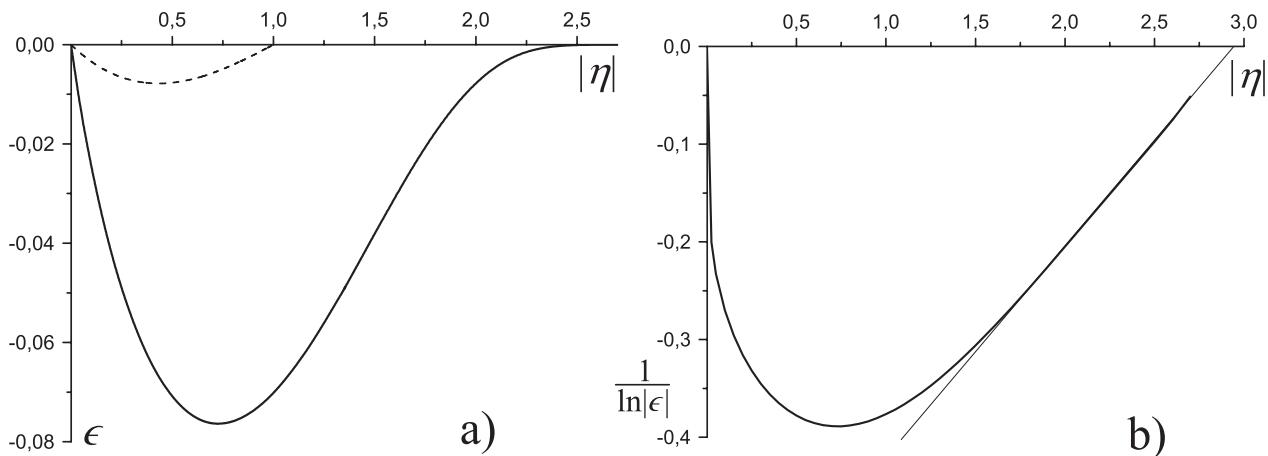


Рис. 6.2. Те ж що на рис. 6.1, але для випадку "відштовхування"  $\alpha > 0$ .

### Випадок "відштовхування"

Варіаційне наближення зв'язаних станів для випадку "відштовхування"  $\alpha > 0$  також можна отримати з рівнянь (6.2.7)-(6.2.9), якщо у них формально покласти  $\eta < 0$ , а безрозмірною метатрасою вважати  $|\eta|$ . У цьому випадку  $\langle \epsilon \rangle \leq 0$  при  $\eta \in [0, -1]$ . Отже, існування зв'язаних станів у випадку "відштовхування" також доведено, хоча вжитий для цього випадку варіаційний анзац (6.2.6) є дуже грубий. Числові результати на рис. 6.2а показують, що зв'язані стани існують при  $0 < |\eta| \leq 2.7$ , та імовірно не існують при  $|\eta| \geq 3$  (подібно до випадку  $\alpha < 0$ ); див. рис. 6.2б. Максимум енергії зв'язку  $|\epsilon|_{\max} \approx 0.0764$ , що досягається при  $|\eta| \approx 3/4$ .

$\epsilon$  на порядок меншим, ніж у випадку  $\alpha < 0$ . Така здатність тахіонної взаємодії зв'язувати частинки матерії як при від'ємній, так і додатній сталій зв'язку (хоч і з різною інтенсивністю) є визначеною.

### 6.3. Частково редуковані моделі конфайнменту

Конфайнмент очевидно пов'язаний з нелінійністю хромодинаміки. Те, що утримні розв'язки класичних польових рівнянь Янга-Міллса до сьогодні невідомі [375], є аргументом на користь істотно квантової природи конфайнменту. Це підтверджується комп'ютерними симуляціями квантової хромодинаміки (КХД) на гратці [12, 13]. В аналітичному ж вивчені конфайнменту, зокрема в рамках калібрувальних теорій типу КХД, прогрес менш помітний [13]. Тому вивчення простіших теоретико-польових моделей, що імітують характерні риси конфайнменту, залишається актуальним.

Тут ще раз варто згадати ранні моделі, такі як модель Кіскіса з вищими похідними [102] і пов'язану з нею дипольну модель [368]. Вони дають для “глюонного” пропагатора залежність  $\sim 1/k^4$ , а отже й лінійний потенціал взаємодії. В цих феноменологічних моделях конфайнмент тлумачиться як елементарний процес, тобто двочастинкова утримна взаємодія виникає вже в найнижчому наближенні пертурбативної динаміки моделей. Тут моделі будуть переформульовані в рамках ЧРТП, де їх утримні властивості виявляються вже на класичному рівні.

Більш реалістичними є дуальна абелева модель Гіг'са та неабелеві версії [13], в яких вакуумний конденсат з утримними властивостями генерується механізмом порушення симетрії. У цьому підході конфайнмент є колективним ефектом, як у фізиці конденсованих систем.

Ці два описані вище класи моделей представляють цілковито різні точки зору на механізм конфайнменту. Виникає питання: чи можливий проміжний механізм, в якому конфайнмент не зводиться до елементарного процесу, а тлумачиться як кластерна взаємодія, що включає скінченне число частинок?

Тут буде досліджено взаємодію, що виникає з нелінійних за полем-

медіатором членів у КТП-лагранжіанах. Зокрема, розглядатиметься  $(\varphi^3 + \varphi^4)$ -узагальнення моделі Віка-Куткоскі (тобто безмасової скалярної моделі Юкави) [112, 113] а також модифікованої дипольної моделі [11, 368].

Зазначимо, що представлені тут моделі не є неабелевого калібрувального типу. Є лише дві риси, спільні для моделей та КХД: безмасовість та нелінійність поля-медіатора. Обидві риси важливі у виникненні конфайнменту, але механізми цього ефекту тут і в калібрувальних теоріях [13] – різні.

### 6.3.1. Теорія з вищими похідними та дипольна модель

У моделі Кіскіса [102] лагранжіан вільного скалярного поле має вигляд:

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2\kappa^2}(\square\chi)^2 \simeq \frac{1}{2\kappa^2}(\partial_\mu\partial_\nu\chi)(\partial^\mu\partial^\nu\chi), \quad (6.3.1)$$

де  $\kappa$  є сталою розмірності маси, а  $\simeq$  позначає рівність з точністю до поверхневих членів. Якщо його включити в модель Юкави (6.1.1, с.273) замість стандартного члена (6.1.3), то рівняння для поля-медіатора буде 4-го порядку:

$$\square^2\chi = -\kappa^2\rho. \quad (6.3.2)$$

Дійсні функції Гріна  $G_\eta$  цього р-ня знайдено в додатку В і вписано в р-ні (3.1.41, с.159). Тут нас цікавить симетрична ф-я Гріна  $G_{\text{sym}} = G|_{\eta=0}$  (або перенормована  $\bar{G}_{\text{sym}}$ ; див. (3.3.17, с.182)). Якщо вилучити поле-медіатор з лагранжіану (3.1.41) з допомогою розв'язку  $\chi = -\kappa^2 G_{\text{sym}} * \rho$  р-нь (6.3.2), отримаємо ЧР-лагранжіан (6.1.5) з ядром  $K = -\kappa^2 G_{\text{sym}}$ .

Лагранжіан з похідними 2-го порядку можна переформулювати в еквівалентний – з похідними 1-го порядку, але залежний від двох полів [102, 380]. Замінимо член (6.3.1) в лагранжіані (6.1.1) на

$$\mathcal{L}_{\phi\chi} = (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\chi) - \frac{1}{2}\kappa^2\varphi^2, \quad (6.3.3)$$

що веде до зв'язаної пари неоднорідних рівнянь Даламбера:

$$\square\chi = -\kappa^2\varphi \quad (6.3.4)$$

$$\square\varphi = \rho. \quad (6.3.5)$$

Вилучення цих полів з моделі знову дає редукований лагранжіан (6.1.5).

Варіаційні двочастинкові рівняння (6.1.49) і (6.1.50) для цього випадку. Вони містять фур'є-образ  $\tilde{K}(k) = -\varkappa^2 \tilde{G}_{\text{sym}}(k) \sim 1/k^4$  ядра  $K(x) = -\varkappa^2 G_{\text{sym}}(x)$ , який має сильну сингулярність на світловому конусі  $k^2 = 0$ . Подібна проблема виникає і в інших хвильових рівняннях типу Салпітера. Регуляризація цієї особливості обговорювалась в літературі, реферованій в п. 1.2.9 на с. 75, і детальніше в [11].

Щоб мати уявлення про властивості взаємодії, що описується нелокальним членом в (6.1.5, с.274), корисно отримати статичний потенціал взаємодії. Для цього замість скалярного струму полів матерії (6.1.2) як джерела поля  $\chi$  розглянемо статичну систему точкових частинок, для якої:

$$\rho(x) = \rho(t, \mathbf{x}) = \sum_a g_a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a), \quad (6.3.6)$$

де  $\mathbf{x}_a$  положення  $a$ -ї частинки, а  $g_a$  – її скалярний заряд.

Підставимо струм (6.3.6) у член взаємодії інтегралу дії від редукованого лагранжіану (6.1.5):

$$I_{\text{int}}^{(2)} \equiv \iint d^4x d^4x' \rho(x) K(x - x') \rho(x') \quad (6.3.7a)$$

$$\xrightarrow{(6.3.6)} \frac{1}{2} \sum_a \sum_b g_a g_b \int dt \int d^3x \int d^3x' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_b) \int dt' K(x - x') \\ \equiv - \sum_{a < b} \int dt V(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b). \quad (6.3.7b)$$

У даному випадку  $K(x) = -\varkappa^2 \bar{G}_{\text{sym}}(x)$  отримаємо лінійний потенціал:

$$V(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) = \frac{\varkappa^2 g_a g_b}{8\pi} |\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|.$$

Розглянуті вище моделі не дають короткосяжної кулонівської взаємодії, що мала б з'являтися у релятивістичному описі міжкваркових сил. Таку взаємодію легко ввести шляхом модифікації лагранжіану (6.3.1):

$$\mathcal{L}_\chi \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_\chi = \frac{1}{2\varkappa^2} (\square \chi - \rho)^2. \quad (6.3.8)$$

Еквіалентно можна змінити юкавський член у дипольній моделі:

$$\mathcal{L}_Y = \rho \chi \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathcal{L}}_Y = \rho (\chi + \frac{1}{2} \varphi). \quad (6.3.9)$$

В обох випадках ЧР-лагранжіан буде (6.1.5) з ядром  $K = -\varkappa^2 G_{\text{sym}} + D_{\text{sym}}$ , що включає як ф-ю Гріна  $G_{\text{sym}}$  р-ня (6.3.2), так і  $D_{\text{sym}}$  р-ня Даламбера. У нерелятивістичній границі він дає корнельський потенціал (1.2.2) з константами  $\alpha = \frac{g_1 g_2}{4\pi}$ ,  $a = \frac{\varkappa^2 g_1 g_2}{8\pi}$ , пов'язаними із скалярними “зарядами”  $g_a$  частинок 1 і 2.

Вихідні та модифіковані тут моделі давали рівняння, лінійні за полями-медіаторами, що дало змогу знайти їх точний розв'язок і перейти до ЧРТП.

Далі розглядаються нелінійні модифікації цих моделей, що за побудовою видаються близчими до нелінійної хромодинаміки.

### 6.3.2. Нелінійна модель типу Віка-Куткоскі

Модель Віка-Куткоскі [112, 113] базується на класичному лагранжіані

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + g \phi^* \phi \chi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi, \quad (6.3.10)$$

і є частковим випадком скалярної моделі Юкави (6.1.1) з одним полем матерії  $\phi_a \equiv \phi$  ( $a = 1$ ; далі цей індекс упущено) і безмасовим полем-медіатором  $\chi$ :  $m = 0$ . У квантовій версії ця модель є перенормованою; вона також зіграла важливу роль при дослідженні властивостей рівняння Бете-Салпітера.

Тут запропоновано нелінійне узагальнення моделі Віка-Куткоскі:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + g \phi^* \phi \chi - \frac{1}{4} \lambda (\phi^* \phi)^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \mathcal{V}(\chi), \quad (6.3.11)$$

де  $\lambda > 0$  – параметр самодії, а  $\mathcal{V}(\chi)$  – довільний потенціал (усі інші величини означені так, як в моделі Юкави (6.1.1)).

Нові члени змінюють рівняння Ойлера-Лагранжа (6.1.4), (6.1.5). Зокрема рівняння (6.1.5) стає нелінійним неоднорідним рівнянням Даламбера

$$\square \chi = \rho - \mathcal{V}'(\chi), \quad (6.3.12)$$

де  $\rho = g \phi^* \phi$ , а  $\mathcal{V}'(\chi) \equiv d\mathcal{V}(\chi)/d\chi$ . Його можна формально розв'язати ітераціями (див. [413]). У 1-му наближенні маемо

$$\chi = D * [\rho - \mathcal{V}'(D * \rho)], \quad (6.3.13)$$

де “ $*$ ” позначає згортку, а  $D \equiv D_{\text{sym}}$  – симетрична ф-я Гріна р-ня Даламбера. Довільний розв’язок однорідного р-ня упущенено як неістотний у даному контексті; детальне див. [17].

Редукція поля  $\chi$  у лагранжіані (6.3.11) з допомогою розв’язку (6.3.13) дає ЧР-лагранжіан, який має вигляд:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}} &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + \frac{1}{2} \rho D * \rho - \frac{1}{4} \lambda (\phi^* \phi)^2 - \mathcal{V}(D * \rho) \\ &\equiv \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}^{(2)} + \mathcal{L}_{\text{int}}^{(>2)}.\end{aligned}\quad (6.3.14)$$

Він є нелокальним, а відповідна дія  $I = \int d^4x \bar{\mathcal{L}}$  містить 1-, 2- та  $>2$ -кратні інтеграли за простором Мінковського.

### 6.3.3. Квантування і тричастинкове хвильове рівняння

Для подальшого розгляду моделі слід обрати потенціал  $\mathcal{V}(\varphi)$ . Покладімо

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{1}{3} \kappa \varphi^3 + \frac{1}{4} \varkappa \varphi^4, \quad (6.3.15)$$

де  $\kappa$  і  $\varkappa > 0$  є константи. Тоді нелінійна модель Віка-Куткоскі (6.3.11) має стійкий пертурбативний вакуум, і перенормівна з розмірних міркувань.

ЧР-лагранжіан (6.3.14), (6.3.15) має такі члени взаємодії:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}}^{(2)}(x) &= \frac{1}{2} \int d^4x' \rho(x) D(x - x') \rho(x') + \frac{\lambda}{4} (\phi^*(x) \phi(x))^2 \\ &\equiv \frac{1}{2} \int d^4x' \rho(x) \left( D(x - x') - \frac{\lambda}{2g^2} \delta(x - x') \right) \rho(x'),\end{aligned}\quad (6.3.16)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}}^{(3)}(x) &= -\frac{\kappa}{3} \iiint d^4x' d^4x'' d^4z D(z - x) D(z - x') D(z - x'') \times \\ &\quad \times \rho(x) \rho(x') \rho(x''),\end{aligned}\quad (6.3.17)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}(x) &= -\frac{\varkappa}{4} \iiint d^4x' d^4x'' d^4x''' d^4z D(z - x) D(z - x') D(z - x'') D(z - x''') \times \\ &\quad \times \rho(x) \rho(x') \rho(x'') \rho(x''').\end{aligned}\quad (6.3.18)$$

Поряд із членом двочастинкової (парної) взаємодії  $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(2)}$  з ядром  $K(x - x') = D(x - x') - \frac{\lambda}{2g^2} \delta(x - x')$ , тут з’явивилися тричастинковий і чотиричастинковий

члени  $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(3)}$  і  $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}$ . Через їх нелокальність гамільтонізація моделі є нетривіальною, і може бути здійснена за зразком гамільтонізації узагальненої моделі Юкави, як в підрозділі 6.1. У результаті отримаємо гамільтоніан виду

$$H = H_{\text{free}} + H_{\text{int}}^{(2)} + H_{\text{int}}^{(3)} + H_{\text{int}}^{(4)}, \quad (6.3.19)$$

де  $H_{\text{free}}$  і  $H_{\text{int}}^{(2)}$  задані формулами (6.1.46) і (6.1.47) відповідно, а  $H_{\text{int}}^{(3)}$  має досить громіздкий вигляд:

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}^{(3)} = & -\frac{\kappa g^3}{24(2\pi)^6} \int \frac{d^3 k_1 \dots d^3 k_6}{\sqrt{k_{10} \dots k_{60}}} \sum_{\eta_1=\pm \dots \eta_6=\pm} \tilde{D}(\eta_1 k_1 + \eta_2 k_2) \tilde{D}(\eta_3 k_3 + \eta_4 k_4) \times \\ & \times \tilde{D}(\eta_5 k_5 + \eta_6 k_6) \delta(\eta_1 \mathbf{k}_1 + \dots + \eta_6 \mathbf{k}_6) :d_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_2} d_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4} d_{\mathbf{k}_5} b_{\mathbf{k}_6}: \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

тут  $\bar{d}^+ = d$ ,  $\bar{d}^- = b^\dagger$ ,  $\bar{b}^+ = d$ ,  $\bar{b}^- = d^\dagger$  – оператори народження і знищення частинок і античастинок, а фур'є-образи  $\tilde{D}(k) = -\mathcal{P}/k^2$  симетричної ф-їГріна р-ня Даламбера залежать від значень 4-імпульсів на масовій оболонці  $k = \{k_0, \mathbf{k}\}$ , де  $k_0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ . Вираз (6.3.20) містить  $2^6 = 64$  доданків. Член  $H_{\text{int}}^{(4)}$  є подібний, але ще громіздкіший. Однак він не дає внеску у 3-частинкове рівняння, яке буде виведено далі, і тут не виписаний явно.

У варіаційному підході до КТП пробні стани системи будується з кількачастинкових компонент [409], таких як двочастинковий вектор стану, частинково-античастинковий тощо; див. п.6.1.5, с. 282. Тричастинкова компонента має вигляд

$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) b_{\mathbf{p}_1}^\dagger b_{\mathbf{p}_2}^\dagger b_{\mathbf{p}_3}^\dagger |0\rangle, \quad (6.3.21)$$

де амплітуда  $F$ , що має визначатися варіаційно, є цілком симетричною щодо перестановок змінних  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ . У варіаційному методі канальні компоненти,  $|\psi_i\rangle$ , вживаються для обчислення матричних елементів гамільтоніану:  $\langle \psi_i | H | \psi_j \rangle$ , де  $i, j$  набувають значень 1,  $\bar{1}$ , 2,  $1+\bar{1}$ ,  $\bar{2}$ , 3,  $2+\bar{1}$ ,  $2+\bar{2}$ , ...

Тут ми цікавимося матричними елементами членів взаємодії  $H_{\text{int}} = H_{\text{int}}^{(2)} + H_{\text{int}}^{(3)} + H_{\text{int}}^{(4)}$  гамільтоніану. Зауважимо, що  $\langle 1+\bar{1} | H_{\text{int}}^{(3)} | 1+\bar{1} \rangle = 0$ ,  $\langle 2 | H_{\text{int}}^{(3)} | 2 \rangle = 0$ . Іншими словами, цілковито двочастинкові пробні стани, а отже і відповідне хвилюве рівняння, не “відчувають”  $H_{\text{int}}^{(3)}$ . Тому розглянемо тричастинковий випадок

і обчислимо матричний елемент

$$\langle 3 | H_{\text{int}} | 3 \rangle = \int d^3 p'_1 \dots d^3 p'_3 \, d^3 p_1 \dots d^3 p_3 \, F^*(\mathbf{p}'_1 \dots \mathbf{p}'_3) \, F(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_3) \times \mathcal{K}_{33}(\mathbf{p}'_1 \dots \mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_3) \quad (6.3.22)$$

де ядро  $\mathcal{K}_{33} = \mathcal{K}_{33}^{(2)} + \mathcal{K}_{33}^{(3)}$  складається з компонент:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{33}^{(2)}(\mathbf{p}'_1 \dots \mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_3) &= -\frac{3}{4(2\pi)^3} \delta(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \times \\ &\quad \times \frac{\delta(\mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_3)}{\sqrt{p'_{10} p'_{20} p_{10} p_{20}}} \left[ g^2 \tilde{D}(p'_2 - p_2) - \lambda/2 \right], \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{33}^{(3)}(\mathbf{p}'_1 \dots \mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_3) &= -\frac{\kappa g^3}{4(2\pi)^6} \delta(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \times \\ &\quad \times \frac{\tilde{D}(p'_1 - p_1) \tilde{D}(p'_2 - p_2) \tilde{D}(p'_3 - p_3)}{\sqrt{p'_{10} \dots p'_{30} p_{10} \dots p_{30}}}, \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

а  $p_{i0} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_i^2}$ , і подібно для  $p'_{j0}$ . Член  $H_{\text{int}}^{(4)}$  не дає внеску в  $\mathcal{K}_{33}$ , тобто  $\mathcal{K}_{33}^{(4)} = 0$ .

Ядро  $\mathcal{K}_{33}$  визначає взаємодію в релятивістичному тричастинковому хвильовому рівнянні, що випливає з варіаційного принципу  $\delta \langle 3 | H - E | 3 \rangle = 0$ :

$$\begin{aligned} &\{p_{10} + p_{20} + p_{30} - E\} F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \\ &+ \int d^3 p'_1 d^3 p'_2 d^3 p'_3 \, \mathcal{K}_{33}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}'_3) \, F(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}'_3) = 0, \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

де під ядром слід розуміти цілковиту симетризацію (щодо змінних  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}'_3$  і  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ ) виразів (6.3.23) і (6.3.24).

Член  $\mathcal{K}_{33}^{(2)}$  ядра відповідає притягальній взаємодії через обмін безмасовими бозонами та відштовхувальній контактній взаємодії між парами частинок, тоді як  $\mathcal{K}_{33}^{(3)}$  описує кластерну тричастинкову взаємодію.

З математичного погляду тричастинкове хвильове рівняння (6.3.25) є інтегральним рівнянням із сингулярним ядром. Навіть у простішому (скажімо, двочастинковому) випадку таке рівняння зазвичай розв'язують наближено (варіаційно, пертурбативно, числово), і не просто отримати загальні якісні характеристики розв'язку, або оцінити роль окремих членів ядра.

Щоб отримати деяке уявлення про властивості кластерної взаємодії, розглянемо нерелятивістичну границю рівняння (6.3.25), у якій ядро значно спро-

щується, і тоді здійснимо фур'є-перетворення у координатний простір. У цьому представленні рівняння стає звичайним р-ням Шредингера для тричастинкової власної функції  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  та власної енергії  $\mathcal{E} = E - 3m$ :

$$\left\{ \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2) + V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) - \mathcal{E} \right\} \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = 0, \quad (6.3.26)$$

де  $\mathbf{p}_a = -i\nabla_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ), а потенціал  $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ , подібно до релятивістичного ядра  $\mathcal{K}_{33}$ , складається з двох частин  $V = V_{33}^{(2)} + V_{33}^{(3)}$ :

$$\begin{aligned} V_{33}^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= -\frac{g^2}{16\pi m^2} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} + \frac{1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|} + \frac{1}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|} \right\} \\ &\quad + \frac{\lambda}{8m^2} \{ \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) + \delta(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \}, \end{aligned} \quad (6.3.27)$$

$$V_{33}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{2\kappa g^3}{(8\pi m)^3} U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3). \quad (6.3.28)$$

де

$$U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \equiv - \int \frac{d^3 z}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}_1| |\mathbf{z} - \mathbf{x}_2| |\mathbf{z} - \mathbf{x}_3|}. \quad (6.3.29)$$

Інтеграл у п.ч. (6.3.29) є розбіжним, і тому рівняння (6.3.26) може видатися бессенсовим. Але градієнти  $\partial U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)/\partial \mathbf{x}_a$  ( $a=1, 2, 3$ ), що визначають сили у класичному підґрунті задачі, є добре означеними і скінченними. Тому “функцію” (6.3.29) можна представити у вигляді

$$U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \tilde{U}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + U_0 \quad (6.3.30)$$

де  $\tilde{U}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  – регулярна (скінчена) функція, а  $U_0$  – нескінчена від’ємна стала (незалежна від змінних  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ). Цю сталу можна об’єднати з власною енергією  $\mathcal{E}$ , так що хвильове рівняння (6.3.26) стає перенормованим:

$$\begin{aligned} V_{33}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \rightarrow \tilde{V}_{33}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= \frac{2\kappa g^3}{(8\pi m)^3} \{ U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) - U_0 \} \\ &\equiv \frac{2\kappa g^3}{(8\pi m)^3} \tilde{U}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

$$\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}} = E - 3m - \frac{2\kappa g^3}{(8\pi m)^3} U_0 \quad (6.3.32)$$

де власна енергія  $\tilde{\mathcal{E}}$  і потенціал  $\tilde{V}_{33}^{(3)}$  є скінченними.

Щоб здійснити це перенормування явно, необхідна регуляризація інтегралу (6.3.29), що пропонується далі.

Проблема розбіжності очікується і в релятивістичному випадку. Але аналіз інтегрального рівняння (6.3.25) є більш тонкою проблемою, що не розглядається у даній роботі.

#### 6.3.4. Властивості та обчислення 3-точкового потенціалу

Існують різні способи регуляризації функцій, що задаються розбіжними інтегралами. Перш ніж обрати той чи інший спосіб, розглянемо формальні властивості інтегралу у п.ч. (6.3.29) – інваріантність щодо різних перетворень:

- T) трансляційна:  $U^{(3)}(\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}_3 + \boldsymbol{\lambda}) = U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ , де  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^3$ ;
- R) обертова:  $U^{(3)}(\mathbf{R}\mathbf{x}_1, \mathbf{R}\mathbf{x}_2, \mathbf{R}\mathbf{x}_3) = U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ , де  $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$ ;
- P) переставна:  $U^{(3)}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) = U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2) = U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ ;
- S) масштабна:  $U^{(3)}(\lambda\mathbf{x}_1, \lambda\mathbf{x}_2, \lambda\mathbf{x}_3) = U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ , де  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ .

Бажано, щоб ці властивості були притаманні і регуляризованим функціям.

Властивості T)–P) є фундаментальними симетрійними властивостями довільного потенціалу взаємодії замкнутої системи трьох тодіжніх частинок. Тому вони повинні бути притаманні і регуляризованому потенціалові.

Масштабна інваріантність S) є специфічною властивістю взаємодії: вона налає відповідних властивостей градієнтам потенціалу, що добре означені; ці ж властивості повинні забезпечуватися і регуляризованим потенціалом.

Зауважимо важливу властивість формального виразу  $U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ , що випливає з інваріантностей T)–R): він насправді залежить від трьох скалярних аргументів – відстаней між точками  $x_{12}, x_{13}, x_{23}$ , де  $x_{mn} = |\mathbf{x}_{mn}|$ . Далі запропоновано представлення для функції (6.3.29), в якому залежність від скалярних аргументів є явною. Це спростить регуляризацію і обчислення потенціалу  $U^{(3)}$ . Представлення базується на добре відомій формулі

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-k^2 r^2}$$

яку застосуємо до кожного множника під інтегралом (6.3.29). Після зміни порядку інтегрування матимемо:

$$\begin{aligned} U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= -\frac{1}{\pi^{3/2}} \int d^3k \int d^3z e^{-k_1^2(z-x_1)^2 - k_2^2(z-x_2)^2 - k_3^2(z-x_3)^2} \\ &= -\int \frac{d^3k}{k^3} e^{-(k_1^2 k_2^2 x_{12}^2 + k_2^2 k_3^2 x_{23}^2 + k_1^2 k_3^2 x_{13}^2)/k^2} \\ &= -\int d\hat{\mathbf{k}} \int_0^\infty \frac{dk}{k} e^{-(\hat{k}_1^2 \hat{k}_2^2 x_{12}^2 + \hat{k}_2^2 \hat{k}_3^2 x_{23}^2 + \hat{k}_1^2 \hat{k}_3^2 x_{13}^2)k^2} \end{aligned} \quad (6.3.33)$$

де  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ . З цього представлення очевидно, що  $U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = U^{(3)}(x_{12}, x_{23}, x_{13})$  і, крім цього, що внутрішній інтеграл в останній стрічці (6.3.33) є розбіжним біля нижньої межі  $k = 0$ .

Але різниця потенціалів:

$$U^{(3)}(x_{12}, x_{23}, x_{13}) - U^{(3)}(y_{12}, y_{23}, y_{13}) = -\int d\hat{\mathbf{k}} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \left[ e^{-X^2 k^2} - e^{-Y^2 k^2} \right], \quad (6.3.34)$$

де  $X^2 = \hat{k}_1^2 \hat{k}_2^2 x_{12}^2 + \hat{k}_2^2 \hat{k}_3^2 x_{23}^2 + \hat{k}_1^2 \hat{k}_3^2 x_{13}^2$ ,  $Y^2 = \hat{k}_1^2 \hat{k}_2^2 y_{12}^2 + \hat{k}_2^2 \hat{k}_3^2 y_{23}^2 + \hat{k}_1^2 \hat{k}_3^2 y_{13}^2$ , буде скінченою, оскільки нескінченні  $U_0$  (див. (6.3.30)) з першого і другого членів у (6.3.34) взаємно скорочуються. Дійсно, якщо ввести параметр обрізання  $\varepsilon$  у внутрішній інтеграл у п.ч. рівності (6.3.34), отримаємо збіжний вираз:

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{dk}{k} \left[ e^{-Y^2 k^2} - e^{-X^2 k^2} \right] = \left[ \int_{Y\varepsilon}^\infty - \int_{X\varepsilon}^\infty \right] \frac{dt}{t} e^{-t^2} = \int_{Y\varepsilon}^{X\varepsilon} \frac{dt}{t} e^{-t^2} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \ln \frac{X}{Y}.$$

Далі, введемо кутові змінні  $\{\vartheta, \varphi\}$  на одиничній сфері у  $k$ -просторі, так що

$$\hat{k}_1 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \hat{k}_2 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \hat{k}_3 = \cos \vartheta. \quad (6.3.35)$$

Тоді різницю потенціалів (6.3.34) можна представити так:

$$U^{(3)}(x_{12}, x_{23}, x_{13}) - U^{(3)}(y_{12}, y_{23}, y_{13}) = W(\bar{x}_{12}, \bar{x}_{23}, \bar{x}_{13}) - W(\bar{y}_{12}, \bar{y}_{23}, \bar{y}_{13}), \quad (6.3.36)$$

де

$$W(\bar{x}_{12}, \bar{x}_{23}, \bar{x}_{13}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \ln [(\bar{x}_{12} \sin \vartheta \cos \varphi \sin \varphi)^2 + (\bar{x}_{23} \cos \vartheta \sin \varphi)^2 + (\bar{x}_{13} \cos \vartheta \cos \varphi)^2], \quad (6.3.37)$$

а  $\bar{x}_{mn} = x_{mn}/a$ ; тут введено довільну сталу  $a$  (розмірності довжини) з тим, щоб аргумент логарифму був безрозмірним. Насправді, різниця потенціалів (6.3.36) не залежить від  $a$ , хоч сама функція – так (6.3.37). Оскільки ця функція добре означена і скінчена, її можна розглядати, з точністю до адитивної сталої, як регуляризований потенціал:

$$\tilde{U}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = W(\bar{x}_{12}, \bar{x}_{23}, \bar{x}_{13}) - W_0. \quad (6.3.38)$$

Вибір константи  $W_0$  – довльний; її можна усунути відповідним масштабуванням сталої  $a$ :  $W(x_{12}/a, \dots) = W(x_{12}/b, \dots) + 4\pi \ln(b/a)$ .

Це зумовлено тим, що регуляризована функція (6.3.38) має таку властивість щодо масштабування (замість інваріантності 3S):

$$\tilde{S}) \quad \tilde{U}^{(3)}(\lambda \mathbf{x}_1, \lambda \mathbf{x}_2, \lambda \mathbf{x}_3) = \tilde{U}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + 4\pi \ln \lambda, \quad \text{де } \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Внутрішнє інтегрування (за  $\vartheta$ ) в (6.3.37) можна здійснити явно. Тоді заміна змінних  $\varphi \rightarrow s = \cos \varphi$  дає:

$$\tilde{U}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = 4\pi \ln \frac{x_{13} + x_{23}}{4a} + I(\xi, \eta), \quad (6.3.39)$$

де

$$I(\xi, \eta) = 4 \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{(s + \xi)^2 + \eta^2}} \arctan \sqrt{\frac{(s + \xi)^2 + \eta^2}{1 - s^2}}, \quad (6.3.40)$$

$$\xi = \frac{x_{13}^2 - x_{23}^2}{x_{12}^2}, \quad \eta^2 = \frac{[(x_{13} + x_{23})^2 - x_{12}^2][x_{12}^2 - (x_{13} - x_{23})^2]}{x_{12}^4}, \quad (6.3.41)$$

і для зручності обрано:  $W_0 = 4\pi(\ln 2 - 1)$ . Зауважимо, що міжчастинкові відстані повинні задовольняти три нерівності трикутника:  $x_{13} + x_{23} \geq x_{12}$ ,  $x_{23} + x_{12} \geq x_{13}$  та  $x_{12} + x_{13} \geq x_{23}$ .

Регуляризований потенціал (6.3.39)–(6.3.41) володіє неявною переставною інваріантністю P). Це очевидно з того факту, що довільна перестановка частинок еквівалентна деякому перенумеруванню  $k$ -змінних в інтегралах (6.3.33), (6.3.34) і, як результат, іншому вибору кутових змінних в інтегралі (6.3.37).

В часткових випадках, коли точки  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  і  $\mathbf{x}_3$  лежать на спільній прямій, інтеграл (6.3.40) можна обчислити аналітично:

$$\tilde{U}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = 4\pi \ln \frac{x_>}{2a}, \quad \text{де } x_> = \max(x_{12}, x_{13}, x_{23}). \quad (6.3.42)$$

Також його можна точно обчислити у випадку еквідистантних точок  $x_{12} = x_{13} = x_{23} = r$ ; тоді  $\xi = 0$  і  $\eta^2 = 3$  в (6.3.41), так що  $I$  в (6.3.40) є скінченною сталою, якою знехтуємо. Тому  $\tilde{U}(r, r, r) = 4\pi \ln(r/a)$ .

В загальному випадку необхідне числове інтегрування (6.3.40). Поведінку потенціалу для часткового випадку  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{x}_2 = -\mathbf{a}$  як функції від  $\mathbf{x}_3 = \mathbf{r}$  проілюстровано на рис. 6.3. Значення потенціалу для довільної конфігурації можна отримати з допомогою властивостей інваріантності T)–P) і  $\tilde{S}$ ).

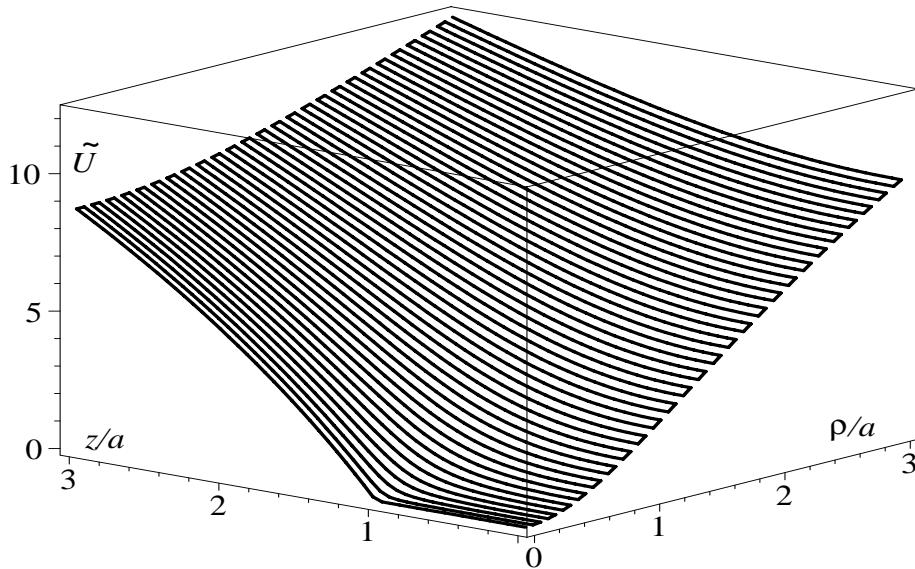


Рис. 6.3. Потенціал  $\tilde{U}^{(3)}(\mathbf{a}, -\mathbf{a}, \mathbf{r})$  як ф-я  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ ;  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $a = |\mathbf{a}|$ .

Функція симетрична щодо інверсії  $z \rightarrow -z$  та повороту навколо  $0z$ . Зокрема,  $\tilde{U}^{(3)} = 4\pi\theta(|z| - a) \ln \frac{1}{2}(|z|/a + 1)$ , якщо  $\rho = 0$ .

У випадку, коли одна з точок є далеко від інших, рівність (6.3.42) дійсна асимптотично. Тому регуляризований потенціал виявляє логарифмічну утримну

поведінку.

Детальний аналіз (нерелятивістичного) спектру зв'язаних станів для загального випадку вимагає розв'язування тричастинкового рівняння (6.3.26), що є складною задачею. Очевидно, спектр дискретний; деяке уявлення про нього можна отримати з відповідної двочастинкової задачі [207].

### 6.3.5. Нелінійне узагальнення дипольної моделі

Модель Віка-Куткоскі (6.3.14) з нелінійними членами (6.3.15) веде до квантово-польового гамільтоніану (6.3.19), кубічний член якого  $H_{\text{int}}^{(3)}$  (6.3.20) є нетривіальним лише на тричастинкових пробних станах (6.3.21), (6.3.22), а двочастинкові стани його не відчувають (подібно,  $H_{\text{int}}^{(4)}$  є відчутним лише для 4-х частинок). Тому кластерний потенціал (6.3.29) може забезпечити конфайнмент у системі не менше 3-х частинок. Отже, ця частково редукована модель в рамках варіаційних теоретико-польових рівнянь може мати застосування до опису баріонів, але не мезонів.

Але описаним вище ЧР-моделям можна природно зіставити моделі точкових частинок. Побудуємо таку модель, у якій як 3-, так і 2-частинкові системи взаємодіють через логарифмічний потенціал. За основу візьмемо нелінійне узагальнення дипольної моделі, задане лагранжіаном:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + \rho \chi + \partial_\mu \chi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{3} \kappa \varphi^3. \quad (6.3.43)$$

Варіація дії  $I = \int d^4x \mathcal{L}$  за полями-медіаторами  $\chi$  і  $\varphi$  дає рівняння (6.3.5) і  $\square \chi = -\kappa \varphi^2$ , що допускають точний розв'язок:  $\varphi = -D * \rho$ ,  $\chi = -\kappa D * [D * \rho]^2$ . Їх підстановка в (??) приводить до такого ЧР-лагранжіану:

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{\text{free}} - \frac{1}{3} \kappa [D * \rho]^3. \quad (6.3.44)$$

У ньому, на відміну від ЧР-лагранжіану типу Юкави (6.1.7), відсутній квадратичний за струмами член взаємодії, а є лише кубічний член, який у явному вигляді має вираз (6.3.16). Очевидно, що в квантово-польовому описі моделі парних взаємодій немає.

Ситуація змінюється, якщо замість струму скалярного поля в (6.3.16) розглянути струм точкових частинок. У статичному наближенні (6.3.6) отримаєм

$$I_{\text{int}}^{(3)} \equiv \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}^{(3)} = (6.3.48) \xrightarrow{(6.3.6)} - \int dt V$$

де

$$\begin{aligned} V &= \frac{\kappa}{3(4\pi)^3} \sum_a \sum_b \sum_c g_a g_b g_c \tilde{U}^{(3)}(x_{ab}, x_{bc}, x_{ca}) \\ &= \frac{\kappa}{3(4\pi)^3} \left\{ \sum_a g_a^3 \tilde{U}^{(3)}(0, 0, 0) + 3 \sum_{a < b} g_a g_b (g_a + g_b) \tilde{U}^{(3)}(x_{ab}, x_{ab}, 0) \right. \\ &\quad \left. + 6 \sum_{a < b < c} g_a g_b g_c \tilde{U}^{(3)}(x_{ab}, x_{bc}, x_{ca}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.3.45)$$

Члени, що містять нескінчені константи  $\tilde{U}^{(3)}(0, 0, 0)$ , відповідають енергії самодії – їх можна упустити. Парні члени дають внесок у двочастинковий потенціал, що має вигляд:

$$V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \frac{\kappa g_1 g_2 (g_1 + g_2)}{(4\pi)^2} \ln \frac{x_{12}}{2a}. \quad (6.3.46)$$

В тричастинковому потенціалі поряд з парними виникає кластерний член  $\tilde{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ , отриманий раніше в (6.3.39)-(6.3.41):

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= \frac{\kappa}{(4\pi)^2} \left\{ g_1 g_2 (g_1 + g_2) \ln \frac{x_{12}}{2a} + g_2 g_3 (g_2 + g_3) \ln \frac{x_{23}}{2a} \right. \\ &\quad \left. + g_3 g_1 (g_3 + g_1) \ln \frac{x_{31}}{2a} \right\} + \frac{2\kappa g_1 g_2 g_3}{(4\pi)^3} \tilde{U}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3). \end{aligned} \quad (6.3.47)$$

Внаслідок нелінійності моделі очевидне порушення принципу суперпозиції.

Логарифмічний потенціал якісно подібний до корнельського потенціалу (1.2.2). Його використання у феноменологічних потенціальних моделях гадронів має певні переваги. Зокрема, в двочастинковій задачі з таким потенціалом різниці між енергетичними рівнями не залежать від маси спокою частинок, і це спостерігається експериментально [207].

Використання релятивістичного виразу для скалярного струму точкових частинок (1.3.25, с.87) у даній моделі приводить до потрійного інтегралу дії типу

Фоккера (що доповнюється вільночастинковим членом (1.3.10, с.81)):

$$I_{\text{int}}^{(3)} = \frac{1}{3}\kappa \iiint d^4x' d^4x'' d^4x''' F(x', x'', x''') \rho(x') \rho(x'') \rho(x''') \quad (6.3.48)$$

$$\xrightarrow{(1.3.25)} \frac{1}{3}\kappa \sum_a \sum_b \sum_c g_a g_b g_c \iiint ds_a ds_b ds_c F(z_a, z_b, z_c) \quad (6.3.49)$$

$$= \kappa \sum_{a \neq b} g_a^2 g_b \iiint ds_a ds'_a ds_b F(z_a, z'_a, z_b) \quad (6.3.49a)$$

$$+ 2\kappa \sum_{a < b < c} g_a g_b g_c \iiint ds_a ds_b ds_c F(z_a, z_b, z_c), \quad (6.3.49b)$$

де  $z'_a \equiv z_a(\tau'_a)$ ,  $z_a(\tau_a) \in \mathbb{M}_4$  – координати світових ліній частинок, а  $s_a(\tau_a)$  їх власний час; див. підрозділ 1.3; штрихована сума упускає члени з  $a = b = c$ .

Ядро інтегралів  $F(z_a, z_b, z_c)$  є згорткою 3-х ф-ї Гріна р-ня Даламбера (1.3.42, с.91); нагадаємо, що воно виникає і у фоккерівській моделі гравітації Владімірова-Туригіна [41, 99], описаній в п. 1.3.4. Оскільки там лише введено вираз для  $F(x_1, x_2, x_3)$ , то варто дослідити деякі властивості і явний вигляд цієї функції.

Вираз (1.3.42, с.91) для  $F(x_1, x_2, x_3)$  є формальним, якщо у згортці

$$F_{\xi\eta\zeta}(x_1, x_2, x_3) = \int d^4z D_\xi(z - x_1) D_\eta(z - x_2) D_\zeta(z - x_3). \quad (6.3.50)$$

не конкретизовано ф-ї Гріна (1.3.13), тобто значення параметрів  $\xi, \eta, \zeta = \pm$ . Для цього корисно відзначити такі формальні властивості ф-ї (6.3.50):

*T*) трансляційна інваріантність:

$$F_{\xi\eta\zeta}(x_1 + \lambda, x_2 + \lambda, x_3 + \lambda) = F_{\xi\eta\zeta}(x_1, x_2, x_3), \text{ де } \lambda \in \mathbb{M}^4;$$

*L*) лоренц-інваріантність:

$$F_{\xi\eta\zeta}(\Lambda x_1, \Lambda x_2, \Lambda x_3) = F_{\xi\eta\zeta}(x_1, x_2, x_3), \text{ де } \Lambda \in \text{SO}(1, 3);$$

*I*) інваріантність щодо інверсії:

$$F_{\xi\eta\zeta}(-x_1, -x_2, -x_3) = F_{-\xi-\eta-\zeta}(x_1, x_2, x_3).$$

*P*) переставна симетрія:

$$F_{\eta\xi\zeta}(x_2, x_1, x_3) = F_{\zeta\xi\eta}(x_3, x_1, x_2) = \dots = F_{\xi\eta\zeta}(x_1, x_2, x_3);$$

Із властивості  $T)$  випливає, що ф-я (6.3.50) насправді залежить лише від 2-х лінійно-незалежних 4-векторних аргументів; наприклад,

$$F_{\xi\eta\zeta}(x_1, x_2, x_3) \equiv F_{\xi\eta\zeta}(x_1 - x_3, x_2 - x_3).$$

Крім цього, в силу властивостей  $I)$  і  $P)$ , всі можливі ф-ї  $F_{\xi\eta\zeta}$  можна виразити через дві ф-ї  $F_{+++}$  (тобто  $\xi = \eta = \zeta = 1$ ) та  $F_{-++}$  (тобто  $\xi = -1, \eta = \zeta = 1$ ). Ці функції можна обчислити з допомогою властивості  $L$ ):

$$\begin{aligned} F_{+++}(u, v) &= \begin{cases} \infty, & \text{якщо } u \text{ і } v \text{ просторово-подібні} \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases} \\ F_{-++}(u, v) &= \frac{\Theta(u^0)\Theta(u^2)\Theta(-v^2)\Theta[-(u-v)^2]}{2(4\pi)^2\sqrt{(u \cdot v)^2 - u^2v^2}}. \end{aligned} \quad (6.3.51)$$

Функція  $F_{+++}$  розбіжна, отже лише  $F_{-++}$  може бути вжита в інтегралах (6.3.48)-(6.3.49).

Оскільки ядро  $F(x_1, x_2, x_3)$  інтегралу дії (6.3.48) є цілком симетричним за побудовою, воно має бути інваріантним щодо інверсії; див. властивість  $I)$ . Єдиний вибір, що задовольняє цю властивість, є:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{6} [F_{-++}(x_1, x_2, x_3) + F_{-++}(x_2, x_1, x_3) \\ &\quad + F_{-++}(x_3, x_1, x_2) + F_{-++}(-x_1, -x_2, -x_3) \\ &\quad + F_{-++}(-x_2, -x_1, -x_3) + F_{-++}(-x_3, -x_1, -x_2)] \end{aligned} \quad (6.3.52)$$

Детальний аналіз фоккерівського інтегралу (6.3.49) виходить за рамки даної роботи. Зокрема, складна “тричастинкова” структура членів парної взаємодії (6.3.49a) може вимагати їх додаткової регуляризації.

## 6.4. Аналіз міжкваркової взаємодії у класичній хромодинаміці

Класична теорія поля є вихідним пунктом і базисом усіх фундаментальних теорій, включно з КТП. Вживання розв'язків класичних польових рівнянь може спростити підхід і забезпечити добре наближення до задач у КТП.

Прикладом може служити ЧР-електродинаміка [9, 74, 75], див. підрозділ 5.1, в якій для опису взаємодії між діраківськими полями матерії використано класичний розв'язок електромагнетного потенціалу. Разом з варіаційним методом у гамільтоновій КТП такий підхід коректно відтворює тонке розщеплення спектру.

У випадку неабелевої теорії поля, такої як хромодинаміка, проблема розв'язання нелінійних польових рівнянь досліджується вже десятки років [375, 376]. На сьогодні не знайдено розв'язків, що описують конфайнмент. Зате отримано низку важливих розв'язків споріднених теорій. Серед них, наприклад, вихор Абрикосова-Нільсена-Олесена [375] служить підказкою про можливий механізм конфайнменту.

Багато зусиль затрачено на пошук розв'язків калібрувальних польових рівнянь з точковими джерелами. В літературі знайдено точне [376] та ітероване [367] нелінійні узагальнення потенціалів Льєнара-Віхерта. Їх, однак, не можна безпосередньо застосувати до випадку розповсюджених джерел польового типу – на противагу до лінійних теорій, де діє принцип суперпозиції. Іншими словами, хромодинаміка точкових джерел не видається адквотною основою для квантової хромодинаміки (КХД).

Цей розділ присвячено вивченю класичної глюонної взаємодії між кварковими діраківськими полями. Калібрувальне поле розглядається як медіатор взаємодії між кварками, а глюонними ступенями вільності знехтувано (вони не є спостережуваними безпосередньо у природі). Як і у випадку електродинаміки, тут вжито формалізм частково редукованої теорії поля. Отриманий ЧР-лагранжіан має складну структуру, і містить нелокальні інтегральні члени з дво-, три- і чотири-точковими ядрами. Деякі властивості кластерної міжкваркової взаємодії, представленої цими ядрами, досліджено у статичному нерелятивістичному наближенні.

### 6.4.1. КХД-лагранжіан та рівняння поля

Густина лагранжіану КХД є добре відомою [373]

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(a)\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(a)} + \sum_q \bar{\psi}_q^i (\mathrm{i} \gamma^\mu (\mathcal{D}_\mu)_{ij} - m_q \delta_{ij}) \psi_q^j \quad (6.4.1)$$

де

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(a)} = \partial_\mu A_\nu^{(a)} - \partial_\nu A_\mu^{(a)} - g_s f_{abc} A_\mu^{(b)} A_\nu^{(c)}, \quad (6.4.2)$$

і

$$(\mathcal{D}_\mu)_{ij} = \delta_{ij} \partial_\mu + \mathrm{i} g_s t_{ij}^{(a)} A_\mu^{(a)}. \quad (6.4.3)$$

Тут  $g_s$  – константа взаємодії КХД,  $f_{abc}$  – структурні константи групи  $\text{SU}(3)$ ,  $t_{ij}^{(a)} = \frac{1}{2} \lambda_{ij}^{(a)}$ , де  $\lambda$  – матриці Гелл-Манна; індекси: кольорові  $i, j = 1, 2, 3$ , ароматові  $q = d, u, s, c, b, t$ , глюонні  $a, b, c = 1, \dots, 8$  – вживатимуться у круглих дужках (що не сплутати з векторними індексами). Як звично, за індексами, що повторюються, підсумовування ведеться за замовчуванням.

Зручно розбити тензор

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(a)} = F_{\mu\nu}^{(a)} + G_{\mu\nu}^{(a)} \quad (6.4.4)$$

на вільнопольовий глюонний тензор

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = \partial_\mu A_\nu^{(a)} - \partial_\nu A_\mu^{(a)} \quad (6.4.5)$$

та його неабелеву частину

$$G_{\mu\nu}^{(a)} = -g_s f_{abc} A_\mu^{(b)} A_\nu^{(c)} \quad (6.4.6)$$

Підстановка (6.4.3) в (6.4.1) зводить лагранжіан (6.4.1) до вигляду

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{\text{int}_1} + \mathcal{L}_{\text{int}_3} + \mathcal{L}_{\text{int}_4} \quad (6.4.7)$$

де

$$\mathcal{L}_\psi = \sum_q \bar{\psi}_q^j (\mathrm{i} \gamma^\mu \partial_\mu - m_q) \psi_q^j \quad (6.4.8)$$

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} F^{(a)\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(a)}, \quad (6.4.9)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}_1} = -J_{\psi}^{(a)\mu} A_{\mu}^{(a)}, \quad (6.4.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}_3} &= -\frac{1}{2} F^{(a)\mu\nu} G_{\mu\nu}^{(a)} = \frac{1}{2} g_s f_{abc} \left( \partial_{\mu} A_{\nu}^{(a)} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{(a)} \right) A_{(b)}^{\mu} A_{(c)}^{\nu} \\ &= g_s f_{abc} A_{(a)}^{\mu} A_{(b)}^{\nu} \partial_{\mu} A_{\nu}^{(c)}, \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}_4} = -\frac{1}{4} G^{(a)\mu\nu} G_{\mu\nu}^{(a)} = -\frac{1}{4} g_s^2 f_{abc} f_{ade} A_{\mu}^{(b)} A_{\nu}^{(c)} A_{(d)}^{\mu} A_{(e)}^{\nu}, \quad (6.4.12)$$

а (6.4.10) описує взаємодію глюонів з кварковим струмом

$$J_{\psi}^{(a)\mu} = g_s \sum_q \bar{\psi}_q^i t_{ij}^{(a)} \gamma^{\mu} \psi_q^j. \quad (6.4.13)$$

З допомогою (6.4.8), (6.4.10)-(6.4.11) і (6.4.3) отримаємо кольорові рівняння Дірака для кваркових полів:

$$i \gamma^{\mu} (\mathcal{D}_{\mu})_{ij} \psi_q^j - m_q \psi_q^i = 0. \quad (6.4.14)$$

Варіація лагранжіану (6.4.1) приводить до рівнянь глюонного поля

$$\partial^{\mu} F_{\mu\nu}^{(a)} = \{\partial_{\lambda} \partial^{\lambda} \delta_{\nu}^{\mu} - \partial_{\nu} \partial^{\mu}\} A_{\mu}^{(a)}(x) = J_{\nu}^{(a)}(x) \quad (6.4.15)$$

де повний струм

$$J_{\nu}^{(a)}(x) = J_{\psi}^{\nu(a)}(x) + J_g^{\nu(a)}(x) + J_{g^2}^{\nu(a)}(x), \quad (6.4.16)$$

що містить кваркову складову (6.4.13) і глюонні складові

$$J_g^{\nu(a)} = g_s f_{abc} \left( A_{(c)}^{\nu} \partial_{\mu} A_{(b)}^{\mu} + 2 A_{(b)}^{\mu} \partial_{\mu} A_{(c)}^{\nu} + A_{(c)}^{\mu} \partial^{\nu} A_{\mu}^{(b)} \right), \quad (6.4.17)$$

$$J_{g^2}^{\nu(a)} = g_s^2 f_{abc} f_{bde} A_{\mu}^{(c)} A_{(d)}^{\mu} A_{(e)}^{\nu}, \quad (6.4.18)$$

зберігається згідно із калібрувальною інваріантністю лагранжіану (6.4.7):

$$\partial^{\mu} J_{\mu}^{(a)}(x) = 0. \quad (6.4.19)$$

## 6.4.2. Переформулювання

Для вивчення міжкваркової взаємодії зручно вжити (формальний) розв'язок рівнянь глюонного поля (6.4.15) для того, щоб редукувати це поле у вихідному

лагранжіані (6.4.1), і отримати відповідний ЧР-лагранжіан. Вище була показана користь такого переформулювання при вивченні міжчастинкових взаємодій у склярній теорії нелінійних полів-медіаторів [17–19].

Перш за все запишемо “глюонне” рівняння (6.4.15) як інтегральне,

$$A_\mu^{(a)}(x) = \int d^4x' D_{\mu\nu}(x - x') J^{\nu(a)}(x'), \quad (6.4.20)$$

де  $D_{\mu\nu}(x - x')$  є симетрична ф-я Гріна р-ня (6.4.15), а  $J^{\nu(a)}(x)$  – збережний струм (6.4.16). В р-ні (6.4.20) не включено вільні глюони, оскільки вони неістотні у цьому розгляді, і не існують у природі.

У цьому місці розглянемо п.ч. р-ня (6.4.20) як формальний розв’язок “глюонного” рівняння (6.4.15). Якщо вставити цей вираз (6.4.20) в (6.4.7), знехтувати неістотними дивергентними членами і врахувати рівняння (6.4.15), то можна звести густину лагранжіану КХД (6.4.7) точно до вигляду

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi - \frac{1}{2} J_\psi^{\mu(a)} A_\mu^{(a)} + \mathcal{L}_{\text{int}_3} \left( A_\nu^{(b)} \right) + \mathcal{L}_{\text{int}_4} \left( A_\nu^{(b)} \right). \quad (6.4.21)$$

Формальний розв’язок (6.4.20) р-ня (6.4.15) містить симетричну функцію Гріна цього р-ня  $D_{\mu\nu}(x - x')$ , яка не є однозначно визначена через виродженість оператора  $\partial_\lambda \partial^\lambda \delta_\nu^\mu - \partial_\nu \partial^\mu$ . Вибір ф-ї Гріна цілком або частково редукує калібрувальну інваріантність. Хоча вибір калібрування не повинен впливати на спостережувані величини, доведення цього твердження є нетривіальним. З іншого боку, вживання різних калібрувань в КХД є корисною можливістю. Зокрема, це може виявити різні аспекти конфайнменту [12].

Тут буде вжито калібрування Лоренца  $\partial_\mu A^{\mu(a)}(x) = 0$ . Відповідна функція Гріна  $D_{\mu\nu}(x - x') = \eta_{\mu\nu} D_{\text{sym}}(x - x')$ , де  $D_{\text{sym}}(x - x') \equiv D_{\eta=0}(x - x')$  – симетрична ф-я Гріна р-ня Даламбера (1.3.13). Вживання калібрування Кулона та еквівалентність обидвох калібрувань буде розглянутися далі.

Вираз (6.4.20) є формальним розв’язком (6.4.15), оскільки “глюонні” компоненти  $J_g^{\nu(a)} + J_{g^2}^{\nu(a)}$  струму  $J^{\nu(a)}$  залежать від  $A^{\mu(a)}$ . Тут не вдалося отримати явний замкнений розв’язок р-ня (6.4.20) (тобто (6.4.15)) для  $A^{\mu(a)}$  у термінах кваркових полів  $\psi_q^i$ . Тому необхідно звернутися до наближених методів.

Рівняння (6.4.20) можна розв'язати ітераційно щодо  $A^{\mu(a)}$  (див. [413]). Член 1-го порядку у цій послідовності – вираз (6.4.20), але з  $J_{\psi}^{\mu(a)}$  замість  $J^{\mu(a)}$ , тобто

$$A_{(1)}^{\mu(a)}(x) = \int d^4x' D(x - x') J_{\psi}^{\mu(a)}(x')$$

Індекс (1) в (6.4.22) вказує, що це – ітераційний член 1-го порядку. Зауважимо, що глюонне поле виражене тут явно лише у термінах кваркових полів  $\psi_q^i$ .

Відповідно, у 1-му порядку лагранжіан (6.4.21) модифікується до виразу

$$\mathcal{L}_{(1)} = \mathcal{L}_{\psi} - \frac{1}{2} J_{\psi}^{\mu(a)} A_{(1)\mu}^{(a)} + \mathcal{L}_{\text{int}_3} \left( A_{(1)}^{\nu(b)} \right) + \mathcal{L}_{\text{int}_4} \left( A_{(1)}^{\nu(b)} \right), \quad (6.4.22)$$

в якому  $A_{(1)}^{\nu(b)}$  має вираз (6.4.22). Переформульований лагранжіан  $\mathcal{L}_{(1)}$  (і відповідна дія) є функціоналом лише ф-ї Гріна  $D(x - x')$  і кваркових полів  $\psi_q^i$ , і становить частково редуковану модель.

Тут варто згадати, що в КЕД (тобто у випадку  $SU(1)$ ) неабелеві члени  $\mathcal{L}_{\text{int}_3}$  і  $\mathcal{L}_{\text{int}_4}$  не виникають, і  $\mathcal{L}_{(1)}$  відповідає частково редукованому лагранжіану КЕД (5.1.4)–(5.1.5, с.221); див. підрозділ 5.1.

### 6.4.3. Аналіз міжкваркових взаємодій в редукованій моделі і статичній граници

Розглянемо кожен з членів інтегралу дії  $I = \int d^4x \mathcal{L}$  редукованої моделі, що описує взаємодію. Член, що відповідає  $\mathcal{L}_{\text{int}_1}$  (6.4.10) має вигляд

$$I_{\text{int}_1}^{(1)} = -\frac{1}{2} \int d^4x J_{\psi}^{\mu(a)}(x) A_{(1)\mu}^{(a)}(x) = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' J_{\psi}^{\mu(a)}(x) D(x - x') J_{\psi\mu}^{(a)}(x'), \quad (6.4.23)$$

де кварковий струм  $J_{\psi}^{\mu(a)}(x)$  дано в р-ні (6.4.13). Оскільки  $J_{\psi}^{\mu(a)} \propto g_s$ , очевидно, що  $I_{\text{int}_1}^{(1)}$  відповідає внеску  $O(g_s^2)$ . Цей член описує взаємодію кваркових струмів через глюонну функцію Гріна  $D$ , що мало б у квантованій теорії відповідати одноглюонному обміну; див. рис. 6.4а.

Щоб зрозуміти фізичний зміст взаємодії, що відповідає  $I_{\text{int}_n}^{(1)}$  ( $n = 1, 3, 4$ ), корисно розглянути випадок статичного джерела у нерелятивістичній граници,

подібно до прикладу скалярної моделі в підрозділі 6.3. Для статичного випадку  $J_\psi^{\mu(a)}(x) = J_\psi^{\mu(a)}(\mathbf{x})$ , тому статичною версією  $I_{\text{int}_1}^{(1)}$  (6.4.23) є

$$I_{\text{int}_1}^{(1)} = -\frac{1}{2} \int dt dt' d^3x d^3x' J_\psi^{\mu(a)}(\mathbf{x}) D(x - x') J_\psi^{(a)}(\mathbf{x}'). \quad (6.4.24)$$

З (1.3.13, c.82) випливає, що

$$\int dt' D(x - x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (6.4.25)$$

Тому у статичному випадку  $I_{\text{int}_1}^{(1)}$  (6.4.23) можна записати

$$I_{\text{int}_1}^{(1)} = - \int dt H_{\text{int}_1}^{(1)}, \quad \text{де } H_{\text{int}_1}^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' J_\psi^{\mu(a)}(\mathbf{x}) \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} J_\psi^{(a)}(\mathbf{x}'). \quad (6.4.26)$$

З (6.4.26) очевидно, що  $H_{\text{int}_1}^{(1)}$  відповідає двоточковій потенціальній функції

$$V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{g_s^2}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} = \frac{g_s^2}{4\pi} \frac{1}{x_{12}}, \quad (6.4.27)$$

що є нерелятивістичною границею 1-глюонної взаємодії (в координатному представленні). Вона відображає “кулонівський”  $O(g_s^2)$ -внесок до міжкваркової взаємодії і залежить лише від відстані  $x_{12}$  між точками  $\mathbf{x}_1$  and  $\mathbf{x}_2$ .

Подібно, компонента дії, що відповідає  $\mathcal{L}_{\text{int}_3}$  (6.4.11) у 1-му порядку є

$$I_{\text{int}_3}^{(1)} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}_3}^{(1)}(x) = -g_s f_{abc} \int d^4x A_{(1)\nu}^{(a)}(x) A_{(1)}^{\mu(b)}(x) \partial_\mu A_{(1)}^{\nu(c)}(x). \quad (6.4.28)$$

Цей член відповідає  $O(g_s^4)$ -внескові в енергію. Тут ф-я Гріна  $D$  з'являється в кубі, що відповідає 3-глюонній вершинній взаємодії, і походить з кубічної залежності члену  $\mathcal{L}_{\text{int}_3}^{(1)}$  від  $A_\mu^{(a)}$ ; див. рис. 6.4b.

У статичному випадку  $A_{(1)\mu}^{(a)}(x) = \int d^4x' D(x - x') J_\psi^{(a)}(\mathbf{x}')$  стає

$$A_{(1)\mu}^{(a)}(\mathbf{x}) = \int d^3x' J_\psi^{(a)}(\mathbf{x}') \int dt' D(x - x') = \int \frac{d^3x'}{4\pi} \frac{J_\psi^{(a)}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (6.4.29)$$

де враховано (6.4.25), і тому

$$\partial_t A_{(1)\nu}^{(a)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \partial_k A_{(1)\nu}^{(a)}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3x'}{4\pi} J_\psi^{(a)}(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (6.4.30)$$

де  $k = 1, 2, 3$ . Отже, у статичному випадку

$$I_{\text{int}_3}^{(1)} = - \int dt H_{\text{int}_3}^{(1)} = -g_s f_{abc} \int d^4x A_{(1)\nu}^{(a)}(\mathbf{x}) A_{(1)}^{k(b)}(\mathbf{x}) \partial_k A_{(1)}^{\nu(c)}(\mathbf{x}). \quad (6.4.31)$$

Тому, з врахуванням (6.4.29) і (6.4.30),

$$\begin{aligned} H_{\text{int}_3}^{(1)} = & -\frac{g_s}{(4\pi)^3} f_{abc} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 J_{\psi\nu}^{(a)}(\mathbf{x}_1) J_{\psi}^{k(b)}(\mathbf{x}_2) J_{\psi}^{\nu(c)}(\mathbf{x}_3) \times \\ & \times U_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \end{aligned} \quad (6.4.32)$$

де

$$U_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{\partial}{\partial x_3^k} U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \quad (6.4.33)$$

а функція  $U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  означена інтегралом (6.3.29) в п. 6.3.4. Зауважимо, що хоча цей інтеграл є розбіжним, але похідні (6.4.33) є скінченні.

Очевидно, що члени взаємодії (6.4.32) відповідають триточковий взаємодії

$$V_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = -\frac{g_s^4}{(4\pi)^3} U_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = -\frac{g_s^4}{(4\pi)^3} \frac{\partial}{\partial x_3^k} U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \quad (6.4.34)$$

де  $k = 1, 2, 3$ , яка є  $O(g_s^4)$ -“поправка” 1-го ітераційного порядку до двоточкової кулонівської взаємодії  $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , даній в (6.4.27).

Нарешті, компонента дії, що відповідає  $\mathcal{L}_{\text{int}_4}$ , (6.4.12), у 1-му ітераційному наближенні є порядку  $O(g_s^6)$ , 4-го ступеня щодо  $A_{(1)}$  (тобто  $D$ ):

$$I_{\text{int}_4}^{(1)} = -\frac{1}{4} g_s^2 f_{abc} f_{ade} \int d^4x A_{(1)\mu}^{(b)}(x) A_{(1)\nu}^{(c)}(x) A_{(1)}^{\mu(d)}(x) A_{(1)}^{\nu(e)}(x), \quad (6.4.35)$$

і відповідає 4-глюонній вершинній взаємодії; рис. 6.4c. У статичному випадку

$$I_{\text{int}_4}^{(1)} = - \int dt H_{\text{int}_4}^{(1)}, \quad (6.4.36)$$

де, згідно з (6.4.29),

$$\begin{aligned} H_{\text{int}_4}^{(1)} = & \frac{1}{4} g_s^2 f_{abc} f_{ade} \int d^3x A_{(1)\mu}^{(b)}(\mathbf{x}) A_{(1)\nu}^{(c)}(\mathbf{x}) A_{(1)}^{\mu(d)}(\mathbf{x}) A_{(1)}^{\nu(e)}(\mathbf{x}) \\ = & \frac{g_s^2}{4(4\pi)^4} f_{abc} f_{ade} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 J_{\psi\mu}^{(b)}(\mathbf{x}_1) J_{\psi\nu}^{(c)}(\mathbf{x}_2) J_{\psi}^{\mu(d)}(\mathbf{x}_3) J_{\psi}^{\nu(e)}(\mathbf{x}_4) \\ & \times U^{(4)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4), \end{aligned} \quad (6.4.37)$$

і де

$$U^{(4)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \int \frac{d^3x}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1||\mathbf{x} - \mathbf{x}_2||\mathbf{x} - \mathbf{x}_3||\mathbf{x} - \mathbf{x}_4|}. \quad (6.4.38)$$

Якщо врахувати константи взаємодії та споріднені множники, відповідна функція потенціальної енергії стає

$$V_{\text{int}4}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \frac{1}{4} \frac{g_s^6}{(4\pi)^4} U^{(4)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4). \quad (6.4.39)$$

У 1-му ітераційному наближенні це є 4-точкова потенціальна  $O(g_s^6)$ -поправка до кулонівського потенціалу (6.4.27).

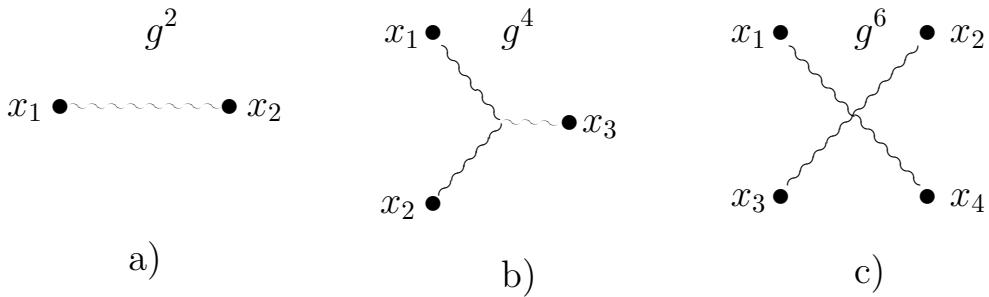


Рис. 6.4. Фейнманівські діаграми: а) 1-глюонний обмін породжує 2-точковий потенціал  $\sim g^2$ ; б) 3-глюонний обмін породжує 3-точковий потенціал  $\sim g^4$ ; в) 4-глюонний обмін породжує 4-точковий потенціал  $\sim g^6$ .

Усі 2-, 3- і 4-точковий потенціали отримано у калібруванні Лоренца. Далі показано, що вибір калібрування Кулона веде до того ж результату.

Симетричну ф-ю Гріна  $D_{\mu\nu}(x - x')$  р-ня (6.4.15), що відповідає калібрувальній умові Кулона  $\partial_k A^{k(a)}(x) = 0$ , можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} D'_{00}(x - x') &= \frac{\delta(t - t')}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, & D'_{k0}(x - x') &= 0, \\ D'_{kl}(x - x') &= \{\delta_{kl} - \Delta^{-1}\partial_k\partial_l\} D(x - x'), \end{aligned} \quad (6.4.40)$$

де  $D(x - x')$  – ф-я Гріна р-ня Даламбера (1.3.13), а  $\Delta = \partial^2$  – лапласіан. Розглянемо потенціал  $A'^{(a)}_{(1)\mu}(\mathbf{x})$  (штрих вказує на калібрування Кулона) породжений статичним кварковим струмом  $J_{\psi\mu}^{(a)}(\mathbf{x})$ . Для часової компоненти маємо:

$$\begin{aligned} A'_{(1)0}^{(a)}(\mathbf{x}) &= [D'_{00} * J_\psi^{0(a)}](\mathbf{x}) \equiv \int d^4x' D'_{00}(x - x') J_\psi^{0(a)}(\mathbf{x}') \\ &= \int d^3x' \int dt' \frac{\delta(t - t')}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} J_\psi^{0(a)}(\mathbf{x}') = A_{(1)0}^{(a)}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (6.4.41)$$

де “\*” позначає згортку. Решту компонент представимо так:

$$A'_{(1)k}^{(a)} = D'_{kl} * J_\psi^{l(a)} = \underbrace{D * J_\psi^{(a)}}_{A_{(1)k}^{(a)}} - \underbrace{(\Delta^{-1} \partial_k \partial_l D) * J_\psi^{l(a)}}_0. \quad (6.4.42)$$

Останній член зникає згідно із законом збереження (6.4.19), який у 1-му ітераційному наближенні зводиться до рівності  $\partial_k J_\psi^{k(a)} = 0$ . Тому векторний потенціал  $A'_{(1)\mu}^{(a)}$ , обчислений у калібруванні Кулона, тотожний до  $A_{(1)\mu}^{(a)}$  в калібруванні Лоренца. Як наслідок, члени дії  $I_{\text{int}_1}^{(1)}, I_{\text{int}_3}^{(1)}, I_{\text{int}_4}^{(1)}$  (див. р-ня (6.4.24), (6.4.28), (6.4.31)) і, отже, 2-, 3- і 4-точкові потенціали є тими ж.

Інтеграли (6.4.33), (6.3.29) і (6.4.38), що визначають 3- і 4-точкові потенціали, не вдалося явно виразити у термінах відомих аналітичних функцій. Натомість обчислення  $U_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  можна звести до підрахунку двох 1-кратних квадратур, а  $U^{(4)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$  – до подвійної квадратури, що можна реалізувати чисельно. Можна також встановити загальні властивості цих поправок до кулонівського міжкваркового потенціалу, і отримати аналітичні вирази у часткових випадках.

#### 6.4.4. Властивості і вирази 3- і 4-точкового потенціалів

Оскільки “потенціали”  $U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  і  $U^{(4)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$  є ф-ями лише відстаней  $x_{mn} = |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|$  (як і слід сподіватися у випадку замкненої системи), то їх можна обчислити аналітично для деяких часткових випадків. Наприклад, коли усі відстані є однакові:  $x_{12} = x_{13} = x_{23} = r$ , то регуляризована ф-я (6.3.39) стає  $U^{(3)}(r) = 4\pi \ln(r/a)$ , де  $a$  – довільний масштаб. Подібно, коли  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3$ , тобто  $x_{23} = 0$ , а  $x_{12} = x_{13}$ , то  $U^{(3)}(x_{12}) = 4\pi \ln(x_{12}/a)$ , так що

$$U_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2) \equiv \partial U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)/\partial x_3^k \Big|_{x_3=\mathbf{x}_2} = -2\pi \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)_k}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2}.$$

Звідси видно, що поправка до қулонівського потенціалу 1-глюонного обміну (6.4.27), відповідна до "кубічного" члену взаємодії (6.4.32)-(6.4.34), має у нерелятивістичній граници вигляд :

$$V_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2) = \frac{g_s^4}{2(4\pi)^2} \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)_k}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2}. \quad (6.4.43)$$

Подібно, у частковому випадку  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3$  і  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_4$  є лише одна відстань  $x_{12}$  між двома парами тодіжних точок, і 4-точкову потенціальну ф-ю  $U^{(4)}$  (6.4.38), а отже і  $V_{\text{int}_4}$  (6.4.39), можна обчислити явно:

$$U^{(4)}(x_{12}) = \int \frac{d^3 v}{|\mathbf{v}|^2 |\mathbf{v} + \mathbf{x}_{12}|^2} = \frac{\pi^3}{x_{12}}, \quad V_{\text{int}_4}(x_{12}) = \frac{g_s^6}{4^5 \pi} \frac{1}{x_{12}}. \quad (6.4.44)$$

Хоча вирази (6.4.43) і (6.4.44) є лише сегментами 3- і 4-точкового потенціалів (6.4.34) і (6.4.39), видається, що і в загальному поведінка цих функцій є кулоно-подібна. Нагадаймо, що ці вирази є порядку  $O(g_s^4)$  і  $O(g_s^6)$  відповідно.

Решта цього пункту присвячена обчисленню 3- і 4-точкового потенціалів для довільних значень їх аргументів.

Компоненти 3-точкового потенціалу (6.4.33) утворюють векторне поле:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \quad (6.4.45)$$

де функція  $U^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  вивчалася в п. 6.3.4. Її представлення (6.3.33) є корисним і для (6.4.45), і дає формулу:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \mathbf{x}_3} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} \int d^2 \hat{k} \int_0^\infty \frac{dk}{k} e^{-(\hat{k}_1^2 \hat{k}_2^2 x_{12}^2 + \hat{k}_2^2 \hat{k}_3^2 x_{23}^2 + \hat{k}_3^2 \hat{k}_1^2 x_{31}^2) k^2} \\ &= 2 \int d^2 \hat{k} \hat{k}_3^2 (\hat{k}_1^2 \mathbf{x}_{31} + \hat{k}_2^2 \mathbf{x}_{32}) \int_0^\infty dk \ k e^{-(\hat{k}_1^2 \hat{k}_2^2 x_{12}^2 + \dots) k^2} \\ &\equiv \mathbf{x}_{31} I_1 + \mathbf{x}_{32} I_2, \end{aligned} \quad (6.4.46)$$

де

$$I_n = \int \frac{d^2 \hat{k} \hat{k}_n^2 \hat{k}_3^2}{\hat{k}_1^2 \hat{k}_2^2 x_{12}^2 + \hat{k}_2^2 \hat{k}_3^2 x_{23}^2 + \hat{k}_1^2 \hat{k}_3^2 x_{31}^2}, \quad n = 1, 2. \quad (6.4.47)$$

Після введення кутових змінних (6.3.35) отримаємо:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi J, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi J, \quad (6.4.48)$$

де

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{(x_{12} \sin \vartheta \cos \varphi \sin \varphi)^2 + \cos^2 \vartheta (x_{13}^2 \cos^2 \varphi + x_{23}^2 \sin^2 \varphi)} \\ &= \frac{8}{x_{12}^2 R^2} \left[ 1 - \frac{\sin 2\varphi}{R} \arctan \frac{R}{\sin 2\varphi} \right], \quad R = \sqrt{(\cos 2\varphi + \xi)^2 + \eta^2}, \end{aligned} \quad (6.4.49)$$

а  $\xi$  і  $\eta^2$  означено в (6.3.41). Врахування (6.4.49) в (6.4.48) і використання змінної інтегрування  $s = \cos 2\varphi$  дає квадратури:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{8}{x_{12}^2} \int_{-1}^1 \frac{ds}{R^2} \left[ \sqrt{\frac{1+s}{1-s}} - \frac{1+s}{R} \arctan \frac{R}{\sqrt{1-s^2}} \right], \\ I_2 &= \frac{8}{x_{12}^2} \int_{-1}^1 \frac{ds}{R^2} \left[ \sqrt{\frac{1-s}{1+s}} - \frac{1-s}{R} \arctan \frac{R}{\sqrt{1-s^2}} \right]. \end{aligned} \quad (6.4.50)$$

У частковому випадку  $x_{23} = 0$  вирази (6.4.46)–(6.4.50) дають (6.4.43). У загальному випадку (при довільних  $x_{12}$ ,  $x_{13}$  і  $x_{23}$ ) інтегали (6.4.50) можна обчислити з допомогою комп'ютера.

Поведінку 3-точкового векторного потенціалу як функції  $\mathbf{x}_3$  проілюстровано на рис. 6.5. Варто відзначити симетрійні властивості щодо:

- T)** трансляції:  $\mathbf{U}(\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}_3 + \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ , де  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^3$ ;
- R)** обертання:  $\mathbf{U}(\mathbf{R}\mathbf{x}_1, \mathbf{R}\mathbf{x}_2, \mathbf{R}\mathbf{x}_3) = \mathbf{R}\mathbf{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ , де  $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$ ;
- P)** часткової перестановки:  $\mathbf{U}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) = \mathbf{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ ;
- S)** масштабування:  $\mathbf{U}(\lambda \mathbf{x}_1, \lambda \mathbf{x}_2, \lambda \mathbf{x}_3) = \lambda^{-1} \mathbf{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ , де  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ .

Ці властивості випливають з властивостей 3-точкового скалярного потенціалу (6.3.29), вказаних на с. 299. Зауважимо, що масштабне перетворення **S**) потенціалу  $\mathbf{U}$  відображає його кулоно-подібну поведінку.

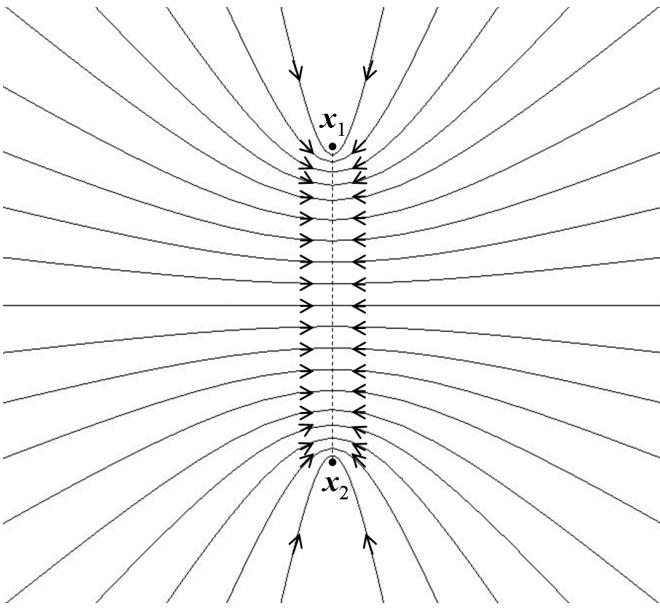


Рис. 6.5. Двовимірний перетин векторного потенціалу  $\mathbf{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  як функції  $\mathbf{x}_3 = \mathbf{r}$  при фіксованих  $\mathbf{x}_1$  and  $\mathbf{x}_2$ . Стрілки вказують напрям векторного поля  $\mathbf{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{r})$ . Воно інваріантне щодо поворотів навколо осі  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ . Пунктир між  $\mathbf{x}_1$  і  $\mathbf{x}_2$  відповідає  $\mathbf{U} = 0$ .

4-точковий скалярний потенціал (6.4.38) можна тлумачити аналогічно:

$$\begin{aligned} U^{(4)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4) &= \int \frac{d^3x}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| \cdots |\mathbf{x} - \mathbf{x}_4|} = \frac{1}{\pi^2} \int d^4k \int d^3x e^{-k_1^2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2 - \dots - k_4^2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_4)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int d^3\hat{k} \int_0^\infty dk e^{-X^2 k^2} = \int \frac{d^3\hat{k}}{\sqrt{X^2}}, \end{aligned} \quad (6.4.51)$$

де  $X^2 \equiv \hat{k}_1^2 \hat{k}_2^2 x_{12}^2 + \hat{k}_1^2 \hat{k}_3^2 x_{13}^2 + \hat{k}_1^2 \hat{k}_4^2 x_{14}^2 + \hat{k}_2^2 \hat{k}_3^2 x_{23}^2 + \hat{k}_2^2 \hat{k}_4^2 x_{24}^2 + \hat{k}_3^2 \hat{k}_4^2 x_{34}^2$ ,

$\hat{k}_n = k_n/k$  ( $n = 1, \dots, 4$ ),  $k = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_4^2}$ , а  $\int d^3\hat{k}$  позначає інтегрування за одничною гіперсфeroю в 4D  $k$ -просторі.

Далі введемо кутові змінні  $\{\chi, \vartheta, \varphi\}$  на цій 4D гіперсфері, так що

$$\hat{k}_1 = \sin \chi \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \hat{k}_2 = \sin \chi \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \hat{k}_3 = \sin \chi \cos \vartheta, \quad \hat{k}_4 = \cos \chi,$$

$\int d^3\hat{k} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^\pi \sin^2 \chi d\chi$ . Використання змінних інтегрування  $u = \cos \chi$ ,  $v = \cos \vartheta$ ,  $w = \cos 2\varphi$  зводить інтеграл (6.4.51) до вигляду:

$$U^{(4)}(x_{12}, \dots, x_{34}) = 4 \int_{-1}^1 \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} \int_0^1 dv I, \quad (6.4.52)$$

$$\text{де } I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{A^2 + u^2 B^2}} = \frac{1}{B} \ln \left( \frac{\sqrt{A^2 + B^2} + B}{A} \right),$$

$$A^2 = \left\{ \frac{1}{4} x_{12}^2 (1-w^2)(1-v^2) + \frac{1}{2} [x_{13}^2 + x_{23}^2 + (x_{13}^2 - x_{23}^2)w]v^2 \right\} (1-v^2),$$

$$B^2 = \frac{1}{2} [x_{14}^2 + x_{24}^2 + (x_{14}^2 - x_{24}^2)w] (1-v^2) + x_{34}^2 v^2 - A^2.$$

Цей подвійний інтеграл можна обчислити на комп'ютері. Обчислення (6.4.52) для часткового випадку  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3$  і  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_4$  дає аналітичний вираз (6.4.44).

На кінець варто зазначити, що 4-потенціал (6.4.52) має такі ж властивості масштабування, що й векторний 3-точковий (див. властивість S), що свідчить про його кулоно-подібний характер. Він також інваріантний щодо трансляцій, поворотів та довільних перестановок його аргументів, як і скалярний 3-точковий потенціал (див. властивості T), R) і P) на стор. 299).

## 6.5. Висновки

В цьому розділі розглядаються низка теоретико-польових моделей, таких як модель Віка-Куткоскі, скалярна модель Юкави, модель Кіккіса та деякі їх узагальнення. Матерія у них представлена комплексними скалярними полями, що дає спрощений опис заряджених частинок, а взаємодія здійснюється через дійсне скалярне поле (чи поля) – стандартне (масивне чи безмасове), чи з нестандартною динамікою (напр. з вищими похідними). В отриманому тут частково редукованому формулюванні моделей взаємодія представлена симетричною функцією Гріна поля-посередника, а більш загально – довільним пуанкарє-інваріантним ядром інтегралу дії.

ЧР-моделі служать джерелом релятивістичних рівнянь для зв'язаних станив. Хоча у цій ролі модель Віка-Куткоскі і скалярна модель Юкави використовувались раніше, тут вони розглядаються як (часо-)нелокальні теоретико-польові моделі. Основна ідея підрозділу 6.1 полягає у тлумаченні часової нелокальності з допомогою відповідного гамільтонового формалізму [105]. Процедура гамільтонізації істотно залежить від явної часової еволюції полів (матерії). Оскільки моделі типу Юкави (і тим більше їх узагальнення) не є точно розв'язними, доводиться звертатися до певних наближень, у даному розділі – до розкладів за константою взаємодії (на відміну від квазірелятивістичних у попередньому). Далі здійснюється канонічне квантування моделі, і з допомогою теоретико-польового варіаційного методу [10] виводяться кілька-частинкові хвильові рівняння. Виявилося, що

двочастинкові рівняння, отримані раніше в рамках ЧР-моделі Юкави [71, 72], у даному методі відповідають 1-му наближення за константою взаємодії.

Запропонований підхід дозволяє в принципі розглядати вищі наближення. Але вже у 1-му наближенні можна отримати дво- і кілька-частинкові варіаційні рівняння типу Салпітера, що описують широкий клас взаємодій. Ядра таких рівнянь можна пов'язати як із стандартними теоріями поля, так і з різними нестандартними класичними теоретико-пользовими моделями.

У підрозділі 6.2 як медіатор взаємодії розглядалося тахіонне поле, тобто скалярне поле з уявною масою  $m = i\mu$ . ЧР-формулювання моделі є природнім, оскільки лише симетрична функція Гріна тахіонного поля є пуанкарейнваріантною. У задачі про зв'язані стани, обумовлені тахіонною взаємодією, розглядалася система двох різних частинок у нерелятивістичній границі. Отриманий тут потенціал взаємодії (6.2.2) виявився дійсною частиною потенціалу Юкави з уявним радіусом Дебая  $r_D = i/\mu$  – т. зв. *анти-екранованим* потенціалом, що має й інші прикладні застосування. Для розв'язання рівняння Шредінгера із цим потенціялом були застосовані як варіаційний, так і числовий методи. Варіаційним методом доведено, що зв'язані стани існують як для від'ємного, так і для додатнього значення константи взаємодії  $\alpha$ , у діапазоні метамас  $m = \eta m_r |\alpha|$ , де  $0 < \eta < 1$ . Числові розрахунки дають існування зв'язаних станів і при  $1 \leq \eta \leq 2.5$ , причому енергія зв'язку основного стану швидко спадає із зростанням метамаси так, що  $|\mathcal{E}/\mathcal{E}_{Ry}| < 10^{-9}$  при  $\eta = 2.5$ . Труднощі числового інтегрування при  $\eta > 2.5$  швидко зростають і не дають надійних результатів. Апроксимація залежності  $\mathcal{E}(\mu)$  в цій області показує подальше стрімке спадання енергії зв'язку аж до нуля при  $\eta \gtrsim 3$ , тобто  $\mu_c \simeq 3m_r |\alpha|$ . Отже, зв'язані стани існують для  $\mu < \mu_c$  або, у термінах уявного радіусу Дебая, для  $r_D > a_B/3$ . Питання про точне значення, або хоча б точнішу оцінку критичного параметру  $\eta_c$  залишається відкритим.

Низка моделей присвячена опису утримних взаємодій в гадронах. Зокрема, ЧР-формулювання відомих моделей Кіскіса та дипольної приводить до двочастинкових варіаційних хвильових рівнянь типу Салпітера з ядром  $\tilde{G}(k) \sim 1/k^4$ , що відповідає лінійному статичному потенціалові. Тут вони не розглядаються,

оскільки подібні рівняння із таким ядром, зокрема іх сингулярність, вивчалися в літературі [313–315], див. п. 1.2.9. Натомість, запропоновано модифіковані лагранжіани обидвох моделей, що поряд з далекосяжною частиною ядра  $\tilde{G}(k) \sim 1/k^4$  породжують і короткосяжний член  $\tilde{D}(k) \sim 1/k^2$ .

В підрозділі 6.3 розглядалися узагальнення моделей Віка-Куткоскі та дипольної, що включають нелінійні поля-медіатори. Внаслідок нелінійності моделі Віка-Куткоскі її редукцію вдалося здійснити лише наближено. У випадку  $(\chi^3 + \chi^4)$ -нелінійності в ЧР-лагранжіані з'являються нелокальні члени, ядра яких породжують 3- і 4-точкові “кластерні” потенціали; див. (6.3.17), (6.3.18).

Користуючись методикою, викладеною в підрозділі 6.1, побудовано квантовану версію моделі в гамільтоновому формулюванні. Далі, з допомогою КТП-версії варіаційного методу виведено інтегральне хвильове рівняння для тричастинкової системи. Показано, що ядра (релятивістичні потенціали) містять члени однобозонного обміну та триточкові кластерні члени. Їх нерелятивістична границя, отримана у координатному представленні, містить парні қулонівські потенціали та триточковий утримний потенціал. Останній, породжений  $\chi^3$ -членом гамільтоніану, є розбіжним (і вимагає регуляризації) але різниця потенціалів – скінченна. Запропоновано регуляризацію 3-точкового потенціалу, яка виявляється логарифмічно утримною, і залежною лише від міжчастинкових відстаней. Її обчислення зведено до однократної квадратури.

Тричастинкове хвильове рівняння має складну структуру, а його аналіз виходить за межі даної роботи. Це рівняння виведено з допомогою 3-частинкового пробного стану, який виявився найпростішим варіаційним анзацом, що виявляє утримні властивості моделі. Іншими словами, мезони, як двочастинкові системи, не описуються в рамках нелінійної моделі Віка-Куткоскі. Причина мабуть полягає у тому, що завдяки нормальному впорядкуванню гамільтоніану кластерні члени не дають вкладу в двочастинкову взаємодію. Цей недолік усунено в нелінійній модифікації дипольної моделі, часткову редукцію якої здійснено точно, і побудовано фоккерівський аналог моделі. Тут кластерні члени породжують логарифмічний двоточковий потенціал, що поряд з описаним вище триточковим забезпечують

конфайнмент як у три- так в двочастинкових системах.

Способи обчисленнь, набуті в рамках порівняно простих нелінійних теоретико-польових моделей, застосовано в підрозділі 6.4 до більш реалістичної нелінійної теорії – хромодинаміки: там отримано вирази для членів взаємодії, що відповідають неабелевим членам (6.4.11) і (6.4.12) хромодинамічної дії. У першому ітераційному наближенні (6.4.22) вони виявляються виразами, що включають добутки 3-х і 4-х одноглюонних функцій Гріна – у відповідності до 3- і 4-глюонних вершин на рис. 6.4. Ці неабелеві члени у нерелятивістичній границі містять 3- і 4-точкові статичні потенціали (6.4.34) і (6.4.39), залежні лише від відстаней між точками. Триточковий потенціал виявився градієнтом кластерного потенціалу, отриманого в рамках нелінійної моделі Віка-Куткоскі (6.3.17); 4-точковий має подібну структуру, і обидва є кулоно-подібними. Разом з взаємодією одноглюонного обміну, вони можуть служити як короткосяжні внески у потенціальні моделі баріонів, тетракварків тощо. Відповідні релятивістичні рівняння, що описують системи кількох зв'язаних кварків, можна вивести варіаційним методом з квантованої версія теорії, що базується на ЧР-лагранжіані.

## ВИСНОВКИ

У дисертації розвинуто альтернативний чи комплементарний до КТП підхід, що на основі класичного чи ефективного теоретико-польового опису взаємодій дозволяє будувати квантовий релятивістичний опис системи двох чи скінченного числа частинок, зокрема формулювати і розв'язувати задачу про зв'язані стани. Основою підходу є інтеграли дії типу Фоккера або частково редуковані нелокальні лагранжіани, отримані шляхом редукції поля-посередника взаємодії у вихідному локальному описі системи. Головною методичною проблемою, розв'язаною у дисертації, є конструктивна побудова гамільтонових описів систем, заданих фоккерівськими інтегралами і нелокальними ЧР-лагранжіанами, та їх квантування. Розвинуті загальні методи застосовано до опису двочастинкових і тричастинкових систем, що представляють фізичний інтерес, зокрема кваркових моделей мезонів та баріонів.

1. Запропонований клас часо-асиметричних двочастинкових інтегралів дії типу Фоккера (тобто таких, що містять запізнену чи випередну ф-ю Гріна р-ня Даламбера) є так само широким, як і клас нерелятивістичних (тобто галілей-інваріантних) двочастинкових лагранжіанів. Побудований явно коваріантний канонічний опис із в'язями та тривимірний гамільтонів опис таких систем дозволяє досліджувати їх класичну динаміку у квадратурах та будувати сепарабельний квантовий опис.
2. Поаналізовано динаміку часо-асиметричних релятивістичних систем двох частинок, що взаємодіють через релятивістичні поля: безмасове поле довільного цілого спіну, гравітаційне поле, та векторне поле ефективних теорій конфайнменту з вищими похідними. Детальний аналіз випадків векторної та скалярної взаємодії виявив як фізично змістовні розв'язки, так і нефізи-

чні, що відповідають від'ємній масі однієї чи двох частинок. Запропоновано критерії відбору фізичних розв'язків – існування нерелятивістичної і/або вільночастинкової границь.

3. Здійснено квантування часо-асиметричних систем із взаємодією, що переноситься безмасовими полями довільного спіну (та загальнішої лоренцової структури) методом динамічної алгебри. Енергетичний спектр для систем із векторною і скалярною взаємодіями тотожні до результатів, отриманих раніше в рамках квазіпотенціального підходу. Спектри систем з тензорною взаємодією вищих спінів та відповідні значення критичних констант взаємодії отримано вперше. Для скалярної, векторної та тензорної (гравітаційної) взаємодій отримано точно інтегровні рівняння квазіпотенціального типу, що коректно враховують спін частинок з точністю до  $\alpha^4$ , і можуть служити основою для вищих наближень.
4. Запропоновано метод побудови гамільтонового опису та квантування двочастинкових інтегралів дії типу Фоккера у наближенні майже колових орбіт (МКО). Метод застосовний як до нерелятивістичних, так і релятивістичних фоккерівських систем, і загалом – до довільних часо-нелокальних систем двох частинок, інваріантних щодо групи Арістотеля. В загальному доведено існування колових орбіт, а для їх збурень сформульовано теоретико-групові критерії відбору фізичних мод.
5. Запропонований лагранжів та гамільтонів опис точкової частинки з кольором в неабелевому полі може служити моделлю генерації динамічної маси кварків. В літературі [100, 101] опис застосовано до випадку калібрувальної групи Лоренца для опису частинки у полі діона.
6. На основі ефективної теорії поля Кіккіса та її пізнішої неабелевої версії побудовано кваркову модель мезонів типу Фоккера. Інтеграл дії містить пуанкаре-інваріантну функцію Гріна рівняння 4-го порядку, що у статичній границі дає лінійний потенціал. Аналіз та квантування моделі розробленими в дисертації методами здійснено як у часо-асиметричній, так і

часо-симетричній версіях. Отримані спектри мезонів описуються асимпточно лінійними траекторіями Редже, нахил та інтерцепт яких залежить від взаємодії. Модель з майже рівними скалярним і векторним далекосяжними внесками та короткосяжним одноглюонним внеском у взаємодію найкраще узгоджується з експериментом, і дає універсальний опис важких та легких мезонів. Для спектру останніх вперше отримано випадкове виродження типу  $\ell + n_r$  (а не  $\ell + 2n_r$ , як інших моделях).

7. Редукція поля-посередника в системі взаємодіючих полів матерії (скалярних чи діраківських) приводить до частково редукованого лагранжіану з нелокальним членом, що описує ефективну взаємодію струмів матерії через функцію Гіна поля-посередника або феноменологічне ядро. Фізично такий опис є узагальненням фоккерівського опису систем точкових частинок на випадок польових систем, а математично – різновидом нелокальної теорії поля. Тому стандартні методи квантування таких систем є незастосовними.
8. Для системи діраківських полів із часо-нелокальною взаємодією, заданої частково редукованим лагранжіаном, побудовано її квазірелятивістичний гамільтонів опис. Нестандартне квантування діраківських полів забезпечує інваріантність  $N$ -частинкових секторів простору Фока щодо дії гамільтоніану. Це дозволило отримати замкнені хвильові рівняння на двочастинкові (і тричастинкові) власні стани гамільтоніану. Вони мають вигляд 2ЧРД (і 3ЧРД) в координатному представленні з потенціалами різної лоренцівської структури (з заданою статичною границею) і диференційними квазірелятивістичними поправками. Для випадку електромагнетної взаємодії у різних калібруваннях отримано відомий потенціал Брайта з вищими диференційними поправками магнетного типу. Випадок скалярної взаємодії також узгоджується з відомими результатами інших підходів, а решта представлених випадків є новими.
9. Запропоноване блок-матричне представлення радіально редукованого 2ЧРД з загальним потенціалом дозволяє зводити його до  $2 \times 2$ – матрично-двоочлен-

ного рівняння 2-го порядку, а в ньому – ефективно виявляти фізичні та нефізичні сингулярності системи, і цим – математичну коректність крайової задачі. По-перше, це дало змогу виявити клас непатологічних потенціалів, а в ньому – знайти сім'ю нових точно інтегровних випадків типу діраківських осциляторів. По-друге виявилося, що обмеження загалом патологічного рівняння Брайта на стани ортопозитронію є регулярним. Завдяки цьому здійснено комп’ютерне обчислення спектру ортопозитронію при довільних значеннях константи взаємодії  $\alpha$ , та знайдено для неї критичне значення  $\alpha_c = 2/\sqrt{3}$ , в околі якого енергія різко падає. По-третє, на базі матрично-двоочленного рівняння розвинуто псевдо-пертурбативний метод  $1/j$ -розкладів – квантовий аналог МКО-наближення, що застосовний і до розв’язування патологічних 2ЧРД.

10. Як застосування блок-матричного представлення 2ЧРД, обчислено точні і псевдо-пертурбативні спектри 2ЧРД з корнельським потенціалом різної лоренц-структур. Знайдено кілька потенціалів, що відтворюють властивості траекторій Редже. Один з них в літературі [111] застосовано до опису більше 50-ти легких та важких мезонних станів.
11. Запропоновано пертурбативну гамільтонізацію та квантування частково редукованого лагранжіану системи скалярних полів із часо-нелокальною взаємодією. Виведені варіаційні хвильові рівняння в імпульсному представленні для системи 2-х частинок (античастинок) мають структуру інтегральних рівнянь типу Салпітера з ядром взаємодії, вираженим через пропагатор поля-медіатора, або заданим феноменологічно.
12. Запропоновано можливий механізм виникнення утримної кластерної взаємодії в деяких нелінійних моделях системи скалярних полів, що описуються регуляризованим статичним тричастинковим потенціалом логарифмічного росту. Показано, що із ним пов’язані кластерні поправки до міжкваркових взаємодій кулонівського типу у класичній хромодинаміці.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Salpeter E. E., Bethe H. A. A relativistic equation for bound-state problems // *Phys. Rev.* 1951. Vol. 84, no. 6. P. 1232–1242.
- [2] Bethe H. A., Salpeter E. E. Quantum mechanics of one- and two-electron atoms. Berlin : Springer, 1957.
- [3] Fronsdal C., Huff R. W. Two-body problem in quantum field theory // *Phys. Rev. D*. 1971. Vol. 3, no. 4. P. 933–944.
- [4] Partovi M. H. New treatment of the bound-state problem in quantum field theory // *Phys. Rev. D*. 1975. Vol. 12, no. 12. P. 3887–3896.
- [5] Salpeter E. E. Mass corrections to the fine structure of hydrogen-like atoms // *Phys. Rev.* 1952. Vol. 87, no. 2. P. 328–343.
- [6] Blankenbecler R., Sugar R. Linear integral equations for relativistic multichannel scattering // *Phys. Rev.* 1966. Vol. 142, no. 4. P. 1051–1059.
- [7] Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. Quasi-optical approach in quantum field theory // *Nuovo Cimento*. 1963. Vol. 29, no. 2. P. 380–399.
- [8] Todorov I. T. Quasipotential equation corresponding to the relativistic eiconal approximation // *Phys. Rev. D*. 1971. Vol. 3, no. 10. P. 2351–2356.
- [9] Schiff L. I. Application of the variation method to field quantization // *Phys. Rev.* 1963. Vol. 130, no. 1. P. 458–464.
- [10] Darewych J. W. Few particle states in quantum field theory. A brief review of the variational approach in the Hamiltonian formalism // *Ukr. Fiz. Zh.* 1996. Vol. 41, no. 1. P. 41–50.
- [11] Симонов Ю. А. Конфайнмент // УФН. 1996. Т. 166, № 4. С. 337–362.
- [12] Greensite J. The confinement problem in lattice gauge theory // *Prog. Part.*

- Nucl. Phys.* 2003. Vol. 51, no. 1. P. 1–83.
- [13] *Swanson E. S.* Aspects of confinement: a brief review (Plenary talk at Hadron 2003, Aschaffenburg, Germany) // *AIP Conference Proceedings*. 2004. Vol. 717. P. 636–45.
- [14] Relativistic action at a distance: classical and quantum aspects. Proceedings of the Workshop, Barcelona, June 15-21, 1981 / Ed. by J. Llosa. – *Lect. Notes Phys.* no. 162. Berlin-Heidelberg-NY : Springer-Verlag, 1982.
- [15] Constraint theory and relativistic dynamics. Proceedings of the Workshop, Florence, May 28-30, 1986 / Ed. by G. Longhi, L. Lusanna. Singapore : World Scientific, 1987.
- [16] *Gaida R. P., Kluchkovsky Y. B., Tretyak V. I.* Three-dimensional Lagrangian approach to the classical relativistic dynamics of directly interacting particles // Constraint's Theory and Relativistic Dynamics / Ed. by G. Longhi, L. Lusanna. Singapore : World Scientific Publ., 1987. P. 210–241.
- [17] *B. I. Третяк.* Форми релятивістичної лагранжевої динаміки. Київ : Наукова думка, 2011.
- [18] *Bakamjian B., Thomas L. H.* Relativistic particle dynamics. II // *Phys. Rev.* 1953. Vol. 92, no. 5. P. 1300–1310.
- [19] *Sokolov S. N.* Theory of relativistic direct interaction (problems and perspective). Serpukhov : IHEP, 1978. (Preprint / Institute of High Energy Physics; IHEP 76-125).
- [20] *Дувиряк А. А.* Об одном классе канонических реализаций группы Пуанкаре // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. Киев : Наукова думка, 1989. С. 59–66.
- [21] *Polyzou W. N.* Relativistic two-body models // *Ann. Phys. (NY)*. 1989. Vol. 193, no. 2. P. 367–418.
- [22] *Crater H. W., Van Alstine P.* Relativistic naive quark model for spinning quarks in meson // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol. 53, no. 16. P. 1527–1530.
- [23] *Biswas T., Rohrlich F.* A relativistic quark model for hadrons // *Nuovo Cimento A*. 1985. Vol. 88, no. 2. P. 125–144.

- [24] Biswas T. Fully relativistic hadron spectroscopy // *Nuovo Cimento A*. 1985. Vol. 88, no. 2. P. 145–160.
- [25] Sazdjian H. Relativistic wave equations for the dynamics of two interacting particles // *Phys. Rev. D*. 1986. Vol. 33, no. 11. P. 3401–3424.
- [26] Dominici D., Gomis J., Longhi G. A. A possible approach to the two-body relativistic problem // *Nuovo Cimento A*. 1980. Vol. 56, no. 3. P. 263–288.
- [27] Takabayasi T. Relativistic mechanics of confined particles as extended model of hadrons // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 1979. Vol. 67. P. 1–68.
- [28] Nonperturbative solution of two-body Dirac equations for quantum electrodynamics and related theories / H. W. Crater, R. L. Becker, C. Y. Wong, P. Van Alstine // *Phys. Rev. D*. 1992. Vol. 46, no. 11. P. 5117–5155.
- [29] Crater H. W., Van Alstine P. Relativistic calculation of the meson spectrum: A fully covariant treatment versus standard treatments // *Phys. Rev. D*. 2004. Vol. 70, no. 3. 034026. – 31p.
- [30] Лев Ф. М. О расчете энергии связи тритона в релятивистской квантовой механике // *Физ. ЭЧАЯ*. 1990. Т. 21, № 5. С. 1251–1293.
- [31] Havas P. Galilei- and Lorentz-invariant particle systems and their conservation laws // Problems in the Foundations of Physics / Ed. by M. Bunge. Berlin : Springer, 1971. P. 31–48.
- [32] The Theory of Action-at-a-Distance in Relativistic Particle Mechanics / Ed. by E. H. Kerner. Collection of reprints. New York : Gordon and Breach, 1972.
- [33] Schwarzschild K. Zur elektrodynamik. II. Die elementare elektrodynamische kraft // *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*. 1903. Vol. 128. P. 132–141.
- [34] Tetrode H. Über der wirkungszusammenhang der welt. Eine erweiterung der klassischen dynamik // *Z. Phys.* 1922. Vol. 10. P. 317–328.
- [35] Fokker A. D. Ein invarianter variationsatz für die bewegung mehrerer elektrischer massenteilchen // *Z. Phys.* 1929. Vol. 28, no. 5-6. P. 386–393.
- [36] Wheeler J. A., Feynman R. P. Interaction with the absorber as the mechanism of radiation // *Rev. Mod. Phys.* 1945. Vol. 17, no. 2-3. P. 157–181.
- [37] Wheeler J. A., Feynman R. P. Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action // *Rev. Mod. Phys.* 1949. Vol. 21, no. 3. P. 425–433.

- [38] Ramond P. Action-at-a-distance theories and dual models // *Phys. Rev. D.* 1973. Vol. 7, no. 2. P. 449–458.
- [39] Третяк B. I. Інтеграли дії типу Фоккера та форми релятивістичної лагранжевої динаміки : Дисертація на здобуття наук. ст. доктора фіз.-мат. наук / B. I. Третяк ; Львівський державний ун-т ім. І. Франка. Львів, 1996.
- [40] Turygin A. Y. Equations of motion in second approximation of direct gravitational interaction theory // *Problems of theory of gravitation and elementary particles*, V. 13. Moscow : Energoatomizdat, 1982. C. 80–85.
- [41] Vladimirov Y. S., Turygin A. Y. Theory of direct interparticle interaction. Moscow : Energoatomizdat, 1986.
- [42] Hoyle F., Narlikar J. V. Action at a distance in physics and cosmology. New York : Freemen, 1974.
- [43] Hoyle F., Narlikar J. V. Cosmology and action-at-a-distance electrodynamics // *Rev. Mod. Phys.* 1995. Vol. 67, no. 1. P. 113–155.
- [44] Rivacoba A. Fokker-action principle for a system of particles interacting through a linear potential // *Nuovo Cimento B*. 1984. Vol. 84, no. 1. P. 35–42.
- [45] Weiss J. Is there action-at-a-distance linear confinement ? // *J. Math. Phys.* 1986. Vol. 27, no. 4. P. 1015–1022.
- [46] Louis-Martinez D. J. Relativistic action at a distance and fields // *Found. Phys.* 2012. Vol. 42, no. 2. P. 215–223.
- [47] Louis-Martinez D. J. Relativistic non-instantaneous action-at-a-distance interactions // *Phys. Lett. B*. 2006. Vol. 632, no. 5-6. P. 733–739.
- [48] Canonical formalism for path-dependent Lagrangians. Coupling constant expansion / X. Jaén, R. Jáuregui, J. Llosa, A. Molina // *J. Math. Phys.* 1989. Vol. 30, no. 12. P. 2807–2814.
- [49] Staruszkiewicz A. An example of a consistent relativistic mechanics of point particles // *Ann. Phys.* 1970. Vol. 25, no. 4. P. 362–367.
- [50] Rudd R. A., Hill R. N. Exactly solvable electrodynamic two-body problem // *J. Math. Phys.* 1970. Vol. 11, no. 9. P. 2704–2710.
- [51] Künzle H. P. A relativistic analogue of the Kepler problem // *Int. J. Theor. Phys.* 1974. Vol. 11, no. 6. P. 395–417.

- [52] *Staruszkiewicz A.* Canonical theory of the two-body problem in the classical relativistic electrodynamics // *Ann. I. H. Poincaré*. 1971. Vol. 14, no. 1. P. 69–77.
- [53] *Fahnline D. E.* Classification of orbits of Fokker's time-asymmetric relativistic two-body problem // *J. Math. Phys.* 1981. Vol. 22, no. 8. P. 1640–1646.
- [54] *Stephas P.* One-dimensional motion for classical relativistic two-body systems in time-asymmetric Lorentz scalar potentials // *Phys. Rev. D*. 1985. Vol. 31, no. 2. P. 319–324.
- [55] *Sokolov S. N.* Two-dimensional model of the relativistic quantum mechanics of a system of  $N$  particles with potential interaction // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1975. Vol. 20, no. 4. P. 266–268.
- [56] *Sokolov S. N., Tretyak V. I.* The front form of relativistic dynamics in two-dimensional space-time and its relation with the Hamiltonian description // *Theor. Mat. Phys.* 1986. Vol. 67, no. 1. P. 385–394.
- [57] *Tretyak V., Shpytko V.* On the relativistic mass spectra of the two-particle systems // *J. Nonlin. Math. Phys.* 1997. Vol. 4, no. 1-2. P. 161–167.
- [58] *Tretyak V., Shpytko V.* Time-asymmetric Fokker-type action and relativistic wave equations // *J. Phys. A*. 2000. Vol. 33, no. 32. P. 5719–5738.
- [59] *Schild A.* Electromagnetic two-body problem // *Phys. Rev.* 1963. Vol. 131, no. 6. P. 2762–2766.
- [60] *Andersen C. M., von Baeyer H. C.* Circular orbits in classical relativistic two-body systems // *Ann. Phys. (NY)*. 1970. Vol. 60, no. 1. P. 67–84.
- [61] *Degasperis A.* Bohr quantization of relativistic bound states of two point particles // *Phys. Rev. D*. 1971. Vol. 3, no. 2. P. 273–279.
- [62] *Gaida R. P.* Quasirelativistic interacting particle systems // *Phys. Part. Nucl.* 1982. Vol. 13. P. 179–205.
- [63] *Staruszkiewicz A.* On stability of a circular motion in the relativistic Kepler problem // *Acta Phys. Pol.* 1968. Vol. 33, no. 6. P. 1007–1011.
- [64] *Andersen C. M., von Baeyer H.* Almost circular orbits in classical action-at-a-distance electrodynamics // *Phys. Rev. D*. 1972. Vol. 5, no. 4. P. 802–813.
- [65] *Zhdanov V. I.* On the stability of a circular motion in the Fokker dynamics //

- Lett. Nuovo Cimento.* 1974. Vol. 9, no. 5. P. 157–160.
- [66] *von Baeyer H. C.* Semiclassical quantization of the relativistic Kepler problem // *Phys. Rev. D.* 1975. Vol. 12, no. 10. P. 3086–3091.
- [67] *Miller W. H.* Semiclassical quantization of nonseparable systems: a new look at periodic orbit theory // *J. Chem. Phys.* 1975. Vol. 63, no. 2. P. 996–999.
- [68] *Barham M., Darewych J.* Exact two-body eigenstates in scalar quantum field theory // *J. Phys. A.* 1998. Vol. 31, no. 15. P. 3481–3491.
- [69] *Darewych J.* Some exact solutions of reduced scalar Yukawa model // *Can. J. Phys.* 1998. Vol. 76, no. 7. P. 523–537.
- [70] *Darewych J.* Few-particle eigenstates in the Yukawa model // *Condens. Matter Phys.* 1998. Vol. 1, no. 3(15). P. 593–604.
- [71] *Darewych J.* Variational two-particle wave equations in scalar quantum field theory // *Condens. Matter Phys.* 2000. Vol. 3, no. 3(23). P. 633–639.
- [72] *Ding B., Darewych J.* A variational calculation of particle-antiparticle bound states in the scalar Yukawa model // *J. Phys. G.* 2000. Vol. 26, no. 6. P. 907–925.
- [73] *Shpytko V., Darewych J.* Exact spinor-scalar bound states in a quantum field theory with scalar interactions // *Phys. Rev. D.* 2001. Vol. 64, no. 4. P. 045012.
- [74] *Terekidi A. G., Darewych J. W.* Variational derivation of relativistic fermion–antifermion wave equations in QED // *J. Math. Phys.* 2004. April. Vol. 45, no. 4. P. 1474–1496.
- [75] *Terekidi A. G., Darewych J. W.* Variational two fermion wave equations in QED. Muonium like systems // *J. Math. Phys.* 2005. Vol. 46, no. 3. P. 032302.
- [76] *Breit G.* The effect of retardation on the interaction of two electrons // *Phys. Rev.* 1929. Vol. 34, no. 4. P. 553–573.
- [77] *Eddington A. S.* The charge of an electron // *P. Roy. Soc. Lond. A.* 1929. Vol. 122, no. 789. P. 358–369.
- [78] *Gaunt J. A.* The triplets of helium // *Philos. T. Roy. Soc. A.* 1929. Vol. 228, no. 151-169.
- [79] *Darewych J. W., Di Leo L.* Two-fermion Dirac-like eigenstates of the Coulomb QED Hamiltonian // *Journal of Physic A.* 1996. Vol. 29, no. 21. P. 6817–6841.

- [80] Barut A. O., Komy S. Derivation of nonperturbative reativistic two-body equation from the action principle in quantumelectrodynamics // *Fortschr. Phys.* 1985. Vol. 33, no. 6. P. 309–318.
- [81] Barut A. O., Ünal N. A new approach to bound-state quantum electrodynamics // *Physica A*. 1987. Vol. 142, no. 1-3. P. 467–487.
- [82] Grandy Jr W. T. Relativistic quantum mechanics of leptons and fields. Dordrecht-Boston-London : Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [83] Krolikowski W. Relativistic radial equations for 2 spin-1/2 particles with a static interaction // *Acta Phys. Pol. B*. 1976. Vol. 7, no. 7. P. 485–496.
- [84] Childers R. W. Effective Hamiltonians for generalized Breit interactions in QCD // *Phys. Rev. D*. 1987. Vol. 36, no. 2. P. 606–614.
- [85] Brayshaw D. D. Relativistic description of quarkonium // *Phys. Rev. D*. 1987. Vol. 36, no. 5. P. 1465–1478.
- [86] Ceuleneer R., Legros P., Semay C. On the connection between relativistic and nonrelativistic description of quarkonium // *Nuclear Physics A*. 1991. Vol. 532, no. 1-2. P. 395c–400c.
- [87] Semay C., Ceuleneer R., Silvestre-Brac B. Two-body Dirac equation with diagonal central potentials // *J. Math. Phys.* 1993. Vol. 34, no. 6. P. 2215–2225.
- [88] Semay C., Ceuleneer R. Two-body Dirac equation and Regge trajectories // *Phys. Rev. D*. 1993. Vol. 48, no. 9. P. 4361–4369.
- [89] Tsibidis G. D. Quark-antiquark bound states and the Breit equation. 2000. arXiv:hep-ph/0007143.
- [90] Сименог I. B., Туро́вський O. I. Релятивістична модель двонуклонної задачі з прямою взаємодією // Укр. фіз. журн. 2001. Т. 46, № 4. С. 391–401.
- [91] Сименог I. B., Туро́вський O. I. Модель дейтрона в підході Дірака-Брейта з прямою взаємодією // Журн. фіз. дослідж. 2004. Т. 8, № 1. С. 23–34.
- [92] Faustov R. N. The proton structure and hyperfine splitting of hydrogen energy levels // *Nucl. Phys.* 1966. Vol. 75, no. 3. P. 669–681.
- [93] Matveev V. A., Muradyan R. M., Tavkhelidze A. N. Relativistic covariant equations for two perteicles in quantum field theory. Communications of the Joint Institute for Nuclear Researctch, E2 - 3498. Dubna, 1967.

- [94] Хелашивили А. А. Квазипотенциальное уравнение для системы двух частиц со спином 1/2. Сообщения Объединенного института ядерных исследований, Р2 - 4327. Дубна, 1969.
- [95] Louis-Martinez D. J. A derivation of the Breit equation from Barut's covariant formulation of electrodynamics in terms of direct interactions // *Mod. Phys. Lett. A*. 2012. Vol. 27, no. 11. P. 1250064.
- [96] Giachetti R., Sorace E. Two-fermion relativistic bound states // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2005. Vol. 38, no. 6. P. 1345–1370.
- [97] Хелашивили А. А. Радиальное квазипотенциальное уравнение для фермиона и антифермиона и бесконечно растущие центральные потенциалы // *Teor. матем. физ.* 1982. Т. 51, № 2. С. 201–210.
- [98] Crater H. W., Wong C. W., Wong C.-Y. Singularity-free Breit equation from constraint two-body Dirac equations // *Int. J. Mod. Phys. E*. 1996. Vol. 5, no. 4. P. 589–615.
- [99] Turygin A. Y. Fokker's type action at a distance theory of gravitation // *Gen. Relat. Gravit.* 1986. Vol. 18, no. 4. P. 333–348.
- [100] Tho N. V. Interaction of imaginary-charge-carrying dyon with particles // *J. Math. Phys.* 2008. Vol. 49, no. 6. P. 062301.
- [101] Tho N. V., Hoan N. Q. A test for the local intrinsic Lorentz symmetry // *J. Phys. Sci. and App.* 2012. Vol. 2, no. 8. P. 328–334.
- [102] Kiskis J. Modified field theory for quark binding // *Phys. Rev. D*. 1975. Vol. 11, no. 8. P. 2178–2202.
- [103] Alekseev A. I., Arbuzov B. A., Baikov V. A. Infrared asymptotic behavior of gluon Green's functions in quantum chromodynamics // *Theor. Math. Phys.* 1982. Vol. 52, no. 2. P. 739–746.
- [104] Alekseev A. I., Arbuzov B. A. Classical Yang-Mills field theory with nonstandard Lagrangians // *Theor. Math. Phys.* 1984. Vol. 59, no. 1. P. 372–378.
- [105] Llosa J., Vives J. Hamiltonian formalism for nonlocal Lagrangians // *J. Math. Phys.* 1994. Vol. 35, no. 6. P. 2856–2877.
- [106] Sazdjian H. Relativistic quarkonium dynamics // *Phys. Rev. D*. 1986. Vol. 33, no. 11. P. 3425–3434.

- [107] *Sazdjian H.* Supersymmetric models in two-particle relativistic quantum mechanics // *Europhys. Lett.* 1988. Vol. 6, no. 1. P. 13–18.
- [108] *Moshinsky M., Loyola G., Villegas C.* Anomalous basis for representations of the Poincaré group // *J. Math. Phys.* 1991. Vol. 32, no. 2. P. 373–381.
- [109] *Moshinsky M., Mesa A. D. S.* Relations between different approaches to the relativistic two-body problem // *J. Phys. A.* 1994. Vol. 27, no. 13. P. 4684–4693.
- [110] *Moshinsky M., Quesne C., Smirnov Y. F.* Supersymmetry and superalgebra for the two-body system with a Dirac oscillator interaction // *J. Phys. A.* 1995. Vol. 28, no. 16. P. 6447–6457.
- [111] *He J.-K., Li Y., Chen H.* Orbital excited meson mass spectra in the solvable potential model of two-body Dirac equation // *Internat. J. Modern Phys.: Conf. Ser.* 2014. Vol. 29. P. 1460246.
- [112] *Wick G. C.* Properties of Bethe-Salpeter wave function // *Phys. Rev.* 1954. Vol. 96, no. 4. P. 1124–1134.
- [113] *Cutkosky R. E.* Solutions of a Bethe-Salpeter equation // *Phys. Rev.* 1954. Vol. 96, no. 4. P. 1134–1141.
- [114] *Di Leo L., Darewych J. W.* Bound and resonant relativistic two-particle states in scalar quantum field theory // *Can. J. Phys.* 1992. Vol. 70, no. 6. P. 412–426.
- [115] Nonperturbative formulation of relativistic two-particle states in the scalar Yukawa model / J. W. Darewych, D. V. Shapoval, I. V. Simenog, A. G. Sitenko // *J. Math. Phys.* 1997. Vol. 38, no. 8. P. 3908–3924.
- [116] *Darewych J., Biswas P.* Single quantum pair annihilation of a bound particle-particle-antiparticle system // *Can. J. Phys.* 1998. Vol. 76, no. 4. P. 283–293.
- [117] *Duviryak A. A., Tretyak V. I.* Classical relativistic two-body dynamics on the light cone // *Condens. Matter Phys.* 1993. № 1. P. 92–107.
- [118] *Duviryak A.* Symmetries of the relativistic two-particle model with scalar-vector interaction // *J. Nonlinear Math. Phys.* 1996. Vol. 3, no. 3-4. P. 372–378.
- [119] *Duviryak A.* The time-asymmetric Fokker-type integrals and the relativistic Hamiltonian mechanics on the light cone // *Acta Phys. Pol. B.* 1997. Vol. 28, no. 5. P. 1087–1109.
- [120] *Duviryak A.* The two-body time-asymmetric relativistic models with field-type

- interaction // *Gen. Relat. Gravit.* 1998. Vol. 30, no. 8. P. 1147–1169.
- [121] *Duviryak A., Shpytko V., Tretyak V.* Isotropic forms of dynamics in the relativistic direct interaction theory // *Condens. Matter Phys.* 1998. Vol. 1, no. 3(15). P. 463–512.
- [122] *Duviryak A.* Fokker-type confinement models from effective Lagrangian in classical Yang-Mills theory // *Int. J. Mod. Phys. A.* 1999. Vol. 14, no. 28. P. 4519–4547.
- [123] *Duviryak A.* The two-particle time-asymmetric relativistic model with confinement interaction and quantization // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2001. Vol. 16, no. 16. P. 2771–2788.
- [124] *Duviryak A., Shpytko V.* Relativistic two-particle mass spectra for time-asymmetric Fokker action // *Rep. Math. Phys.* 2001. Vol. 48, no. 1-2. P. 219–226.
- [125] *Duviryak A., Darewych J. W.* Exact few-particle eigenstates in partially reduced QED // *Phys. Rev. A.* 2002. Vol. 66, no. 3. 032102. – 20 p.
- [126] *Duviryak A.* Heuristic models of two-fermion relativistic systems with field-type interaction // *J. Phys. G.* 2002. Vol. 28, no. 11. P. 2795–2809.
- [127] *Duviryak A., Darewych J. W.* Variational Hamiltonian treatment of partially reduced Yukawa-like models // *J. Phys. A.* 2004. Vol. 37, no. 34. P. 8365–8381.
- [128] *Duviryak A., Darewych J. W.* Variational wave equations of two fermions interacting via scalar, pseudoscalar, vector, pseudovector and tensor fields // *Cent. Eur. J. Phys.* 2005. Vol. 3, no. 4. P. 467–483.
- [129] *Duviryak A.* Large-j expansion method for two-body Dirac equation // *Symmetry Integr. Geom.* 2006. Vol. 2. 029. – 12 p.
- [130] *Дувіряк А.* Застосування двочастинкового рівняння Дірака у спектроскопії мезонів // *Журн. фіз. дослідж.* 2006. Т. 10, № 4. С. 290–314.
- [131] *Duviryak A.* Solvable two-body Dirac equation as a potential model of light mesons // *Symmetry Integr. Geom.* 2008. Vol. 4. 048. – 19 p.
- [132] *Дувіряк А.* Потенціальна модель мезонів у формалізмі інтегралів дії типу Фоккера // *Фіз. зб. НТІІІ.* 2008. Т. 7. С. 533–541.
- [133] *Darewych J. W., Duviryak A.* Confinement interaction in nonlinear generalizations of the Wick-Cutkosky model // *J. Phys. A.* 2010. Vol. 43, no. 48. 485402. –

13 p.

- [134] *Duviryak A., Darewych J.* On confinement interactions in scalar generalizations of the dipole model // *J. Phys. Stud.* 2011. Vol. 15, no. 1. 1101. – 9 p.
- [135] *Darewych J. W., Duviryak A.* Interparticle forces in QFTs with nonlinear mediating fields // *Few Body Syst.* 2011. Vol. 50, no. 1-4. P. 299–301.
- [136] *Zagladko I., Duviryak A.* Partially reduced formulation of scalar Yukawa model: Poincaré-invariance and unitarity // *J. Phys. Stud.* 2012. Vol. 16, no. 3. 3101. – 10 p.
- [137] *Darewych J. W., Duviryak A.* Analysis of inter-quark interactions in classical chromodynamics // *Cent. Eur. J. Phys.* 2013. Vol. 11, no. 3. P. 336–344.
- [138] *Duviryak A.* Quantization of almost-circular orbits in the Fokker action formalism // *Eur. Phys. J. Plus.* 2014. Vol. 129, no. 12. 267. – 20 p.
- [139] *Zagladko I., Duviryak A.* Bound states in the tachyon exchange potential // *Electron. J. Theor. Phys.* 2014. Vol. 11, no. 31. P. 141–148.
- [140] *Duviryak A.* Regge trajectories in the framework of the relativistic action-at-a-distance theory // *J. Phys. Stud.* 2015. Vol. 19, no. 1/2. 1004. – 14 p.
- [141] Хроніка // *Фіз. зб. НТІІІ.* 1996. Т. 2. С. 324.
- [142] *Duviryak A., Shpytko V., Tretyak V.* Exactly solvable two-particle models in the isotropic forms of relativistic dynamics // Internat. Workshop “Hadrons-94”. Proc. Contributed papers / Ed. by G. Bugrij, L. Jenkovsky, E. Martynov. Uzhgorod, Ukraine, 7-11 September 1994. P. 353–362.
- [143] *Duviryak A.* Classical mechanics of relativistic particle with colour // *Proc. Inst. of Math. NAS of Ukraine.* 2000. Vol. 30, Part 2. P. 473–480.
- [144] Дувіряк А.А. Про точно розв'язувані релятивістські моделі двох частинок, пов'язані з класичною теорією поля // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 3-4 січня 2001. *Журн. фіз. дослідж.* 2001. Т. 5, № 1. С. 103.
- [145] *Duviryak A., Darewych J. W.* Variational wave equations for fermions interacting via scalar and vector fields // XVIII European Conference on Few-Body Problems in Physics. Book of Abstracts / Ed. by R. Krivec, B. Golli, M. Rosina, S. Širca. Bled, Slovenia, 8-14 September 2002. P. 103.
- [146] *Duviryak A.* Heuristic models of two-fermion relativistic systems with field-type

- interaction // XVIII European Conference on Few-Body Problems in Physics. Book of Abstracts / Ed. by R. Krivec, B. Golli, M. Rosina, S. Širca. Bled, Slovenia, 8-14 September 2002. P. 207.
- [147] *Duviryak A., Darewych J. W.* Variational wave equations for fermions interacting via scalar and vector fields // Few-Body Problems in Physics '02. Proceedings of the XVIII European Conference on Few-Body Problems in Physics / Ed. by R. Krivec, B. Golli, M. Rosina, S. Širca. Bled, Slovenia, 8-14 September 2002. *Few-Body Syst. Suppl.* 2002. V. 14. P. 217-218.
- [148] *Duviryak A.* Heuristic model of two-quark relativistic system with scalar-vector interaction // Few-Body Problems in Physics '02. Proceedings of the XVIII European Conference on Few-Body Problems in Physics / Ed. by R. Krivec, B. Golli, M. Rosina, S. Širca. Bled, Slovenia, 8-14 September 2002. *Few-Body Syst. Suppl.* 2002. V. 14. P. 415-416.
- [149] Різдвяні дискусії 2003 // Персоналії, хроніка, бібліографія. Львів, 3-4 січня 2003. *Журн. фіз. досліджен.* 2001. Т. 7, № 2. С. 247.
- [150] *Duviryak A., Darewych J. W.* Variational wave equations from partially reduced QFT // 17th Internat. IUPAP Conf. on Few-Body Problems in Physics. Book of Abstracts / Ed. by W. Glöckle, T. Pulis, W. Tornow. Durham, North Carolina, USA, 5-10 June 2003. P. 155.
- [151] *Duviryak A.* Heuristic wave equations for relativistic two-body systems // 17th Internat. IUPAP Conf. on Few-Body Problems in Physics. Book of Abstracts / Ed. by W. Glöckle, T. Pulis, W. Tornow. Durham, North Carolina, USA, 5-10 June 2003. P. 151–152.
- [152] *Duviryak A.* Heuristic wave equations for relativistic two-body systems // Few-Body Problems in Physics: Proceedings of the Seventeenth International IUPAP Conference on Few-Body Problems in Physics (Few Body 17) / Ed. by W. Glöckle, W. Tornow. Durham, North Carolina, USA, 5-10 June 2003. P. S269–S271.
- [153] *Дувіряк А., Даревич Ю.* Рівняння типу Брейта у формалізмі редукованої КТП // Тези доповідей наукової конференції “Сучасні проблеми квантової теорії” присвяченої 100-річчю від дня народження Зіновія Храпливого. Тер-

- ногіль, 15-16 березня 2004. С. 49–50.
- [154] Дувірjak A. Метод 1/j-розкладів для 2-частинкового рівняння Дірака // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 4-5 січня 2006. Журн. фіз. дослідж. 2006. Т. 10, № 1. С. 75.
- [155] Duviryak A. 2-body Dirac equation and light meson spectra // 2nd Internat. Conf. on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics. Kharkov, Ukraine, 19-23 September 2006. P. 64.
- [156] Дувірjak A. Коваріантна форма рівняння Брайта та його узагальнень // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 4-5 січня 2008. Журн. фіз. дослідж. 2008. Т. 12, № 1. С. 1998-5.
- [157] Дувірjak A.A. Двочастинкове рівняння Дірака: методи, моделі та застосування у спектроскопії мезонів // Всеукраїнський семінар з теоретичної та математичної фізики ТМФ'2009. До 80-річчя професора А.В.Свідзинського. Матеріали. Луцьк, 27 лютого - 01 березня 2009. С. 38–42.
- [158] Даревич Ю., Дувірjak A. Про утримуючі взаємодії в нелінійній моделі Віка-Куткоскі // Матеріали 5-ї Міжнар. конф. РНАОМ-2010. Луцьк, Шацькі озера, 1-5 червня 2010. С. 183–184.
- [159] Загладько I.M., Дувірjak A.A. Пуанкарє-інваріантність моделей типу Юкави у формалізмі частково редукованої теорії поля // Збірка тез X Всеукраїнської школи-семінару і конкурсу молодих вчених у галузі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини / ІФКС НАН України. Львів, 3-4 червня 2010. С. 40.
- [160] Duviryak A., Darewych J. W. On the confinement interactions in partially reduced Yukawa-like models // 3<sup>rd</sup> Workshop on Current Problems in Physics. Abstracts. Lviv, Ukraine, 5-9 July 2010. J. Phys. Stud. 2010. V. 14, no. 3. P. 3998-1.
- [161] Darewych J. W., Duviryak A., Zagladko I. Canonical description and Poincaré-invariance of nonlocal Yukawa-like models // 3rd Internat. Conf. on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics. Book of Abstracts. Kharkov, Ukraine, 29 August – 2 September 2011. P. 39.
- [162] Darewych J. W., Duviryak A. Interquark interactions in a reformulated

- chromodynamics // Sci. Conf. "New Trends in Physics and Astrophysics" (dedicated to Prof. I. O. Vakarchuk on the occasion of his 65th birthday). Program and Abstracts. Lviv, 15-16 March 2012. P. 10.
- [163] Загладько I., Дувіряк А. Взаємодія скалярних частинок через тахіонне поле // Фіз. зб. НТШ. 2014. Т. 9. С. 121–137.
- [164] Загладько I.M., Дувіряк A.A. Модель типу Юкави в теорії прямих взаємодій: проблеми Пуанкаре-інваріантності та унітарності матриці розсіяння // Матеріали всеукраїнської наукової конференції "Актуальні проблеми теоретичної, експериментальної та прикладної фізики". Тернопіль, 20-11 вересня 2012. С. 143–144.
- [165] Загладько I.M., Дувіряк A.A. Розсіяння скалярних частинок з тахіонною взаємодією // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 3-4 січня 2013. Журн. фіз. дослідів. 2013. Т. 17, № 1. С. 1998-4.
- [166] 6<sup>th</sup> Workshop on Current Problems in Physics. Book of abstracts. Zielona Góra, Poland, 23-25 September 2013.
- [167] Duviryak A. Almost-circular orbit method for quantization of the Fokker action integrals // 7<sup>th</sup> Workshop on Current Problems in Physics. Abstracts. Lviv, Ukraine, 8-9 July 2014. J. Phys. Stud. 2014. V. 18, no. 2/3. P. 2998-3.
- [168] Дувіряк A.A. Про нефізичні розв'язки релятивістських рівнянь руху // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 12-13 січня 2015. Журн. фіз. дослідів. 2015. Т. 19, № 1/2. С. 1998-2.
- [169] Duviryak A. Action-at-a-distance models for meson spectroscopy // 8<sup>th</sup> Workshop on Current Problems in Physics. Book of Abstracts. Zielona Góra, Poland, 19 – 22 October 2015. P. 7. <http://www.if.uz.zgora.pl/wcpp/wcpp15/abstracts.pdf>.
- [170] Duviryak A. The time-asymmetric Fokker-type integrals and the relativistic Hamiltonian mechanics on the light cone. Львів : ІФКС, 1996. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-96-13E).
- [171] Duviryak A. The two-particle time-asymmetric models with field-type interpretation. Львів : ІФКС, 1996. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-96-14E).

- [172] *Duviryak A.* Fokker-type confinement models from effective Lagrangian in classical Yang-Mills theory. Львів : ІФКС, 1998. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-98-24E).
- [173] *Duviryak A.* The two-particle time-asymmetric relativistic model with confinement interaction. Quantization. Львів : ІФКС, 2000. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-00-13E).
- [174] *Duviryak A., Shpytko V.* Field-type time-asymmetric two-particle models in the second-order approximation in a coupling constant. Львів : ІФКС, 2000. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-00-14E).
- [175] *Duviryak A.* Heuristic models of two-fermion relativistic systems with field-type interaction. Львів : ІФКС, 2002. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-02-10E).
- [176] *Duviryak A., Darewych J. W.* Variational wave equations of two fermions interacting via scalar, pseudoscalar, vector, pseudovector and tensor fields. Львів : ІФКС, 2004. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-04-16E).
- [177] *Duviryak A.* Large-j expansion method for two-body Dirac equation. Львів : ІФКС, 2005. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-05-15E).
- [178] *Дувіряк А.* Двочастинкове рівняння Дірака: методи, моделі та застосування у спектроскопії мезонів. Львів : ІФКС, 2006. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-06-26U).
- [179] *Darewych Y. W., Duviryak A.* On confinement interactions in nonlinear generalizations of the Wick-Cutkosky model. Львів : ІФКС, 2009. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-09-09E).
- [180] *Darewych Y. W., Duviryak A.* On confinement interactions in scalar generalizations of the dipole model. Львів : ІФКС, 2010. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-10-20E).
- [181] *Дувіряк А., Загладъко І.* Пуанкаре-інваріантність частково редукованих моделей типу Юкави. Львів : ІФКС, 2011. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-11-04U).

- [182] Дувірjak A., Загладько I. Унітарність матриці розсіяння для моделі типу Юкави у формалізмі частково редукованої теорії поля. Львів : ІФКС, 2011. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-11-20U).
- [183] Duviryak A. Quantization of almost-circular orbits in the Fokker action formalism. I. General scheme. Львів : ІФКС, 2012. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-12-08E).
- [184] Duviryak A. Quantization of almost-circular orbits in the Fokker action formalism. II. Regge trajectories. Львів : ІФКС, 2012. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-12-09E).
- [185] Загладько I., Duviryak A. Взаємодія скалярних частинок через тахійонне поле. Львів : ІФКС, 2013. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-13-04U).
- [186] Darwin C. The dynamical motions of charged particles // *Philos. Mag.* 1920. Vol. 39, no. 233. P. 537–551.
- [187] Chraplyvy Z. V. Reduction of relativistic two-particle wave equations to approximate forms. I // *Phys. Rev.* 1953. Vol. 91, no. 2. P. 388–391.
- [188] Chraplyvy Z. V. Reduction of relativistic two-particle wave equations to approximate forms. II // *Phys. Rev.* 1953. Vol. 92, no. 5. P. 1310–1315.
- [189] Barker W. A., Glover F. N. Reduction of relativistic two-particle wave equations to approximate forms. III // *Phys. Rev.* 1955. Vol. 99, no. 1. P. 317–324.
- [190] Turovsky A. Expansion of the two-particle Dirac equation in powers of  $1/c$  to higher orders // *Ukr. J. Phys.* 2011. Vol. 56, no. 1. P. 5–17.
- [191] Turovsky A. On the Chraplyvy transformation and some features of its application for higher-order expansions // *J. Phys. Stud.* 2014. Vol. 18, no. 1. P. 1004.
- [192] Turovsky A. On the Chraplyvy transformation and some features of its application for higher-order expansions // *J. Phys. Stud.* 2014. Vol. 18, no. 2/3. P. 2003.
- [193] Pirenne J. Le champ propre et l'interaction des particules de Dirac. III. Le système électron-positron // *Arch. Sci. Phys. Nat.* 1947. Vol. 29. P. 265–300.
- [194] Берестецкий В. Б., Ландау Л. Д.. О взаимодействии между электроном и позитроном // ЖЭТФ. 1949. Т. 19, № 8. С. 674–679.
- [195] Берестецкий В. Б.. О спектре позитрония // ЖЭТФ. 1949. Т. 19, № 12.

- C. 1130–1135.
- [196] *Ferrell R. A.* The positronium fine structure // *Phys. Rev.* 1951. Nov. Vol. 84, no. 4. P. 858–859.
  - [197] *Brown G. E., Ravenhall D. G.* On the interaction of two electrons // *P. Roy. Soc. Lond. A.* 1951. Vol. 208, no. 1095. P. 552–559.
  - [198] *Bijtebier J.* Bethe-Salpeter equation: 3D reductions, heavy mass limits and abnormal solutions // *Nucl. Phys. A.* 1997. Vol. 623, no. 3-4. P. 498–518.
  - [199] *Feldman G., Fulton T., Townsend J.* Correct no-retardation limit in Bethe-Salpeter kernels // *Phys. Rev. A.* 1973. Vol. 8, no. 3. P. 1149–1156.
  - [200] *Фаустов Р. Н.* Некоторые вопросы теории связанных состояний // Квантовая теория поля и физика высоких энергий. Труды школы молодых ученых (Звенигород, 16–20 сентября 1985). Дубна, 1985.
  - [201] *Rizov V. A., Sazdian H., Todorov I. T.* On the relativistic quantum mechanics of two interacting spinless particles // *Annals of Physics (NY)*. 1985. Vol. 165, no. 1. P. 59–97.
  - [202] *Connell J. H.* QED test of a Bethe-Salpeter solution method // *Phys. Rev. D.* 1991. Vol. 43, no. 4. P. 1393–1402.
  - [203] *Gupta S. N.* Particle-particle and particle-antiparticle interactions // *Nucl. Phys. A.* 1964. Vol. 57, no. 1. P. 19–28.
  - [204] *Barker B. N., Gupta S. N., Haracz R. D.* One-graviton exchange interaction of elementary particles // *Phys. Rev.* 1966. Vol. 149, no. 4. P. 1027–1032.
  - [205] *Gupta S. N., Repko W., Suchyta III C. J.* Muonium and positronium potentials // *Phys. Rev. D.* 1989. Vol. 40, no. 12. P. 4100–4104.
  - [206] *Gupta S. N., Radford S. F.* Gluonic two-particle potential // *Phys. Rev. D.* 1980. Vol. 22, no. 12. P. 3043–3048.
  - [207] *Lucha W., Schoberl F. F., Gromes D.* Bound states of quarks // *Phys. Rep.* 1991. Vol. 200, no. 4. P. 127–240.
  - [208] *Dyson F.* The use of the Tamm-Dancoff method in field theory // *Phys. Rev.* 1953. Vol. 90, no. 5. P. 994–994.
  - [209] *Darewych J. W., Horbatsch M.* A variational treatment of the relativistic two-fermion bound-state system in quantum electrodynamics // *J. Phys. B.* 1990.

- Vol. 23, no. 6. P. 337–354.
- [210] Polozov A. D., Di Leo L., Darewych J. W. Bound and quasi-bound fermion-antifermion states in the Yukawa model // *Journal of Physic G*. 1995. Vol. 21. P. 1167–1182.
- [211] Di Leo L., Darewych J. W. Higgs boson decay and quasi-bound states in the Higgs model // *Internat. J. Mod. Phys. A*. 1996. Vol. 11, no. 32. P. 5659–5683.
- [212] Darewych J., Horbatsch M., Koniuk R. Variational calculation of the bound-state wave function in :  $\lambda(\phi^6 - \phi^4)_2$  : // *Phys. Rev. Letters*. 1985. Vol. 54, no. 20. P. 2188–2190.
- [213] Variational two- and three-particle solutions of the relativistic Yukawa model / J. W. Darewych, A. G. Sitenko, I. V. Simenog, A. I. Sitnichenko // *Phys. Rev. C*. 1992. Vol. 47, no. 5. P. 1885–1897.
- [214] Dykshoorn W., Koniuk R. Spin effects in highly relativistic systems // *Phys. Rev. A*. 1990. Vol. 41, no. 1. P. 64–67.
- [215] Darewych J., Horbatsch M., Koniuk R. Particle-antiparticle bound states as photon-photon resonances // *Phys. Rev. D*. 1990. dec. Vol. 42, no. 12. P. 4198–4201.
- [216] Krolkowski W., Rzewuski J. Relativistic radial equations for 2 spin-1/2 particles with a static interaction // *Acta Phys. Pol. B*. 1976. 485-496. Vol. 7, no. 7.
- [217] Anselm A., Dombey N. Fermionic bound states and pseudoscalar exchange // *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 1999. Vol. 25, no. 3. P. 513–523.
- [218] Fushchich V. I., Nikitin A. G. On new constants of motion for two- and three-particle equations // *J. Phys. A*. 1990. Vol. 23, no. 11. P. L533–L535.
- [219] Никитин А. Г., Фущич В. И. Нелиевые интегралы движения для частиц произвольного спина и для систем взаимодействующих частиц // *Теор. и матем. физика*. 1991. Т. 88, № 3. С. 406–415.
- [220] Dirac P. A. M. Generalized Hamiltonian dynamics // *Can. J. Math.* 1950. Vol. 2, no. 2. P. 129–148.
- [221] Droz-Vincent P. Relativistic systems of interacting particles // *Phys. Scripta*. 1970. Vol. 2, no. 4-5. P. 129–134.
- [222] Todorov I. T. Dynamics of relativistic point particles as a problem with constrai-

- nts. Communications of the Joint Institute for Nuclear Researcch, E2 - 10125. Dubna, 1976.
- [223] *Todorov I. T.* Constraint Hamiltonian mechanics of directly interacting relativistic particles // Relativistic Action at a Distance: Classial and Quantum Aspects. Proceedings of the Workshop Held in Barcelona, Spain, June15-21,1981 / Ed. by J. Llosa. *Lect. Notes Phys.* no. 162. Berlin-Heidelberg-NY : Springer-Verlag, 1982. P. 213–263.
- [224] *Komar A.* Constraint formalism of classical mechanics // *Phys. Rev. D.* 1978. Vol. 18, no. 6. P. 1881–1886.
- [225] *Komar A.* Interacting relativistic particles // *Phys. Rev. D.* 1978. Vol. 18, no. 6. P. 1887–1893.
- [226] *Longhi G., Lusanna L.* Bound state solution, invariant scalar products, and conserved currents for a class of two-body relativistic systems // *Phys. Rev. D.* 1986. Vol. 34, no. 12. P. 3707–3731.
- [227] *Sazdjian H.* N-body bound state relativistic wave equations // *Ann. Phys. (NY)*. 1989. Vol. 191, no. 1. P. 52–77.
- [228] *Crater H. W., Van Alstine P.* Two-body Dirac equations for particles interacting through world scalar and vector potentials // *Phys. Rev. D.* 1987. Vol. 36, no. 10. P. 3007–3036.
- [229] *Crater H. W., Van Alstine P.* Extension of two-body Dirac equations to general covariant interactions through a hyperbolic transformation // *J. Math. Phys.* 1990. Vol. 31, no. 8. P. 1998–2014.
- [230] *Sazdjian H.* The connection of two-particle relativistic quantum mechanics with the Bethe-Salpeter equation // *J. Math. Phys.* 1987. Vol. 28, no. 11. P. 2618–2638.
- [231] *Jallouli H., Sazdjian H.* The two-fermion vector potential of constraint theory from Feynman diagrams // *Phys. Lett. B.* 1996. Vol. 366, no. 1. P. 409–415.
- [232] *Van Alstine P., Crater H. W.* Wheeler-Feynman dynamics of spin- $\frac{1}{2}$  particles // *Phys. Rev. D.* 1986. Vol. 33, no. 4. P. 1037–1047.
- [233] *Crater H. W., Yang D.* A covariant extrapolation of the noncovariant two particle Wheeler-Feynman Hamiltonian from the Todorov equation and Dirac's constrai-

- nt mechanics // *J. Math. Phys.* 1991. Vol. 32, no. 9. P. 2374–2394.
- [234] *Jugeau F., Sazdjian H.* Bound state equation in the Wilson loop approach with minimal surfaces // *Nucl. Phys. B.* 2003. Vol. 670, no. 1. P. 221–263.
- [235] *Van Alstine P., Crater H. W.* Exact parapositroniumlike solution to two-body Dirac equations // *Phys. Rev. D.* 1986. Vol. 34, no. 6. P. 1932–1935.
- [236] *Sazdjian H.* Light fermion bound states in two-particle relativistic quantum mechanics // *Phys. Rev. D.* 1986. Vol. 33, no. 11. P. 3435–3440.
- [237] *Dominici D., Gomis J., Longhi G. A.* A Lagrangian for two interacting relativistic particles // *Nuovo Cimento B.* 1978. Vol. 48, no. 2. P. 152–166.
- [238] *Dominici D., Gomis J., Longhi G. A.* A Lagrangian for two interacting relativistic particles: canonical formulation // *Nuovo Cimento A.* 1978. Vol. 48, no. 3. P. 257–270.
- [239] *Yukawa H.* Quantum theory of non-local fields. Part I. Free fields // *Phys. Rev.* 1950. Vol. 77, no. 2. P. 219–226.
- [240] *Марков М. А.* О нелокализуемых полях // *ЖЭТФ*. 1951. Т. 21, № 1. С. 11–15.
- [241] *Rohrlich F.* Relativistic Hamiltonian dynamics I. Classical mechanics // *Ann. Phys. (NY)*. 1979. Vol. 117, no. 2. P. 292–322.
- [242] *Rohrlich F.* Relativistic Hamiltonian dynamics II. Momentum-dependent interactions, confinement and quantization // *Ann. Phys. (NY)*. 1980. Vol. 130, no. 2. P. 350–394.
- [243] *Rohrlich F.* Relativistic particle systems with confining interactions // *Physica A.* 1979. Vol. 96, no. 1. P. 290–299.
- [244] *Dirac P. A. M.* Forms of relativistic dynamics // *Rev. Mod. Phys.* 1949. Vol. 21, no. 3. P. 392–399.
- [245] *Соколов С. Н.* Координаты в релятивистской гамильтоновой механике // *Теор. матем. физ.* 1985. Т. 65, № 5. С. 210–221.
- [246] *Дувіряк А. А., Ключковський Ю. Б.* Просторово-часова інтерпретація в релятивістської гамільтонової механіки системи частинок // *Укр. фіз. журн.* 1992. Т. 37, № 2. С. 313–321.
- [247] *Kliepikov N. P., Shatniy F. N.* Covariant mechanics and forms of relativistic dynamics // *Viest. Mosk. U. Fiz. As.* 1983. Т. 24, № 3. С. 32–37.

- [248] *Leutwyler Y., Stern J.* Relativistic dynamics on a null plane // *Ann. Phys. (NY)*. 1978. Vol. 112, no. 1. P. 94–165.
- [249] *Sokolov S. N., Shatnii A. N.* Physical equivalence of the three forms of relativistic dynamics and addition of interactions in the front and instant forms // *Theor. Math. Phys.* 1978. Vol. 37, no. 3. P. 1029–1038.
- [250] *Keister B. D., Polyzou W. N.* Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics // Constraint's Theory and Relativistic Dynamics / Ed. by E. Vogt J. W. Negele. *Adv. Nucl. Phys.* no. 20. NY : Plenum, 1991. P. 225–479.
- [251] *Karmanov V. A., Smirnov A. V.* Deuteron electromagnetic form factors in the light-front dynamics // *Nucl. Phys. A*. 1994. Vol. 575, no. 3. P. 520–548.
- [252] *Klink W. H.* Point form relativistic quantum mechanics and electromagnetic form factors // *Phys. Rev. C*. 1998. Vol. 58, no. 6. P. 3587–3604.
- [253] Explicitly covariant light-front dynamics and relativistic few-body systems / J. Carbonell, B. Desplanques, V. A. Karmanov, J.-F. Mathiot // *Phys. Rep.* 1998. Vol. 300, no. 5. P. 215–347.
- [254] *Фихтенгольц И. Г.* Лагранжева форма уравнений движения во втором приближении теории тяготения Эйнштейна // *ЖЭТФ*. 1950. Т. 20, № 13. С. 233–242.
- [255] *Голубенков В. Н., Смородинский Я. А.* Функция Лагранжа для системы одинаковых заряженных частиц // *ЖЭТФ*. 1956. Т. 31, № 2. С. 330.
- [256] *Gaida R. P., Klyuchkovskii Y. B., Tretyak V. I.* Lagrangian classical relativistic mechanics of a system of directly interacting particles. I // *Theor. Math. Phys.* 1980. Vol. 44, no. 2. P. 687–697.
- [257] *Gaida R. P., Klyuchkovskii Y. B., Tretyak V. I.* Lagrangian classical relativistic mechanics of a system of directly interacting particles. II // *Theor. Math. Phys.* 1980. Vol. 45, no. 2. P. 963–975.
- [258] *Gaida R. P., Klyuchkovskii Y. B., Tretyak V. I.* Forms of relativistic dynamics in classical Lagrangian description of particle systems // *Theor. Mat. Phys.* 1983. Vol. 55, no. 1. P. 372–384.
- [259] *Gaida R. P., Tretyak V. I.* Single-time form of the Fokker-type relativistic dynamics // *Acta Phys. Pol. B*. 1980. Vol. 11, no. 7. P. 502–522.

- [260] *Tretyak V. I., Gaida R. P.* Symmetries and conservation laws in the single-time form of the Fokker-type relativistic dynamics // *Acta Phys. Pol. B*. 1980. Vol. 11, no. 7. P. 523–538.
- [261] *Быков А. А., Дремин И. М., Леонидов А. В.* Потенциальные модели кварк-кония // *УФН*. 1984. Т. 143, № 1. С. 3–32.
- [262] Spectrum of charmed quark-antiquark bound states / E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, J. Kogut, K. D. Lane, T.-M. Yan // *Phys. Rev. Lett.* 1975. Vol. 34, no. 6. P. 369–372.
- [263] *Nielsen H. B.* Dual strings // Fundamentals of quark models. Proc. 17th Scot. Univ. Summer Sch. Phys., St.Andrews, Aug. 1976. Edinburg, 1977. P. 465–547.
- [264] *'t Hooft G.* The topological mechanism for permanent quark confinement in a non-Abelian gauge theory // *Phys. Scripta B*. 1982. Vol. 25, no. 1. P. 133–142.
- [265] *Кузьменко Д. С., Симонов Ю. А., Шеевиченко В. И.* Вакуум, конфайнмент и струны КХД в методе вакуумных кореляторов // *УФН*. 2004. Т. 174, № 1. С. 3–18.
- [266] *Bissey F., Leinweber A. I. S. D. B.* Comparison of gluon flux-tube distribution for quark-diquark and quark-antiquark hadrons // *Phys. Rev. D*. 2009. Vol. 80, no. 11. P. 114506.
- [267] *Adler S. L., Piran T.* Flux confinement in the leading logarithm model // *Phys. Lett. B*. 1982. 07. Vol. 113, no. 5. P. 405–410.
- [268] *Adler S. L., Piran T.* The heavy quarks static potential in the leading log and the leading log log models // *Phys. Lett. B*. 1982. 11. Vol. 117, no. 1-2. P. 91–95.
- [269] *Haysak M. I., Lengyel V. I.* Mass-spectrum of hadrons in the quasi-relativistic quark potential model // *Ukr. J. Phys.* 1992. Т. 37, № 9. С. 1287–1301.
- [270] *Inopin A., Sharov G. S.* Hadronic Regge trajectories: Problems and approaches // *Phys. Rev. D*. 2001. Vol. 63, no. 5. P. 054023.
- [271] *Gaida R. P.* Quasirelativistic interacting particle systems // *Fiz. Elem. Chastits At. Yadra (USSR)*. 1982. Т. 13, № 2. С. 427–93.
- [272] *Childers R. W.* Effective Hamiltonians for generalized Breit interactions in QCD // *Phys. Rev. D*. 1987. Vol. 36, no. 2. P. 606–614.
- [273] *Childers R. W.* Long-distance Lienard-Wiechert potentials and  $q\bar{q}$  spin

- dependence // *Phys. Rev. D*. 1987. Vol. 36, no. 12. P. 3813–3816.
- [274] *Olsson M. G., Miller K. J.* Relativistic corrections in potential models // *Phys. Rev. D*. 1983. Vol. 28, no. 3. P. 674–676.
- [275] *Ebert D., Faustov R. N., Galkin V. O.* Relativistic properties of the quark-antiquark potential // *Eur. Phys. J. C*. 1999. Vol. 7, no. 3. P. 539–542.
- [276] *Піх C. C.* Важкі кварконії в релятивізованій потенціальній моделі // *Журн. фіз. дослідж.* 2012. Т. 16, № 4. 4101. – 8 с.
- [277] *Su J.-C., Chen J.-X.* Retardation terms in the one-gluon exchange potential // *Internat. J. Mod. Phys. A*. 2001. Vol. 16, no. 22. P. 3745–3753.
- [278] *Berdnikov E. B., Pronko G. P.* Relativistic model of orbital excitations of mesons // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1991. Vol. 54, no. 3(9). P. 763–776.
- [279] *Goebel C., LaCourse D., Olsson M. G.* Systematics of some ultrarelativistic potential models // *Phys. Rev. D*. 1990. Vol. 41, no. 9. P. 2917–2923.
- [280] *Khruschev V. V.* Mass spectrum of mesons in generalized quark field model // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1987. Vol. 46, no. 1(7). P. 219–225.
- [281] *Khruschev V. V.* Mass formulae for mesons containing light quarks. Serpukhov : IHEP, 1987. (Preprint /Institute for High Energy Physics; IHEP 87-9).
- [282] *Borodulin V. I., Plyushchay V. S., Pronko G. P.* Relativistic string model of light mesons with massless quarks // *Z. Phys. C*. 1988. Vol. 41, no. 2. P. 293–302.
- [283] *Simonov Y.* Ideas in nonperturbative QCD // *Nuovo Cimento A*. 1994. Vol. 107, no. 11. P. 2629–2644.
- [284] *Ishida S., Oda M.* A universal spring and meson orbital Regge trajectories // *Nuovo Cimento A*. 1994. Vol. 107, no. 11. P. 2519–2525.
- [285] *Tang A., Norbury J. W.* Properties of Regge trajectories // *Phys. Rev. D*. 2000. Vol. 62, no. 1. P. 016006.
- [286] *Inopin A.* Hadronic Regge trajectories in the resonance energy region. arXiv:hep-ph/0110160.
- [287] *Brisudova M. M., Burakovsky L., Goldman N.* Lessons from hadron phenomenology // *Nucl. Phys. B: Proc. Supp.* 2000. Vol. 90, no. 1-3. P. 120–122.
- [288] *Барбашов Б. Н., Нестеренко В. В.* Модель релятивистської струни в фізиці адронов. Москва : Енергоатомиздат, 1987.

- [289] Кобзарев И. Ю., Мартемьянов Б. В., Щепкин М.Г. Орбитальные возбуждения адронов // УФН. 1992. Т. 162, № 4. С. 1–41.
- [290] Kim Y. S., Noz M. E. Covariant harmonic oscillator and the quark model // *Phys. Rev. D*. 1973. Vol. 8, no. 10. P. 3521–3527.
- [291] Ravndal F. A harmonic quark bag model // *Phys. Lett. B*. 1982. 06. Vol. 113, no. 1. P. 57–60.
- [292] Moshinsky M., Szczepaniak A. The Dirac oscillator // *J. Phys. A*. 1989. Vol. 22, no. 17. P. L817–L819.
- [293] Khruschev V. V. Strange meson mass spectrum in relativistic model for quasi-independent quarks. Serpukhov, 1989. (Preprint /Institute for High Energy Physics; IHEP 89-111).
- [294] Khruschev V. V., Savrin V. I., Semenov S. V. On the universality of quark-antiquark interactions in the independent quark model // *Phys. Lett. B*. 1996. Vol. 374, no. 1-3. P. 159–162.
- [295] Khruschev V. V., Savrin V. I., Semenov S. V. On the parameters of the QCD-motivated potential in the relativistic independent quark model // *Phys. Lett. B*. 2002. Vol. 525, no. 3-4. P. 283–288.
- [296] Haysak I. I., Lengyel V. I., Shpenik A. O. Fine splitting of two-quark systems from the Dirac equation // Internat. Workshop “Hadrons-94”. Proc. Contributed papers / Ed. by G. Bugrij, L. Jenkovsky, E. Martynov. Uzhgorod, Ukraine, 7-11 September 1994. P. 267–271.
- [297] Quark masses in the relativistic analytic model / I. I. Haysak, V. I. Lengyel, A. O. Shpenik, S. Chalupka, M. Salak // *Ukr. J. Phys.* 1996. T. 4, № 3. C. 370–372.
- [298] Pikh S. S., Zdrok V. P. Quarkonium spectroscopy in the phenomenological potential model // *Soviet Physics Journal*. 1991. Vol. 34, no. 7. P. 567–71.
- [299] The Dirac equation with CJP-potential / S. Chalupka, V. I. Lengyel, M. Salak, A. O. Shpenik // Internat. Workshop “Hadrons-94”. Proc. Contributed papers / Ed. by G. Bugrij, L. Jenkovsky, E. Martynov. Uzhgorod, Ukraine, 7-11 September 1994. P. 272–279.
- [300] The role of relativistic kinematics in describing two-quark systems / V. Lengyel,

- V. Rubish, Yu. Fekete, S. Chalupka, M. Salak // *Condens. Mattter Phys.* 1998. Vol. 1, no. 3(15). P. 575–585.
- [301] Lazur V. Y., Reity A. K., Rubish V. V. Semiclassical approximation in the relativistic potential model of B and D mesons // *Theor. Math. Phys.* 2008. Vol. 155, no. 3. P. 825–847.
- [302] Semay C. On relativistic models of light mesons // *J. Phys. G.* 1994. Vol. 20, no. 5. P. 689–699.
- [303] Crater H. W., Van Alstine P. Relativistic constraint dynamics for spinning quarks in meson // Constraint's Theory and Relativistic Dynamics / Ed. by G. Longhi, L. Lusanna. Singapore : World Scientific Publ., 1987. P. 171–196.
- [304] Andreev V. V., Sergeenko M. N. Meson Regge trajectories in relativistic quantum mechanics. 1999. arXiv:hep-ph/9912299.
- [305] Krassnigg A., Schweiger W., Klink W. H. Vector mesons in a relativistic point-form approach // *Phys. Rev. C.* 2003. Vol. 67, no. 6. P. 064003.
- [306] Aboud N. A., Hiller J. R. Meson properties in a light quark model // *Phys. Rev. D.* 1990. Vol. 41, no. 3. P. 937–945.
- [307] Третяк В. І., Шпітко В. Є. Квантування Вайля у двовимірній моделі фронтової форми релятивістичної динаміки // *Укр. фіз. журн.* 1995. Т. 40, № 11-12. С. 1250–1255.
- [308] Systematization of  $q\bar{q}$  mesons by Bethe-Salpeter equation ultrarelativistic potential models / Ch. Habe(Yoshida), K. Iwata, M. Hirano, T. Murota, D. Tsuruda // *Prog. Theor. Phys.* 1987. Vol. 77, no. 4. P. 917–925.
- [309] Relativistic description of quark-antiquark bound states. Spin-independent treatment / A. Gara, B. Durand, L. Durand, L.J. Nickisch // *Phys. Rev. D.* 1989. Vol. 40, no. 3. P. 843–854.
- [310] Relativistic description of quark-antiquark bound states. II. Spin-dependent treatment / A. Gara, B. Durand, L. Durand, L.J. Nickisch // *Phys. Rev. D.* 1990. Vol. 42, no. 5. P. 1651–1660.
- [311] Lagaë J.-F. Spectroscopy of light-quark mesons and the nature of the long-range  $q\bar{q}$  interaction // *Phys. Rev. D.* 1992. Vol. 45, no. 1. P. 317–327.
- [312] Godfrey S., Isgur N. Mesons in a relativized quark model with chromodynamics

- cs // *Phys. Rev. D.* 1985. Vol. 32, no. 1. P. 189–231.
- [313] *Eyre D., Vary J. P.* Solving momentum-space integral equations for quarkonia spectra with confining potentials // *Phys. Rev. D.* 1986. Vol. 34, no. 11. P. 3467–3471.
- [314] *Spence J. R., Vary J. P.* Solving momentum-space integral equations for quarkonia spectra with confining potentials. II // *Phys. Rev. D.* 1987. Vol. 35, no. 7. P. 2191–2193.
- [315] *Hersbach H.* Relativistic linear potential in momentum space // *Phys. Rev. D.* 1993. Vol. 47, no. 7. P. 3027–3033.
- [316] *Sommerer A. J., Spence J. R., Vary J. P.* Relativistic momentum space wave equations and meson spectroscopy // *Phys. Rev. C.* 1994. Vol. 49, no. 1. P. 513–523.
- [317] Relativistic meson spectroscopy and in-medium effects / A. J. Sommerer, A. Abd El-Hady, J. R. Spence, J. P. Vary // *Phys. Lett. B.* 1995. Vol. 348, no. 3. P. 277–282.
- [318] Dynamical symmetry breaking and particle mass creation in gauge field theories / P. I. Fomin, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, Yu. A. Sitenko // *Riv. Nuovo Cimento.* 1983. Vol. 6, no. 5. P. 1–90.
- [319] *Zhang T., Koniuk R.* Heavy-quark mesons in a relativistic quark model // *Phys. Rev. D.* 1991. Vol. 43, no. 5. P. 1688–1701.
- [320] *Zhang T., Koniuk R.* The  $\pi - \rho$  mass splitting // *Phys. Lett. B.* 1991. Vol. 261, no. 3. P. 311–314.
- [321] *Di Leo L., Darewych J. W.* A variational Fock-space treatment of quarkonium // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2002. Vol. 17, no. 16. P. 2165–2190.
- [322] *Chigodaev A., Darewych J. W.* Effect of virtual pairs on the inter-quark potential. 2013. arXiv:1309.2582.
- [323] *de Groot S. R., Suttorp L. G.* Foundations of electrodynamics. Amsterdam : North–Holland Publishing Company, 1972.
- [324] *Tretyak V. I.* Tensor fields and renormalizing of mass in the classical theory of direct interaction // *J. Soviet Math.* 1993. Vol. 64, no. 5. P. 1184–1186.
- [325] *Yaremko Y., Tretyak V.* Radiation reaction in classical field theory: basics,

- concepts, methods. Saarbrücken : LAP, 2012.
- [326] Davies P. C. W. A quantum theory of Wheeler-Feynman electrodynamics // *Proc. Camb. Philos. S. M.* 1970. Vol. 68, no. 3. P. 751–764.
- [327] Sudarshan E. C. G., Mukunda N. Classical dynamics: a modern perspective. – *Progress in mathematics*. NY-London-Sydney-Toronto : John Wiley & Sons, 1997.
- [328] Havas P., Goldberg J. N. Lorentz-invariant equations of motion of point masses in the general theory of relativity // *Phys. Rev.* 1962. Vol. 128, no. 1. P. 398–414.
- [329] Poincaré-invariant gravitational field and equations of motion of two pointlike objects: The postlinear approximation of general relativity / L. Bel, Th. Damour, N. Deruelle, J. Ibanez, J. Martin // *Gen. Relat. Gravit.* 1981. Vol. 13, no. 10. P. 963–1004.
- [330] Zhdanov V. I. On the instantaneous form of the two-body equations of motion in Fokker-Wheeler-Feynman electrodynamics // *Phys. Lett. A.* 1981. Vol. 85, no. 3. P. 138–140.
- [331] Жданов В. И., Пирагас К. А. К проблеме двух тел в теории прямого гравитационного взаимодействия (I) // *Acta Phys. Pol. B.* 1972. Т. 3, № 5. С. 585–598.
- [332] Nikitin I. N. Hamiltonian formulation of the two-body problem in Wheeler-Feynman electrodynamics // *Nuovo Cimento B.* 1995. Vol. 110, no. 7. P. 771–791.
- [333] Klimenko S. V., Nikitin I. N., Urazmetov W. F. On structure of solutions of one-dimensional two-body problem in Wheeler-Feynman electrodynamics // *Nuovo Cimento A.* 1998. Vol. 111, no. 11. P. 1281–1297.
- [334] De Luca J. Variational principle for the Wheeler—Feynman electrodynamics // *J. Math. Phys.* 2009. Vol. 50, no. 6. 062701. – 24 p.
- [335] Nikitin I. N., De Luca J. Numerical methods for the three-dimensional two-body problem in action-at-a-distance electrodynamics // *Int. J. Mod. Phys. C.* 2001. Vol. 12, no. 5. P. 739–750.
- [336] Bauer G., Deckert D.-A., Dürr D. On the existence of dynamics in Wheeler-Feynman electromagnetism // *Z. Angew. Math. Phys.* 2013. Vol. 64, no. 4. P. 1087–1124.

- [337] Декерт Д.-А., Дюр Д., Фона Н. Уравнения с запаздывающим аргументом типа Уилера-Фейнмана // Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 47. С. 46–59.
- [338] Жданов В. И., Пирагас К. А. К проблеме двух тел в теории прямого гравитационного взаимодействия (II) // *Acta Phys. Pol. B*. 1972. Т. 3, № 5. С. 599–619.
- [339] Woodcock H. W., Havas P. Approximately relativistic Lagrangians for classical interacting point particles // *Phys. Rev. D*. 1972. Vol. 6, no. 12. P. 3422–3444.
- [340] Hamiltonian formalism for path-dependent Lagrangians / X. Jaén, R. Jáuregui, J. Llosa, A. Molina // *Phys. Rev. D*. 1987. Vol. 36, no. 8. P. 2385–2398.
- [341] Mayorov A. A., Sokolov S. N., Tretyak V. I. Specifics of the particle motion and spreading up of perturbations on the front form of two-dimensional relativistic dynamics. Serpukhov : IHEP, 1988. (Preprint / Institute for Hight Energy Physics; IHEP 86-243).
- [342] Fichtenholz I. G. Lagrangian form of equations of motion in the 2nd approximation of Einstein's theory of gravitation // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1950. Т. 20, № 13. С. 263–288.
- [343] Shanmugadhasan S. Canonical formalism for degenerate Lagrangians // *J. Math. Phys.* 1973. Vol. 14, no. 6. P. 677–687.
- [344] Currie D. G., Jordan J. F., Sudarshan E. C. G. Relativistic invariance and Hamiltonian theories of interacting particles // *Rev. Mod. Phys.* 1963. Vol. 35, no. 2. P. 350–375.
- [345] Pryce M. H. L. The mass-centre in the restricted theory of relativity and its connection with the quantum theory of elementary particles // *P. R. Soc. Lond. A*. 1948. Vol. 195, no. 1040. P. 62–81.
- [346] Дувіряк А. А., Ключковський Ю. Б. Коваріантні двочастинкові світові лінії в релятивістській гамільтоновій механіці // *Математические методы и физико-механические поля*, Т.34. Київ : Наукова думка, 1991. С. 100–105.
- [347] Duviryak A. A., Kluchkovsky Y. B. Covariant two-particle world lines in relativistic Hamiltonian mechanics // *J. Soviet Math.* 1993. Vol. 66, no. 6. P. 2548–2653.
- [348] Droz-Vincent P., Nurowski P. Symmetries in predictive relativistic mechanics //

- J. Math. Phys.* 1990. Vol. 31, no. 10. P. 2393–2398.
- [349] Рябушко А. П. Движение тел в общей теории относительности. Минск : Вышэйшая школа, 1979.
- [350] Barut A. O. Dynamical groups for the motion of relativistic composite systems // Groups, Systems and Many-Body Physics. Braunschweig, Wiesbaden : Vieweg, 1980. P. 285–318.
- [351] Кириллов А. А. Элементы теории представлений. Москва : Наука, 1972.
- [352] Barut A. O., Fronsdal C. On non-compact groups. II. Representations of the  $2 + 1$  Lorentz group // *P. R. Soc. Lond. A.* 1965. Vol. 287, no. 1411. P. 532–548.
- [353] Gaida R., Tretyak V., Yaremko Y. Quasi-relativistic center-of-mass variables in applications // *Condens. Matter Phys.* 1998. Vol. 1, no. 3(15). P. 425–437.
- [354] Brezin E., Itzykson C., Zinn-Justin J. Relativistic Balmer formula including recoil effects // *Phys. Rev. D.* 1970. Vol. 1, no. 8. P. 2349–2354.
- [355] Crater H. W., Naft J. Classical limit and generalizations of the homogeneous quasipotential equation for scalar interactions // *Phys. Rev. D.* 1975. Vol. 12, no. 4. P. 1165–1177.
- [356] Fronsdal C., Lundberg L. E. Relativistic quantum mechanics of two interacting particles // *Phys. Rev. D.* 1970. Vol. 1, no. 12. P. 3247–3257.
- [357] Flügge S. Practical quantum mechanics I. Berlin-Heidelberg-NY : Springer-Verlag, 1971.
- [358] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Москва : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.
- [359] Johnson K., Nohl C. Simple semiclassical model for the rotational states of mesons containing massive quarks // *Phys. Rev. D.* 1979. Vol. 19, no. 1. P. 291–295.
- [360] Moshinsky M., Nikitin A. G. The many body problem in relativistic quantum mechanics // *Rev. Mex. Fis.* 2005. Vol. 50. P. 66–73.
- [361] Balachandran A. P. Classical description of a particle interacting with a non-Abelian gauge field // *Phys. Rev. D.* 1977. Vol. 15, no. 8. P. 2308–2317.
- [362] Gauge Symmetries and Fibre Bundles. Applications to Particle Dynamics / A. P. Balachandran, G. Marmo, B.-S. Skagerstam, A. Stern. – *Lect. Notes Phys.*

- no. 188. Berlin-Heidelberg-NY-Tokyo : Springer-Verlag, 1983.
- [363] *Vanhecke F.* Classical chromodynamics, a geometrical approach // *Rev. Bras. Fis.* 1982. Vol. 12, no. 2. P. 343–360.
- [364] *Wong S.* Field and particle equations for the classical Yang–Mills field and particles with isotopic spin // *Nuovo Cimento A*. 1970. Vol. 65, no. 4. P. 689–694.
- [365] Modern Kaluza-Klein theories / Ed. by Th. Appelquist, A. Chodos, P.G.O. Erenund. Addison-Wesley, 1987.
- [366] *Hermann R.* Geodesics and classical mechanics on Lie group // *J. Math. Phys.* 1972. Vol. 13, no. 4. P. 460–464.
- [367] *Drechsler W., Rosenblum A.* Equations of motion and iteration of Lienard-Wiechert-type solutions in classical Yang-Mills theory // *Phys. Lett. B*. 1981. Vol. 106, no. 1-2. P. 81–87.
- [368] *Blaha S.* Towards a field theory of hadron binding // *Phys. Rev. D*. 1974. Vol. 10, no. 12. P. 4268–4277.
- [369] *Дубиряк А. А., Ключковский Ю. Б.* Классический аналог переплетающихся операторов в релятивистской гамильтоновой механике системы частиц // *Математические методы и физико-механические поля*, Т. 32. Киев : Наукова думка, 1990. С. 62–67.
- [370] Handbook of mathematical functions / Ed. by M. Abramowitz, I. A. Stegun. – *Applied Mathematics Series* no. 55. National Bureau of Standards, 1964.
- [371] *Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю.* Сфериодальные и кулоновские сфероидальные функции. Москва : Наука, 1976.
- [372] *Jones W. B., Thron W. J.* Continued Fractions. Analytic Theory and Applications. London : Addison-Wesley, 1980.
- [373] *Olive K. A., et. al. Particle Data Group* // *Chin. Phys. C*. 2014. Vol. 38. 090001.
- [374] *Haysak I. I., Morokhovych V. S.* Hyperfine splitting and decay of heavy mesons // *J. Phys. Stud.* 2002. Т. 6, № 1. С. 55–59.
- [375] *Actor A.* Classical solutions of SU(2) Yang-Mills theories // *Rev. Mod. Phys.* 1979. Vol. 51, no. 3. P. 461–525.
- [376] *Kosyakov B.* Introduction to the classical theory of particles and fields. Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2007.

- [377] Souriau J.-M. Structure of dynamical systems. – *Progress in mathematics*. Boston, Mass. : Birkhauser, 1997.
- [378] Chaverondier B. Special relativity and possible Lorentz violations consistently coexist in Aristotle space-time. arXiv:0805.2417.
- [379] Herman W. N. Formulation of Noether's theorem for Fokker-type variational principles // *J. Math. Phys.* 1985. Vol. 26, no. 11. P. 2769–2776.
- [380] Pais A., Uhlenbeck G. E. On field theories with non-localized action // *Phys. Rev.* 1950. Vol. 79, no. 1. P. 145–165.
- [381] Staruszkiewicz A. On exact solutions of the relativistic two-particle problem // *Ann. Phys.* 1969. Vol. 478, no. 1. P. 66–70.
- [382] Barker B. M., O'Connell R. F. Removal of acceleration terms from the two-body Lagrangian to order  $c^{-4}$  in electromagnetic theory // *Can. J. Phys.* 1980. Vol. 58. P. 1659–1666.
- [383] Mlodinov L., Shatz M. P. Solving the Schrödinger equation with use of  $1/N$  perturbation theory // *J. Math. Phys.* 1984. Vol. 25, no. 4. P. 943–950.
- [384] Imbo T., Pagnamenta A., Sukhatme U. Energy eigenstates of spherically symmetric potentials using the shifted  $1/N$  expansion // *Physical Review D*. 1984. Vol. 29, no. 8. P. 1669–1681.
- [385] Vakarchuk I. O. The  $1/N$ -expansion in quantum mechanics. High-order approximations // *J. Phys. Stud.* 2002. Vol. 6, no. 1. P. 46–54.
- [386] Mustafa O., Barakat T. Nonrelativistic shifted- $\ell$  expansion technique for three- and two-dimensional Schrödinger equation // *Commun. Theor. Phys.* 1997. Vol. 28, no. 3. P. 257–264.
- [387] Mustafa O., Barakat T. Relativistic shifted- $\ell$  expansion technique for Dirac and Klein-Gordon equations // *Commun. Theor. Phys.* 1998. Vol. 29, no. 4. P. 587–594.
- [388] Messiah A. Quantum mechanics, Vol. 2. New York : Willey, 1961.
- [389] Ishida S., Yamada K. Light-quark meson spectrum in the covariant oscillator quark model with one-gluon-exchange effects // *Phys. Rev. D*. 1987. Vol. 35, no. 1. P. 265–281.
- [390] Long C., Robson D. Bound states of a relativistic quark confined by a vector

- potential // *Phys. Rev. D.* 1983. Vol. 27, no. 3. P. 644–646.
- [391] *Baric N., Jena S. N.* Lorentz structure vs relativistic consistency of an effective power-law potential model for quark-antiquark systems // *Phys. Rev. D.* 1982. Vol. 26, no. 9. P. 2420–2429.
- [392] *Efimov G. V.* Quantum field theory and quantum statistics / Ed. by I. A. Batalin. Bristol : Adam Hilger, 1987. P. 545–564.
- [393] *Polchinski J.* Renormalization and effective Lagrangians // *Nuclear Physics B.* 1984. Vol. 231, no. 2. P. 269–295.
- [394] Nonlocal regularizations of gauge theories / D. Evens, J. W. Moffat, G. Kleppe, R. P. Woodard // *Phys. Rev. D.* 1991. Vol. 43, no. 2. P. 499–519.
- [395] *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. Б.* Квантованные поля. Москва : Наука, 1980.
- [396] *Feinberg G.* Possibility of faster-than-light particles // *Phys. Rev.* 1967. Vol. 159, no. 5. P. 1089–1105.
- [397] *Kamoi K., Kamefuchi S.* Comments on quantum field theory of tachyons // *Prog. Theor. Phys.* 1971. Vol. 45, no. 5. P. 1646–1661.
- [398] *Bilaniuk O. M. P., Deshpande V. K., Sudarshan E. C. G.* “Meta” relativity // *American J. Phys.* 1962. Vol. 30, no. 10. P. 718–723.
- [399] *Recami E.* Classical tachyons and possible applications // *Riv. Nuovo Cimento.* 1986. Vol. 9, no. 6. P. 1–178.
- [400] *Recami E.* Superluminal waves and objects: overview of the relevant experiments // *J. Phys: Conf. Ser.* 2009. Vol. 196. P. 1–14.
- [401] *Rebhan A.* Collective phenomena and instabilities of perturbative quantum gravity at non-zero temperature // *Nuclear Physics B.* 1991. Vol. 351, no. 3. P. 706–734.
- [402] *Barci D. G., Bollini C. G., Rocca M. C.* Tachyons and higher order wave equations // *Int. J. Mod. Phys. A.* 1995. Vol. 10, no. 12. P. 1737–1747.
- [403] *Sen A.* Tachyon dynamics in open string theory // *Phys. Rev. D.* 2005. Vol. 20, no. 24. P. 5513–5656.
- [404] *Sudarshan E. C. G.* Tachyon cloud of a particle // *Phys. Rev. D.* 1970. Vol. 1, no. 8. P. 2428–2428.
- [405] *Jue C.* Soluble tachyon field model and the equivalence theorem // *Phys. Rev.*

*D.* 1973. Vol. 8, no. 6. P. 1757–1764.

- [406] *van der Spuy E.* Role of the fundamental tachyon field in the elastic scattering amplitude // *Phys. Rev. D.* 1973. Vol. 7, no. 4. P. 1106–1112.
- [407] *Maccarrone O. D., Recami E.* Two-body interactions through tachyon exchange // *Nuovo Cimento A.* 1980. Vol. 57, no. 1. P. 85–101.
- [408] Phenomenology based on tachyon exchange / A. M. Gleeson, M. G. Gundzik, E. C. G. Sudarshan, A. Pagnamenta // *Phys. Rev. D.* 1972. Vol. 6, no. 3. P. 807–813.
- [409] *Emami-Razavi M., Darewych J. W.* Relativistic two-, three- and four-body wave equations in scalar QFT // *J. Phys. G.* 2005. Vol. 31, no. 9. P. 1095–1110.
- [410] *Sen A.* Anti-shielding effect and negative temperature in instantaneously reversed electric fields and left-handed media // *Phys. Scripta.* 2003. Vol. 68, no. 1. P. 87–97.
- [411] *Chiueh T., Tseng Y.* Rotating halos and spirals in low surface brightness galaxies // *Astrophys. J.* 2000. Vol. 544, no. 1. P. 204–217.
- [412] *Sedov V. L.* Binding energy of two particles in a state described by the Schrödinger equation with a screened Coulomb potential // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1970. Vol. 14. P. 871.
- [413] *Shpytko V., Darewych J.* Ruced Lagrangians for field theories with non-linear coupling // *J. Phys Studies.* 2002. Vol. 6, no. 3. P. 289–297.
- [414] *Шилов И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Москва : ГИФМЛ, 1959.
- [415] On the Lambert W function / R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, D. E. Knuth // *Adv. Comput. Math.* 1996. Vol. 5, no. 1. P. 329–359.

## ДОДАТКИ

### A. Матричне представлення та властивості біспінорних гармонік

Біспінорні гармоніки в  $2 \times 2$ -матричному представленні:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}^A(\mathbf{n}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} Y_j^\mu(\mathbf{n}) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{Y}^0(\mathbf{n}) &= \frac{1}{\sqrt{2j(j+1)}} \times \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} -\sqrt{(j-\mu+1)(j+\mu)} Y_j^{\mu-1} & \mu Y_j^\mu \\ \mu Y_j^\mu & \sqrt{(j+\mu+1)(j-\mu)} Y_j^{\mu+1} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{Y}^-(\mathbf{n}) &= \frac{1}{\sqrt{2(j+1)(2j+3)}} \times \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \sqrt{(j-\mu+1)(j-\mu+2)} Y_{j+1}^{\mu-1} & -\sqrt{(j+\mu+1)(j-\mu+1)} Y_{j+1}^\mu \\ -\sqrt{(j+\mu+1)(j-\mu+1)} Y_{j+1}^\mu & \sqrt{(j+\mu+1)(j+\mu+2)} Y_{j+1}^{\mu+1} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{Y}^+(\mathbf{n}) &= \frac{1}{\sqrt{2j(2j-1)}} \times \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \sqrt{(j+\mu-1)(j+\mu)} Y_{j-1}^{\mu-1} & \sqrt{(j+\mu)(j-\mu)} Y_{j-1}^\mu \\ \sqrt{(j+\mu)(j-\mu)} Y_{j-1}^\mu & \sqrt{(j-\mu-1)(j-\mu)} Y_{j-1}^{\mu+1} \end{bmatrix}, \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

де  $Y_\ell^\mu(\mathbf{n})$  ( $\mu = -\ell, \dots, \ell$ ) – сферичні гармоніки.

Основні властивості біспінорних гармонік:

$$\langle i|k\rangle = \int d\mathbf{n} \operatorname{Tr}(\mathcal{Y}_i^\dagger \mathcal{Y}_k) = \delta_{ik},$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{j}^2 \mathcal{Y} = j(j+1) \mathcal{Y}, & j = 0, 1, \dots, \\
& j_3 \mathcal{Y} = \mu \mathcal{Y}, & \mu = -j, \dots, j, \\
& \ell^2 \mathcal{Y}^i = \ell(\ell+1) \mathcal{Y}^i, & \ell = \begin{cases} j, & i = A, 0, \\ j \pm 1, & i = \mp, \end{cases} \\
& s^2 \mathcal{Y}^i = s(s+1) \mathcal{Y}^i, & s = \begin{cases} 0, & i = A, \\ 1, & i = 0, \mp, \end{cases} \\
& P \mathcal{Y}^{A,0} = (-)^j \mathcal{Y}^{A,0}, & P \mathcal{Y}^{\mp} = (-)^{j+1} \mathcal{Y}^{\mp}, \\
& [\mathcal{Y}^A]^T = -\mathcal{Y}^A, & [\mathcal{Y}^{0,\mp}]^T = \mathcal{Y}^{0,\mp}.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Дія спінових операторів на біспінорні дублети (5.3.19, с.239):

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \hat{\mathbf{o}} = \tau \hat{\mathbf{o}}, & \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}, \\
& \sigma_{1r} \hat{\mathbf{o}} = R^T \hat{\mathbf{e}}, & \sigma_{1r} \hat{\mathbf{e}} = R \hat{\mathbf{o}}, \\
& \sigma_{2r} \hat{\mathbf{o}} = -\sigma_3 R^T \hat{\mathbf{e}}, & \sigma_{2r} \hat{\mathbf{e}} = -R \sigma_3 \hat{\mathbf{o}}, \\
& \sigma_{1r} \sigma_{2r} \hat{\mathbf{o}} = -\sigma_3 \hat{\mathbf{e}}, & \sigma_{1r} \sigma_{2r} \hat{\mathbf{e}} = -R \sigma_3 R^T \hat{\mathbf{o}}, \\
& (\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \hat{\mathbf{o}} = -2i \sigma_{\uparrow} R^T \hat{\mathbf{e}}, & (\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \hat{\mathbf{e}} = 2i R \sigma_{\uparrow} \hat{\mathbf{e}}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

## B. Функція Гріна рівняння 4-го порядку

Упустимо в р-ні 4-го порядку (3.1.40) чи (6.3.2) неістотні індекси і множники:

$$\square^2 A(x) = J(x) \tag{B.1}$$

та еквівалентно зведемо його до пари р-нь Даламбера (як в (6.3.4)-(6.3.5)):

$$\begin{aligned}
& \square A(x) = B(x), \\
& \square B(x) = J(x).
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Тоді  $A(x)$  запишеться через згортку ф-ї Гріна р-ня Даламбера (1.3.13):

$$A = D_{\eta} * B = D_{\eta} * D_{\eta'} * J, \tag{B.3}$$

де  $\eta$  і  $\eta'$  можуть незалежно приймати значення  $+1, -1$ , або  $0$ .

Оскільки згортка узагальнених ф-й не завжди добре означена [414], необхідно спрощити усі комбінації  $\eta = \pm 1, \eta' = \pm 1$ ; інші випадки з  $\eta = 0$  і/або  $\eta' = 0$  зводяться до попередніх в силу рівності  $D_0 = \frac{1}{2}(D_+ + D_-) \equiv D_{\text{sym}}$ .

Представимо (B.3) у явному вигляді:

$$A(x) = \int d^4y \int d^4z D_{\eta}(y) D_{\eta'}(z) J(x - y - z). \tag{B.4}$$

Із врахуванням (1.3.12) і (1.3.20) отримаємо:

$$A(x) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^3y \int d^3z z \frac{J(x^0 - \eta|\mathbf{y}| - \eta'|\mathbf{z}|, \mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z})}{|\mathbf{y}| |\mathbf{z}|}, \quad (\text{B.5})$$

або, у термінах нових змінних,  $\mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$

$$A(x) = \frac{1}{32\pi^2} \int d^3u \int d^3v \frac{J(x^0 - \frac{1}{2}\eta|\mathbf{u} + \mathbf{v}| - \frac{1}{2}\eta'|\mathbf{u} - \mathbf{v}|, \mathbf{x} - \mathbf{u})}{|\mathbf{u} + \mathbf{v}| |\mathbf{u} - \mathbf{v}|}. \quad (\text{B.6})$$

Обчислимо інтеграл за  $d^3v$  у п.ч. р-ня (B.6). Перехід від декартових координат  $v_1, v_2, v_3$  для  $\mathbf{v}$  до еліпсоїдальних  $\sigma \geq 1 \geq \tau \geq -1$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ :

$$v_1 = |\mathbf{u}| \sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)} \cos \varphi, \quad v_2 = |\mathbf{u}| \sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)} \sin \varphi, \quad v_3 = |\mathbf{u}| \sigma \tau, \quad \text{дає}$$

$$A(x) = \frac{1}{8\pi} \int d^3u |\mathbf{u}| \int_1^\infty d\sigma \int_{-1}^1 d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi J \left( x^0 - \eta |\mathbf{u}| \times \begin{cases} \sigma, & \eta' = \eta \\ \tau, & \eta' = -\eta \end{cases}, \mathbf{x} - \mathbf{u} \right).$$

Якщо  $\eta' = -\eta$ , то цей інтеграл розбігається через множник  $\int_1^\infty d\sigma$ . У випадку  $\eta' = \eta$  він має вигляд:  $A(x) = \frac{1}{2} \int d^3u |\mathbf{u}| \int_1^\infty d\sigma J(x^0 - \eta |\mathbf{u}| \sigma, \mathbf{x} - \mathbf{u})$ .

Вживаючи заміну  $\sigma \rightarrow u^0 = \eta |\mathbf{u}| \sigma$ , отримаємо остаточний вираз для  $A(x)$ :

$$A(x) = \frac{1}{2} \int d^4u \Theta(\eta u^0) \Theta(u^2) J(x - u), \quad (\text{B.7})$$

що дає запізнену та випередну ф-ї Гріна рівняння (B.1):

$$G_\eta(x) = \frac{1}{8\pi} \Theta(\eta x^0) \Theta(x^2), \quad \eta = \pm 1. \quad (\text{B.8})$$

Часо-симетрична ф-я Гріна будується за лінійністю:

$$G_0(x) = \frac{1}{2} [G_+(x) + G_-(x)] = \frac{1}{16\pi} \Theta(x^2) \equiv G_{\text{sym}}(x). \quad (\text{B.9})$$

Цей вираз разом з (B.8) об'єднано в (3.1.41).

Зауважимо, що в [414] отримано інший, комплексний фундаментальний розв'язок р-ня (B.1):  $G_c(x) = \frac{\pm i}{(4\pi)^2} \ln(x^2 \pm i0)$ . Його дійсна частина з точністю до сталої тотожна до ф-ї Гріна (B.9):  $\text{Re}G_c(x) = \frac{1}{16\pi} (\Theta(x^2) - 1)$ , подібно до зв'язку фейнманівського пропагатора і симетричної ф-ї Гріна у стандартному випадку.

## C. Неперервні дроби у часо-асиметричній потенціальній моделі

Неперервний дріб в рівнянні (3.2.36) означено так:

$$\prod_{k=1}^n (a_k/b_k) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}} \quad (\text{C.1})$$

де його елементи  $a_k$  і  $b_k$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{\mu^2 k(k+2\delta)(k+2\ell+1)(k+2\ell+2\delta+1)}{4(k+\ell+\delta)(k+\ell+\delta+1)} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{\nu^2}{(k+\ell+\delta+1/2)^2}\right) \\ b_k &= (k+\ell+1)(k+\ell+2\delta+1) \\ &\quad + \mu\nu \left(1 + \frac{(\ell+\delta+1/2)(\ell-\delta+1/2)}{(k+\ell+\delta+1/2)(k+\ell+\delta+3/2)}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Вираз (C.1) збіжний в границі  $n \rightarrow \infty$  за умови Ворпіцького [372]

$$\left| \frac{a_k}{b_{k-1}b_k} \right| < \frac{1}{4} \quad (\text{C.3})$$

Врахування короткосяжної взаємодії в операторі (3.2.46) зводиться до заміни елементів  $a_k$  і  $b_k$  в секулярному рівнянні (3.2.36) на такі:

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{\mu^2 k(k+2\delta)(k+2\ell+1)(k+2\ell+2\delta+1)}{4(k+\ell+\delta)(k+\ell+\delta+1)} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{(\nu+\alpha)^2}{(k+\ell+\delta+1/2)^2}\right), \\ b_k &= (k+\ell+1)(k+\ell+2\delta+1) + 2\alpha\nu \\ &\quad + \mu \left(\nu - \alpha + \frac{(\nu+\alpha)(\ell+\delta+1/2)(\ell-\delta+1/2)}{(k+\ell+\delta+1/2)(k+\ell+\delta+3/2)}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

## D. Обчислення $\mathcal{D}^\perp$ і $\lambda = \omega_r/\Omega$ в ЧС-моделі

Зручно означити безрозмірну редуковану динамічну  $2 \times 2$ -матрицю

$$\bar{\mathcal{D}} \equiv \frac{1}{a\Omega} \mathcal{D}^\perp = \frac{m}{a} \Omega \mathcal{C} + \mathcal{K} - \Xi = f_\Omega(\phi) \mathcal{C} + \mathcal{K} - \Xi \quad (\text{D.1})$$

де:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma^3 + \lambda\Gamma - i\lambda\Gamma^3v^2 \\ i\lambda\Gamma^3v^2 \quad \Gamma + \lambda\Gamma^3 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.2})$$

$$\mathcal{K} = \int_0^\phi d\varphi \mathcal{K}_0 - \frac{1}{f'(\varphi)} \mathcal{K}_1 \Big|_{\varphi=\phi} + \frac{1}{f'(\varphi)} \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{f'(\varphi)} \mathcal{K}_2 \Big|_{\varphi=\phi}, \quad (\text{D.3})$$

$$\Xi = \int_0^\phi d\varphi \Xi_0 - \frac{1}{f'(\varphi)} \Xi_1 \Big|_{\varphi=\phi} + \frac{1}{f'(\varphi)} \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{f'(\varphi)} \Xi_2 \Big|_{\varphi=\phi}. \quad (\text{D.4})$$

Матриця  $\mathcal{C}$  походить з вільночастинкового члену дії (1.3.10). Функція  $f_\Omega(\phi)$  та компоненти інших матриць  $\mathcal{K}$  і  $\Xi$  залежать від взаємодії у моделі.

Для векторної моделі (Рівакоби-Вейсса) функція  $f_\Omega^{(v)}(\phi)$  означена в (3.3.8), а матриці у п.ч. р-нь (D.3) і (D.4) мають вигляд:

$$\mathcal{K}_0^{(v)} = 0, \quad (\text{D.5})$$

$$\mathcal{K}_1^{(v)} = 2 \begin{bmatrix} 1+v^2c(3+2c) & 0 \\ 0 & 2v^2s^2 \end{bmatrix} - 2i\lambda v^2(1+c) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.6})$$

$$\mathcal{K}_2^{(v)} = -4v^2(1+v^2c) \begin{bmatrix} (1+c)^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.7})$$

$$\Xi_0^{(v)} = (1+\lambda^2) \begin{bmatrix} cC & sS \\ -sS & cC \end{bmatrix} - 2i\lambda \begin{bmatrix} sS & -cC \\ cC & sS \end{bmatrix}, \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} \Xi_1^{(v)} = & -2 \begin{bmatrix} c(1+v^2(2+3c))C & s(1+v^2(1+3c))S \\ -s(1+v^2(1+3c))S & (1+v^2(c^2-2s^2))C \end{bmatrix} \\ & - 2i\lambda v^2 \begin{bmatrix} 2s(1+c)S & (s^2-c(1+c))C \\ (c(1+c)-s^2)C & 2scS \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

$$\Xi_2^{(v)} = 4v^2(1+v^2c) \begin{bmatrix} (1+c)^2C & s(1+c)S \\ -s(1+c)S & -s^2C \end{bmatrix}, \quad (\text{D.10})$$

де  $s \equiv \sin \varphi$ ,  $c \equiv \cos \varphi$ ,  $S \equiv \sin(\lambda\varphi)$ ,  $C \equiv \cos(\lambda\varphi)$ .

Для скалярної утримної взаємодії функція  $f_\Omega^{(s)}(\phi)$  означена в (3.3.18), а матриці у п.ч. р-нь (D.3) і (D.4) мають вигляд:

$$\mathcal{K}_0^{(s)} = \begin{bmatrix} \Gamma^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + -i\lambda(\Gamma^2 + 1) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.11})$$

$$\mathcal{K}_1^{(s)} = 2 \begin{bmatrix} 1-v^2(3+2c) & 0 \\ 0 & 1-v^2 \end{bmatrix} - 2i\lambda v^2(1+c) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.12})$$

$$\mathcal{K}_2^{(s)} = -4v^2(1-v^2) \begin{bmatrix} (1+c)^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.13})$$

$$\Xi_0^{(s)} = \Gamma^2 v^2 C \begin{bmatrix} 1 & -i\lambda \\ i\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.14})$$

$$\Xi_1^{(s)} = -2 \begin{bmatrix} (c(1-3v^2)-2v^2)C & i(1-2v^2)sS \\ -i(1-2v^2)sS & (1-v^2)cC \end{bmatrix} - 2i\lambda v^2 \begin{bmatrix} 0 & (1+c)C \\ -(1+c)C & -2sS \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

$$\Xi_2^{(s)} = 4v^2(1-v^2) \begin{bmatrix} (1+c)^2C & s(1+c)S \\ -s(1+c)S & -s^2C \end{bmatrix}. \quad (\text{D.16})$$

Для скалярно-векторної суперпозиції безрозмірна динамічна матриця:

$$\bar{\mathcal{D}}^{(\xi)} = (1-\xi)\bar{\mathcal{D}}^{(s)} + \xi\bar{\mathcal{D}}^{(v)}, \quad (\text{D.17})$$

де  $\xi$  – параметр змішування. Тоді відносну частоту  $\lambda$  можна знайти чисельно як додатній корінь зведеного секулярного рівняння  $\det \bar{\mathcal{D}}(\lambda) = 0$ ; рис. D.1.

Зауважимо, що  $\lim_{v \rightarrow 0} \omega_r/\Omega = \sqrt{3}$ , як і повинно бути для нерелятивістичної задачі з лінійним потенціалом  $U = ar$  [22].

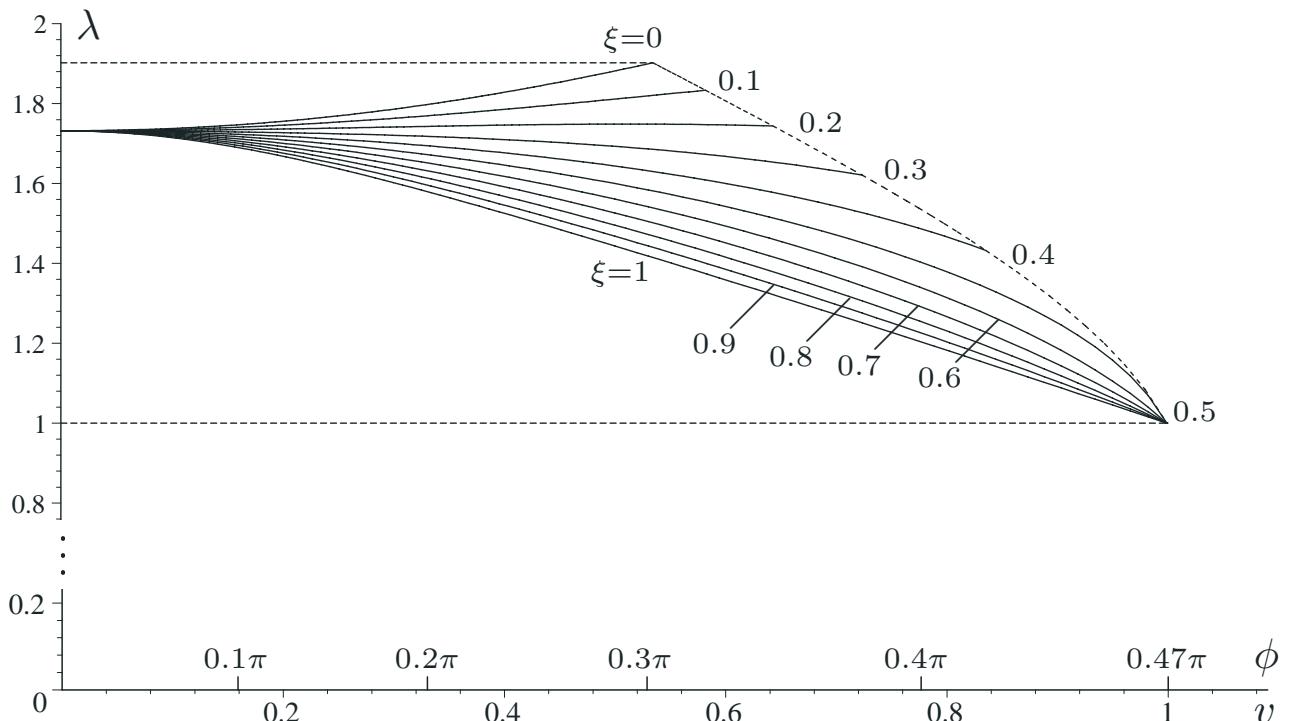


Рис. D.1. Відносна частота  $\lambda = \omega_r/\Omega$  як функція кута  $\phi$  і швидкості  $v$  колового руху частинок для різних значень параметра змішування  $\xi$ .

## Е. Д о в е д е н н я твердження 4.2

Домножимо л.ч. р-нь (4.1.9), (4.1.11) на  $S_a^{-1} \equiv S_a^T \equiv S^T(t_a)$  і виразимо їх в термінах неінерційних хмінних. Отримаємо рівності:

$$\tilde{X}_{ai}^T \tilde{L}_a = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_a^i} + \varepsilon_{ik}^l \Omega^k \frac{\partial}{\partial \dot{y}_a^l} \right\} \tilde{L}_a = 0, \quad (\text{E.1})$$

$$\tilde{X}_{ai}^R \tilde{L}_a = \varepsilon_{ik}^l \left\{ y_a^k \frac{\partial}{\partial y_a^l} + \dot{y}_a^k \frac{\partial}{\partial \dot{y}_a^l} + \Omega^k \varepsilon_{lm}^n y_a^m \frac{\partial}{\partial \dot{y}_a^n} \right\} \tilde{L}_a = 0, \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{ai}^T \tilde{\Phi}(\vartheta) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y_a^i} + \varepsilon_{ik}^l \Omega^k \frac{\partial}{\partial \dot{y}_a^l} \right\} \tilde{\Phi}(\vartheta) \\ &+ [S^{(-1)^a}(\vartheta)]_i^j \left\{ \frac{\partial}{\partial y_a^j} + \varepsilon_{jk}^l \Omega^k \frac{\partial}{\partial \dot{y}_a^l} \right\} \tilde{\Phi}(\vartheta) = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{ai}^R \tilde{\Phi}(\vartheta) &= \varepsilon_{ik}^l \left\{ y_a^k \frac{\partial}{\partial y_a^l} + \dot{y}_a^k \frac{\partial}{\partial \dot{y}_a^l} + \Omega^k \varepsilon_{lm}^n y_a^m \frac{\partial}{\partial \dot{y}_a^n} \right\} \tilde{\Phi}(\vartheta) + [S^{(-1)^a}(\vartheta)]_i^j \times \\ &\times \varepsilon_{jk}^l \left\{ y_{\bar{a}}^k \frac{\partial}{\partial y_{\bar{a}}^l} + \dot{y}_{\bar{a}}^k \frac{\partial}{\partial \dot{y}_{\bar{a}}^l} + \Omega^k \varepsilon_{lm}^n y_{\bar{a}}^m \frac{\partial}{\partial \dot{y}_{\bar{a}}^n} \right\} \tilde{\Phi}(\vartheta) = 0; \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

тут аргументи  $\mathbf{y}_a$ ,  $\dot{\mathbf{y}}_a$  ф-й  $\tilde{L}_a$  та  $\tilde{\Phi}$  упущені для простоти позначень.

Умови симетрії (E.1)–(E.2) 1-фоккеріанів мають корисні наслідки:

$$\left[ \tilde{X}_{ai}^\alpha \tilde{L}_a \right]^{(0)} = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial y_a^j} \tilde{X}_{ai}^\alpha \tilde{L}_a \right]^{(0)} = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{y}_a^j} \tilde{X}_{ai}^\alpha \tilde{L}_a \right]^{(0)} = 0,$$

де  $\alpha = T, R$  позначають просторові трансляції та повороти, а позначка " $(0)$ " означає "вздовж колової орбіти", тобто з врахуванням умов  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{y}_2 = \mathbf{R}_2$ ,  $\dot{\mathbf{y}}_a = 0$ . Ці рівності пов'язують величини  $L_{ai}$ ,  $L_{aij}$  і т.д. між собою:

$$L_{ai} + \varepsilon_{ik}^l \Omega^k L_{al\hat{a}} = 0, \quad (\text{E.5})$$

$$L_{aij} + \varepsilon_{ik}^l \Omega^k L_{al\hat{j}} = 0, \quad (\text{E.6})$$

$$L_{aij} + \varepsilon_{ik}^l \Omega^k L_{al\hat{j}} = 0, \quad (\text{E.7})$$

$$\varepsilon_{ik}^l \{ y_a^k L_{al} + \Omega^k \varepsilon_{lm}^n y_a^m L_{a\hat{n}} \} = 0, \quad (\text{E.8})$$

$$\varepsilon_{ik}^l \{ y_a^k L_{alj} + \Omega^k \varepsilon_{lm}^n y_a^m L_{a\hat{n}j} \} + \varepsilon_{ij}^l L_{al} + \varepsilon_{ik}^l \varepsilon_{lj}^n \Omega^k L_{a\hat{n}} = 0, \quad (\text{E.9})$$

$$\varepsilon_{ik}^l \{ y_a^k L_{al\hat{j}} + \Omega^k \varepsilon_{lm}^n y_a^m L_{a\hat{n}\hat{j}} \} + \varepsilon_{ij}^l L_{al\hat{l}} = 0. \quad (\text{E.10})$$

Для 2-фоккеріану важливими є такі наслідки умов (E.3), (E.4):

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta \left[ \tilde{X}_{ai}^{\alpha} \tilde{\Phi}(\vartheta) \right]^{(0)} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta \left[ \frac{\partial}{\partial y_a^j} \tilde{X}_{ai}^{\alpha} \tilde{\Phi}(\vartheta) \right]^{(0)} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{y}_a^j} \tilde{X}_{ai}^{\alpha} \tilde{\Phi}(\vartheta) \right]^{(0)} = 0.$$

Вони пов'язують величини  $\Lambda_{ai} = \check{\Phi}_{ai}(0)$ ,  $\Lambda_{aij} = \check{\Phi}_{aij}(0)$ , ... та  $\check{\Phi}_{ai\bar{a}j}(\pm\Omega)$  і т.д.

Запишемо явний вигляд матриці  $S(\vartheta)$ :

$$S_i{}^j(\vartheta) = \cos(\Omega\vartheta)\delta_i^j + \{1 - \cos(\Omega\vartheta)\}n_i n^j - \sin(\Omega\vartheta)n^k \varepsilon_{ki}{}^j,$$

врахуємо рівність  $S^{-1}(\vartheta) = S^T(\vartheta) = S(-\vartheta)$  і парність фур'є-образу  $\check{\Phi}(\omega)$  фоккеріану  $\tilde{\Phi}(\vartheta)$  та його похідних  $\check{\Phi}_{ai}(\omega)$  і т.д. як ф-й від  $\omega$ . Отримаємо рівності:

$$\begin{aligned} & \Lambda_{ai} + \varepsilon_{ik}{}^l \Omega^k \Lambda_{al} + n_i n^m \{ \Lambda_{\bar{a}n} + \varepsilon_{nk}{}^l \Omega^k \Lambda_{\bar{a}l} \} \\ & + \text{Pr}_i^n \{ \check{\Phi}_{\bar{a}n}(\Omega) + \varepsilon_{nk}{}^l \Omega^k \check{\Phi}_{\bar{a}l}(\Omega) \} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{aij} + \varepsilon_{ik}{}^l \Omega^k \Lambda_{alj} + n_i n^n \{ \Lambda_{\bar{a}n}{}_{aj} + \varepsilon_{nk}{}^l \Omega^k \Lambda_{\bar{a}l}{}_{aj} \} \\ & + \text{Pr}_i^n \{ \check{\Phi}_{\bar{a}n}{}_{aj}(\Omega) + \varepsilon_{nk}{}^l \Omega^k \check{\Phi}_{\bar{a}l}{}_{aj}(\Omega) \} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{ai\hat{j}} + \varepsilon_{ik}{}^l \Omega^k \Lambda_{al\hat{j}} + n_i n^n \{ \Lambda_{\bar{a}n}{}_{a\hat{j}} + \varepsilon_{nk}{}^l \Omega^k \Lambda_{\bar{a}l}{}_{a\hat{j}} \} \\ & + \text{Pr}_i^n \{ \check{\Phi}_{\bar{a}n}{}_{a\hat{j}}(\Omega) + \varepsilon_{nk}{}^l \Omega^k \check{\Phi}_{\bar{a}l}{}_{a\hat{j}}(\Omega) \} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{ik}{}^l \{ z_a^k \Lambda_{al} + \Omega^k \varepsilon_{lm}{}^n z_a^m \Lambda_{a\hat{n}} \} + n_i n^q \varepsilon_{qk}{}^l \{ z_a^k \Lambda_{\bar{a}l} + \Omega^k \varepsilon_{lm}{}^n z_a^m \Lambda_{\bar{a}\hat{n}} \} \\ & + \text{Pr}_i^q \varepsilon_{qk}{}^l \{ z_a^k \check{\Phi}_{\bar{a}l}(\Omega) + \Omega^k \varepsilon_{lm}{}^n z_a^m \check{\Phi}_{\bar{a}\hat{n}}(\Omega) \} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{ik}{}^l \{ z_a^k \Lambda_{alj} + \Omega^k \varepsilon_{lm}{}^n z_a^m \Lambda_{a\hat{n}j} \} + n_i n^q \varepsilon_{qk}{}^l \{ z_a^k \Lambda_{\bar{a}l}{}_{aj} + \Omega^k \varepsilon_{lm}{}^n z_a^m \Lambda_{\bar{a}\hat{n}}{}_{aj} \} \\ & + \text{Pr}_i^q \varepsilon_{qk}{}^l \{ z_a^k \check{\Phi}_{\bar{a}l}{}_{aj}(\Omega) + \Omega^k \varepsilon_{lm}{}^n z_a^m \check{\Phi}_{\bar{a}\hat{n}}{}_{aj}(\Omega) \} \\ & + \varepsilon_{ij}{}^l \Lambda_{al} + \varepsilon_{ik}{}^l \varepsilon_{lj}{}^n \Omega^k \Lambda_{a\hat{n}} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{ik}{}^l \{ z_a^k \Lambda_{al\hat{j}} + \Omega^k \varepsilon_{lm}{}^n z_a^m \Lambda_{a\hat{n}\hat{j}} \} + n_i n^q \varepsilon_{qk}{}^l \{ z_a^k \Lambda_{\bar{a}l}{}_{a\hat{j}} + \Omega^k \varepsilon_{lm}{}^n z_a^m \Lambda_{\bar{a}\hat{n}}{}_{a\hat{j}} \} \\ & + \text{Pr}_i^q \varepsilon_{qk}{}^l \{ z_a^k \check{\Phi}_{\bar{a}l}{}_{a\hat{j}}(\Omega) + \Omega^k \varepsilon_{lm}{}^n z_a^m \check{\Phi}_{\bar{a}\hat{n}}{}_{a\hat{j}}(\Omega) \} + \varepsilon_{ij}{}^l \Lambda_{al\hat{l}} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

де  $\text{Pr}_i^k \equiv \delta_i^k - n_i n^k$ . Разом з (E.5)-(E.10) та р-нями руху  $\mathcal{L}_{ai} = 0$  вони приводять до таких співвідношень для елементів динамічної матриці  $D(0)$  та  $D(\Omega)$ :

$$\mathcal{L}_{ai3} + \Lambda_{ai\bar{a}3} = 0, \quad (\text{E.17})$$

$$R_a \mathcal{L}_{ai2} - R_{\bar{a}} \Lambda_{ai\bar{a}2} = 0, \quad (\text{E.18})$$

$$R_a(\mathcal{L}_{ai3} + \Omega^2 \mathcal{L}_{a\hat{3}}) - R_{\bar{a}}(\check{\Phi}_{ai\bar{a}3}(\Omega) + \Omega^2 \check{\Phi}_{a\hat{i}\bar{a}\hat{3}}(\Omega)) = 0, \quad (\text{E.19})$$

$$R_a \mathcal{L}_{a[i\hat{3}]} - R_{\bar{a}} \check{\Phi}_{[ai\bar{a}\hat{3}]}(\Omega) = 0, \quad a = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{E.20})$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{aij} - \Omega \varepsilon_{3j}^k \mathcal{L}_{a[i\hat{k}]} + \Omega^2 \mathcal{L}_{a\hat{i}\hat{j}} + \check{\Phi}_{ai\bar{a}j}(\Omega) \\ & - \Omega \varepsilon_{3j}^k \check{\Phi}_{[ai\bar{a}\hat{k}]}(\Omega) + \Omega^2 \check{\Phi}_{a\hat{i}\bar{a}\hat{j}}(\Omega) = 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Співвідношення (E.17) забезпечують існування власних частот і векторів (4.1.51), співвідношення (E.18) – відповідно (4.1.48), співвідношення (E.19)-(E.20) – відповідно (4.1.49), а співвідношення (E.21) – відповідно (4.1.50).  $\square$

## F. Динаміка часо-нелокального осцилятора

Динаміка двочастинкової нелокальної осциляторної моделі (4.1.5) описується такими рівняннями руху:

$$m_a \ddot{\mathbf{z}}_a(t_a) = - \int_{-\infty}^{\infty} dt_{\bar{a}} \kappa(t_{12}) [\mathbf{z}_a(t_a) - \mathbf{z}_{\bar{a}}(t_{\bar{a}})], \quad t_{12} = t_1 - t_2; \quad \begin{cases} a = 1, 2; \\ \bar{a} = 3 - a. \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

Галілей-інваріантність системи веде до таких інтегралів руху:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^2 \left\{ m_a \dot{\mathbf{z}}_a^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dt_a \kappa(t_{12}) [\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2]^2 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \iint dt_1 dt_2 \dot{\kappa}(t_{12}) [\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2]^2, \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^2 m_a \dot{\mathbf{z}}_a + \iint dt_1 dt_2 \kappa(t_{12}) [\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2], \quad (\text{F.3})$$

$$\mathbf{J} = \sum_{a=1}^2 m_a \mathbf{z}_a \times \dot{\mathbf{z}}_a - \iint dt_1 dt_2 \kappa(t_{12}) \mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2. \quad (\text{F.4})$$

$$\mathbf{K} = \sum_{a=1}^2 m_a (\mathbf{z}_a - t_a \dot{\mathbf{z}}_a) + \iint dt_1 dt_2 \kappa(t_{12}) [t_1 \mathbf{z}_2 - t_2 \mathbf{z}_1]. \quad (\text{F.5})$$

Останній – інтеграл руху центра мас  $\mathbf{K}$  – відповідає перетворенням Галілея  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - t\boldsymbol{\lambda}$  ( $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^3$ ), які служать підказкою для розв'язку рівнянь (F.1):

$$\mathbf{z}_a(t_a) = \mathbf{z}_0 + t_a \mathbf{V}, \quad a = 1, 2. \quad (\text{F.6})$$

Інтеграли руху (F.2)-(F.5) набувають таких значень на розв'язкові (F.6):

$$E = \frac{1}{2}M_{\text{eff}} \mathbf{V}^2, \quad \mathbf{P} = M_{\text{eff}} \mathbf{V}, \quad \mathbf{J} = M_{\text{eff}} \mathbf{z}_0 \times \mathbf{V}, \quad \mathbf{K} = M_{\text{eff}} \mathbf{z}_0, \quad (\text{F.7})$$

де введена ефективна маса системи як цілого:

$$M_{\text{eff}} = \sum_{a=1}^2 m_a - \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \kappa(\theta) \theta^2. \quad (\text{F.8})$$

У локальному випадку  $\kappa(\theta) = k\delta(\theta)$  останній інтеграл в (F.8) занулюється, так що  $M_{\text{eff}} = m_1 + m_2$ . В іншому разі, якщо носій функції  $\kappa(\theta)$  достатньо протяжний, це може привести до  $M_{\text{eff}} < 0$ . У цьому разі повна енергія також від'ємна, повний імпульс протилежний до швидкості частинок, так що фізичні властивості системи неочікувано незвичні.

Оскільки рівняння руху (F.1) лінійні, будемо шукати фундаментальну систему розв'язків  $\mathbf{z}_a(t) = \mathbf{e}_a(\omega) e^{-i\omega t}$ . У вихідній інерційній системі відліку динамічна матриця є ізотропною:

$$D_{aibj}(\omega) = \mathcal{D}_{ab}(\omega) \delta_{ij}, \quad \mathcal{D}_{ab} = [m_a \omega^2 - \varkappa(0)] \delta_{ab} + \varkappa(\omega) \delta_{\bar{a}\bar{b}}, \quad (\text{F.9})$$

де  $\varkappa(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \kappa(t) e^{i\omega t}$ .

Тому кожна мода є тричі вироджена, а частоти задовольняють секулярне р-ня:

$$|\mathcal{D}(\omega)| \equiv \det \|\mathcal{D}_{ab}(\omega)\| = [m_1 \omega^2 - \varkappa(0)][m_2 \omega^2 - \varkappa(0)] - \varkappa^2(\omega) = 0. \quad (\text{F.10})$$

Подальший аналіз системи здійснюється згідно з підрозділом 4.2.

Якщо  $\text{Im } \omega = 0$ , частковий розв'язок р-ня (F.1), що відповідає даній моді, тобто кореню  $\omega$  р-ня (F.10), є:

$$\mathbf{z}_a(t) = \mathbf{e}_a(\omega) \left\{ \mathbf{A} e^{-i\omega t} + \mathbf{A}^* e^{i\omega t} \right\}, \quad (\text{F.11})$$

де  $\mathbf{A} = (A_i, i = 1, 2, 3)$  є комплексні канонічні амплітуди,  $\{A_i, A_j^*\} = -i\delta_{ij}$ , а  $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$  є нормованим дійсним власним вектором матриці  $\|\mathcal{D}_{ab}(\omega)\|$ .

Інтеграли руху на розв'язку (F.11) є такі:

$$E = \eta \omega |\mathbf{A}|^2, \quad \mathbf{J} = i\eta \mathbf{A} \times \mathbf{A}^*, \quad \mathbf{P} = \mathbf{K} = 0, \quad (\text{F.12})$$

$$\text{де } \eta = \operatorname{sgn} \Delta (\pm 1), \quad \Delta = \sum_{ab} e_a(\omega) [\mathrm{d} \mathcal{D}_{ab}(\omega)/\mathrm{d}\omega] e_b(\omega). \quad (\text{F.13})$$

Після квантування отримаємо осциляторо-подібний спектр енергії:

$$E = \eta \omega \{n_1 + n_2 + n_3 + 3/2\}, \quad n_i = 0, 1, \dots; \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{F.14})$$

Він обмежений знизу за умови  $\eta = 1$ ; інакше система не має скінченного вакууму, і тому нестійка.

Комплексну амплітуду  $\mathbf{A}$  можна розчепити на два дійсні вектори, які визначають площину руху (F.11). Згідно з обертовою симетрією можна покласти  $A_3 = 0$  і ввести кругові амплітуди:  $A_{\pm} = (A_1 \pm i A_2)/\sqrt{2}$ . У цих термінах:

$$E = \eta \omega \{|A_+|^2 + |A_-|^2\}, \quad J_{1,2} = 0, \quad J \equiv |\mathbf{J}| = |J_3| = \sqrt{|A_+|^2 - |A_-|^2}. \quad (\text{F.15})$$

Утотожнення  $A_r \equiv A_-$ , якщо  $|A_+| > |A_-|$ , або  $A_r \equiv A_+$  в іншому разі, дає радіальну форму (4.3.4) для енергії (F.12), (F.14):

$$E = \eta \omega \{J + 2|A_r|^2\} \rightarrow E = \eta \omega \{\ell + 2n_r + 3/2\}, \quad \begin{array}{l} \ell = 0, 1, \dots; \\ n_r = 0, 1, \dots \end{array} \quad (\text{F.16})$$

Секулярне р-ня (F.10) має очевидний корінь  $\omega_0 = 0$ , що відповідає розв'язку (F.6), а не (F.11). Якщо р-ня (F.10) допускає комплексні корені, то маємо розв'язок виду (4.2.5) або (4.2.23) (якщо  $\operatorname{Re} \omega = 0$ ), але така мода нестійка, а її внесок в енергію – необмежений:  $E \in \mathbb{R}$ .

Щоб краще зрозуміти особливості нелокальної осциляторної моделі, конкретизуємо функцію жорсткості  $\kappa(t)$  у 2-фоккеріані (4.1.5). Розглянемо три  $\tau$ -параметричні послідовності виду:

$$\kappa(t) = k f_{\tau}(t), \quad k > 0, \quad f_{\tau}(t) \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} \delta(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt f_{\tau}(t) = 1. \quad (\text{F.17})$$

Обмежимося випадком рівних мас  $m_1 = m_2 \equiv m$ , так що секулярне р-ня розпадається на два рівняння:

$$m\omega^2 - k \pm kg_{\tau}(\omega) = 0, \quad \text{де } g_{\tau}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt f_{\tau}(t) e^{i\omega t}. \quad (\text{F.18})$$

Згідно з (F.17) осцилятор зводиться до локального у границі  $\tau \rightarrow 0$ .

$$\text{Приклад 1).} \quad f_{\tau}(t) = \frac{1}{2\tau} e^{-|t|/\tau}, \quad g_{\tau}(\omega) = \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2}. \quad (\text{F.19})$$

Крім  $\omega_0 = 0$  секулярне р-ня (F.18) має три корені:

$$\bar{\omega}_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\{\bar{\tau}^2 - 1 \pm \sqrt{(\bar{\tau}^2 - 1)^2 + 8\bar{\tau}^2}\}/\bar{\tau}^2 \gtrless 0, \quad \bar{\omega}_3^2 = 1 - 1/\bar{\tau}^2, \quad (\text{F.20})$$

де  $\bar{\tau} \equiv \tau\sqrt{k/m}$ ,  $\bar{\omega} = \omega\sqrt{m/k}$ .

Лише 1-ша мода є *регулярною*, тобто вона має локальну границю:  $\omega_1^2 \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{} \frac{2k}{m}$  і  $\omega_1^2 \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{} \frac{k}{m}$ . Частоти  $\omega_{2,3}$  є уявними і *сингулярними* при  $\tau \rightarrow 0$ :  $\omega_{2,3}^2 \sim -1/\tau^2$ . В області  $\bar{\tau} > 1$  частота  $\omega_3$  стає дійсною, але її внесок в енергію  $E_3 < 0$ , і  $M_{\text{eff}} = 2(m - k\tau^2) < 0$ . Тому фізичне значення цієї *особливої* моди є сумнівним.

Приклад 2).  $f_\tau(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau} e^{-\frac{t^2}{4\tau^2}}$ ,  $g_\tau(\omega) = e^{-\tau^2\omega^2}$ . (F.21)

Секулярне рівняння  $\bar{\omega}^2 = 1 + W(\pm\bar{\tau}^2 \exp(-\bar{\tau}^2))/\bar{\tau}^2$  можна розв'язати аналітично, в термінах W-функції Ламберта [415], неявно означенеї трансцендентним рівнянням  $W e^W = z$ . Як ф-я комплексної змінної,  $W(z)$  є  $\infty$ -значною, подібно до  $\log z$ . Лише одне значення розв'язку  $\omega^2$  є дійсним та регулярним; його поведінка подібна до поведінки  $\omega_1^2$  прикладу (F.19). Інші значення є комплексними та сингулярними: їх поведінка при  $\bar{\tau} \rightarrow 0$  і  $\bar{\tau} \rightarrow \infty$  є такою:

$$\bar{\omega}^2 \sim (2\ln\bar{\tau} - \ln|2\ln\bar{\tau}| + i n\pi)/\bar{\tau}^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{F.22})$$

Серед них гілка, що відповідає  $n = 0$ , є аналогічною до  $\bar{\omega}_3$  прикладу (F.19):  $\bar{\omega}^2 \sim 1 - 1/\bar{\tau}^2$  при  $\bar{\tau} \rightarrow 1$ , так що вона є цілком уявною при  $\bar{\tau} < 1$  і дійсною при  $\bar{\tau} > 1$ , але породжує патології  $E < 0$ ,  $M_{\text{eff}} = 2(m - k\tau^2) < 0$ .

Приклад 3).  $f_\tau(t) = \tau\delta(t^2 - \tau^2)$ ,  $g_\tau(\omega) = \cos\tau\omega$ . (F.23)

Цей приклад імітує причинні властивості електромагнетної взаємодії Тетроде-Фоккера (4.1.4). Одновимірний прототип цієї моделі розглядався в роботі [381]. Секулярні рівняння (F.18) можна спростити до вигляду:

$$\tilde{\omega} = \pm\tilde{\tau}\cos\tilde{\tau}\tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega} = \pm\tilde{\tau}\sin\tilde{\tau}\tilde{\omega}, \quad (\text{F.24})$$

де  $\tilde{\tau} \equiv \bar{\tau}/\sqrt{2} = \tau\sqrt{\frac{1}{2}k/m}$ ,  $\tilde{\omega} \equiv \bar{\omega}/\sqrt{2} = \omega\sqrt{\frac{1}{2}m/k}$ .

Окрім регулярного розв'язку з якісною поведінкою як у попередніх прикладах, рівняння (F.24) допускають нескінченну послідовність додаткових дійсних пар (додатнього та від'ємного) коренів. Перший з'являється при  $\tilde{\tau} > 1$ , він аналогічний до  $\pm\omega_3$  в р-ні (F.20); інші з'являються при зростанні  $\tilde{\tau}$ , так що їх сумарну кількість можна оцінити при великому  $\tilde{\tau}$  як  $N \sim 4\tilde{\tau}/\pi$ . Усі додаткові дійсні корені є особливими, принаймні у тому, що  $M_{\text{eff}} = 2m - k\tau^2 < 0$ . Окрім цього, існує  $\infty$ -на послідовність комплексних частот типу (F.22), що є сингулярними при  $\bar{\tau} \rightarrow 0$ ; див. також [381].

У підсумку усі подані приклади виявляють 4 типи мод (розв'язків):

- 0) одна (але тричі вироджена) нульова мода  $\omega_0 = 0$ , що описує рух за інерцією (F.6); вона існує для всіх  $\tau \geq 0$ , але при  $\tau > \tau_0$  (для деякого скінченного  $\tau_0 > 0$ ) стає особливою у тому, що  $M_{\text{eff}} < 0$ ;
- 1) одна (тричі вироджена) дійсна мода, що описує рух (F.11); вона є регулярною у локальній границі  $\tau \rightarrow 0$  та існує для усіх  $\tau \geq 0$ ;
- 2) скінчена або нескінчена послідовність уявних або комплексних мод, сингулярних при  $\tau \rightarrow 0$ ; при деяких скінченних  $\tau_0 > 0$  вони переходят в особливі моди 3-го типу;
- 3) скінчена або нескінчена послідовність додаткових дійсних мод, що не існують при  $0 \leq \tau < \tau_0$ , але з'являються при зростанні  $\tau$ ; вони особливі у тому, що  $M_{\text{eff}} < 0$  і, можливо,  $E < 0$ .

## G. Апробація результатів дисертації

Результати дисертації доповідались і опубліковані в матеріалах таких конференцій, нарад та семінарів: Науковий семінар “Проблеми релятивістичної квантової механіки системи частинок”, присвячений 90-річчю з дня народження професора Зенона Храпливого (Україна, Львів, 19 квітня 1994; доповідач) [141], X Міжнародна конференція “Адрони–94” (Україна, Ужгород, 7–11 серпня 1994; доповідач) [25], Міжнародна конференція “Симетрія в нелінійній математичній фізиці” (Україна, Київ, 3–8 липня 1995; доповідач) [2], III Міжнародна конференція “Симетрія в нелінійній математичній фізиці” (Україна, Київ, 12–18 липня 1999; доповідач) [26], XXXII Симпозіум з математичної фізики; спец. сесія: “Симетрії в нелінійних системах” (Польща, Торунь, 6–10 червня 2000; співавтор) [8], “Різдвяні дискусії 2001” на кафедрі теоретичної фізики ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 3–4 січня 2001; доповідач) [27], XVIII Європейська конференція з проблем кількох частинок у фізиці (Словенія, Блед, 8–14 вересня 2002; доповідач) [28–31], “Різдвяні дискусії 2003” на кафедрі теоретичної фізики ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 3–4 січня 2003; доповідач) [149], XVII Міжнародна конференція з проблем кількох частинок у фізиці (США, Північна Кароліна, Дюрам, 5–10 червня 2003; доповідач) [32–34] Наукова конференція “Сучасні проблеми квантової теорії” присвячена 100-річчю від дня народження Зіновія Храпливого (Україна, Тернопіль, 15–16 березня 2004; доповідач) [35], VI Міжнародна конференція “Симетрія в нелінійній математичній фізиці” (Україна, Київ, 20–26 червня 2005; доповідач) [13], “Різдвяні дискусії 2006” на кафедрі теоретичної фізики ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 4–5 січня 2006; доповідач) [36], II Міжнародна конференція з квантової електродинаміки та статистичної фізики (Україна, Харків, 19–23 вересня 2006; доповідач) [37], VII Міжнародна конференція “Симетрія в нелінійній математичній фізиці” (Україна, Київ, 24–30 червня 2007; доповідач) [15], “Різдвяні дискусії 2008” на кафедрі теоретичної фізики ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 4–5 січня 2008; доповідач) [38], Меморіальні читання на пошану Романа Пантелеїмоновича Гайди. ІФКС НАН України та Наукове товариство ім. Шевченка (Україна,

Львів, 9–10 жовтня 2008; організатор і доповідач) [16], Всеукраїнський семінар з теоретичної та математичної фізики. До 80-річчя професора А.В.Свідзинського (Україна, Луцьк, 27 лютого - 01 березня 2009; доповідач) [39], 5-та міжнародна конференція РНАОПМ – 2010 (Україна, Луцьк, Шацькі озера, 1–5 червня 2010; доповідач) [41], X Всеукраїнська школа-семінар і конкурс молодих вчених у галузі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Україна, Львів, 3–4 червня 2010; співавтор) [40], 3<sup>rd</sup> Workshop on Current Problems in Physics (Ukraine, Lviv, July 5–9, 2010; доповідач) [42], 21<sup>th</sup> European Conference on Few-Body Problems in Physics (Spain, Salamanca, August 29 – September 3, 2010; співавтор) [19], III Міжнародна конференція з квантової електродинаміки та статистичної фізики (Україна, Харків, 29 серпня – 2 вересня 2011; співавтор) [43], Наукова конференція “Нові напрямки у фізиці та астрофізиці” присвячена 65-річчю проф. І.О. Вакарчука. ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 15–16 березня 2012; доповідач) [44], Конференція фізичної комісії НТШ “50 років концепції тахіонів” (Україна, Львів, 20 березня 2012; співавтор) [47], Всеукраїнська наукова конференція “Актуальні проблеми теоретичної, експериментальної та прикладної фізики” (Україна, Тернопіль, 20–11 вересня 2012; доповідач) [45], “Різдвяні дискусії 2013” на кафедрі теоретичної фізики ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 3–4 січня 2013; доповідач) [46], 6<sup>th</sup> Workshop on Current Problems in Physics (Poland Zielona Góra, September 23-25, 2013; доповідач) [166], 7<sup>th</sup> Workshop on Current Problems in Physics (Ukraine, Lviv, July 8-9, 2014; доповідач) [48], “Різдвяні дискусії 2015” присвячені 110-річчю від дня народження професора В. С. Мілянчука” на кафедрі теоретичної фізики ЛНУ ім. І. Франка (Україна, Львів, 12-13 січня 2015; доповідач) [49], 8<sup>th</sup> Workshop on Current Problems in Physics (Poland Zielona Góra, October 19-22 2015; доповідач) [50], Звітна конференція за проектами конкурсу Ф64 при Державному фонду фундаментальних досліджень (Україна, Київ, 26 січня 2016; доповідач).

Окремі результати неодноразово доповідалися на семінарах Інституту фізики конденсованих систем НАН України, відділу теорії релятивістичних систем та відділу комп'ютерного моделювання багаточастинкових систем цього інституту, а також на інших наукових зустрічах.

## H. Список публікацій здобувача

1. Duviryak A. A., Tretyak V. I. Classical relativistic two-body dynamics on the light cone // *Condens. Matter Phys.*. 1993. № 1. P. 92–107.
2. Duviryak A. Symmetries of the relativistic two-particle model with scalar-vector interaction // *J. Nonlinear Math. Phys.*. 1996. Vol. 3, no. 3-4. P. 372–378.
3. Duviryak A. The time-asymmetric Fokker-type integrals and the relativistic Hamiltonian mechanics on the light cone // *Acta Phys. Pol. B*. 1997. Vol. 28, no. 5. P. 1087–1109.
4. Duviryak A. The two-body time-asymmetric relativistic models with field-type interaction // *Gen. Relat. Gravit.* 1998. Vol. 30, no. 8. P. 1147–1169.
5. Duviryak A., Shpytko V., Tretyak V. Isotropic forms of dynamics in the relativistic direct interaction theory // *Condens. Matter Phys.*. 1998. Vol. 1, no. 3(15). P. 463–512.
6. Duviryak A. Fokker-type confinement models from effective Lagrangian in classical Yang-Mills theory // *Int. J. Mod. Phys. A*. 1999. Vol. 14, no. 28. P. 4519–4547.
7. Duviryak A. The two-particle time-asymmetric relativistic model with confinement interaction and quantization // *Int. J. Mod. Phys. A*. 2001. Vol. 16, no. 16. P. 2771–2788.
8. Duviryak A., Shpytko V. Relativistic two-particle mass spectra for time-asymmetric Fokker action // *Rep. Math. Phys.*. 2001. Vol. 48, no. 1-2. P. 219–226.
9. Duviryak A., Darewych J. W. Exact few-particle eigenstates in partially reduced QED // *Phys. Rev. A*. 2002. Vol. 66, no. 3. 032102. – 20 p.
10. Duviryak A. Heuristic models of two-fermion relativistic systems with field-type interaction // *J. Phys. G*. 2002. Vol. 28, no. 11. P. 2795–2809.
11. Duviryak A., Darewych J. W. Variational Hamiltonian treatment of partially reduced Yukawa-like models // *J. Phys. A*. 2004. Vol. 37, no. 34. P. 8365–8381.
12. Duviryak A., Darewych J. W. Variational wave equations of two fermions interacting via scalar, pseudoscalar, vector, pseudovector and tensor fields // *Cent. Eur. J. Phys.*. 2005. Vol. 3, no. 4. P. 467–483.
13. Duviryak A. Large-j expansion method for two-body Dirac equation // *Symmetry Integr. Geom.*. 2006. Vol. 2. 029. – 12 p.
14. Дувіряк А. Застосування двочастинкового рівняння Дірака у спектроскопії мезонів // Журн. фіз. дослідів. 2006. Т. 10, № 4. С. 290–314.
15. Duviryak A. Solvable two-body Dirac equation as a potential model of light mesons // *Symmetry Integr. Geom.*. 2008. Vol. 4. 048. – 19 p.
16. Дувіряк А. Потенціальна модель мезонів у формалізмі інтегралів дії типу Фоккера // *Фіз. зб. НТШ*. 2008. Т. 7. С. 533–541.
17. Darewych J. W., Duviryak A. Confinement interaction in nonlinear generalizations

- of the Wick-Cutkosky model // *J. Phys. A.* 2010. Vol. 43, no. 48. 485402. – 13 p.
18. *Duviryak A., Darewych J.* On confinement interactions in scalar generalizations of the dipole model // *J. Phys. Stud.* 2011. Vol. 15, no. 1. 1101. – 9 p.
  19. *Darewych J. W., Duviryak A.* Interparticle forces in QFTs with nonlinear mediating fields // *Few Body Syst.* 2011. Vol. 50, no. 1-4. P. 299–301.
  20. *Zagladko I., Duviryak A.* Partially reduced formulation of scalar Yukawa model: Poincaré-invariance and unitarity // *J. Phys. Stud.* 2012. Vol. 16, no. 3. 3101. – 10 p.
  21. *Darewych J. W., Duviryak A.* Analysis of inter-quark interactions in classical chromodynamics // *Cent. Eur. J. Phys.* 2013. Vol. 11, no. 3. P. 336–344.
  22. *Duviryak A.* Quantization of almost-circular orbits in the Fokker action formalism // *Eur. Phys. J. Plus.* 2014. Vol. 129, no. 12. 267. – 20 p.
  23. *Zagladko I., Duviryak A.* Bound states in the tachyon exchange potential // *Electron. J. Theor. Phys.* 2014. Vol. 11, no. 31. P. 141–148.
  24. *Duviryak A.* Regge trajectories in the framework of the relativistic action-at-a-distance theory // *J. Phys. Stud.* 2015. Vol. 19, no. 1/2. 1004. – 14 p.
  25. *Duviryak A., Shpytko V., Tretyak V.* Exactly solvable two-particle models in the isotropic forms of relativistic dynamics // Internat. Workshop “Hadrons-94”. Proc. Contributed papers / Ed. by G. Bugrij, L. Jenkovsky, E. Martynov. Uzhgorod, Ukraine, 7-11 September 1994. P. 353–362.
  26. *Duviryak A.* Classical mechanics of relativistic particle with colour // *Proc. Inst. of Math. NAS of Ukraine.* 2000. Vol. 30, Part 2. P. 473–480.
  27. Дувіряк А.А. Про точно розв'язувані релятивістські моделі двох частинок, пов'язані з класичною теорією поля // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 3-4 січня 2001. *Журн. фіз. дослідівс.* 2001. Т. 5, № 1. С. 103.
  28. *Duviryak A., Darewych J. W.* Variational wave equations for fermions interacting via scalar and vector fields // XVIII European Conference on Few-Body Problems in Physics. Book of Abstracts / Ed. by R. Krivec, B. Golli, M. Rosina, S. Širca. Bled, Slovenia, 8-14 September 2002. P. 103.
  29. *Duviryak A.* Heuristic models of two-fermion relativistic systems with field-type interaction // XVIII European Conference on Few-Body Problems in Physics. Book of Abstracts / Ed. by R. Krivec, B. Golli, M. Rosina, S. Širca. Bled, Slovenia, 8-14 September 2002. P. 207.
  30. *Duviryak A., Darewych J. W.* Variational wave equations for fermions interacting via scalar and vector fields // Few-Body Problems in Physics '02. Proceedings of the XVIII European Conference on Few-Body Problems in Physics / Ed. by R. Krivec, B. Golli, M. Rosina, S. Širca. Bled, Slovenia, 8-14 September 2002. *Few-Body Syst. Suppl.* 2002. V. 14. P. 217-218.
  31. *Duviryak A.* Heuristic model of two-quark relativistic system with scalar-vector

- interaction // Few-Body Problems in Physics '02. Proceedings of the XVIII European Conference on Few-Body Problems in Physics / Ed. by R. Krivec, B. Golli, M. Rosina, S. Širca. Bled, Slovenia, 8-14 September 2002. *Few-Body Syst. Suppl.* 2002. V. 14. P. 415-416.
32. Duviryak A. Heuristic wave equations for relativistic two-body systems // 17th Internat. IUPAP Conf. on Few-Body Problems in Physics. Book of Abstracts / Ed. by W. Glöckle, T. Pulis, W. Tornow. Durham, North Carolina, USA, 5-10 June 2003. P. 151–152.
  33. Duviryak A., Darewych J. W. Variational wave equations from partially reduced QFT // 17th Internat. IUPAP Conf. on Few-Body Problems in Physics. Book of Abstracts / Ed. by W. Glöckle, T. Pulis, W. Tornow. Durham, North Carolina, USA, 5-10 June 2003. P. 155.
  34. Duviryak A. Heuristic wave equations for relativistic two-body systems // Few-Body Problems in Physics: Proceedings of the Seventeenth International IUPAP Conference on Few-Body Problems in Physics (Few Body 17) / Ed. by W. Glöckle, W. Tornow. Durham, North Carolina, USA, 5-10 June 2003. P. S269–S271.
  35. Дувіряк А., Даревич Ю. Рівняння типу Брейта у формалізмі редукованої КТП // Тези доповідей наукової конференції “Сучасні проблеми квантової теорії” присвяченої 100-річчю від дня народження Зіновія Храпливого. Тернопіль, 15-16 березня 2004. С. 49–50.
  36. Дувіряк А. Метод 1/j-розкладів для 2-частинкового рівняння Дірака // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 4-5 січня 2006. *Журн. фіз. дослідж.* 2006. Т. 10, № 1. С. 75.
  37. Duviryak A. 2-body Dirac equation and light meson spectra // 2nd Internat. Conf. on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics. Kharkov, Ukraine, 19-23 September 2006. P. 64.
  38. Дувіряк А. Коваріантна форма рівняння Брайта та його узагальнень // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 4-5 січня 2008. *Журн. фіз. дослідж.* 2008. Т. 12, № 1. С. 1998-5.
  39. Дувіряк А.А. Двочастинкове рівняння Дірака: методи, моделі та застосування у спектроскопії мезонів // Всеукраїнський семінар з теоретичної та математичної фізики ТМФ'2009. До 80-річчя професора А.В.Свідзинського. Матеріали. Луцьк, 27 лютого - 01 березня 2009. С. 38–42.
  40. Загладько І.М., Дувіряк А.А. Пуанкаре-інваріантність моделей типу Юкави у формалізмі частково редукованої теорії поля // Збірка тез X Всеукраїнської школи-семінару і конкурсу молодих вчених у галузі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини / ІФКС НАН України. Львів, 3-4 червня 2010. С. 40.
  41. Даревич Ю., Дувіряк А. Про утримуючі взаємодії в нелінійній моделі Віка-

Куткоскі // Матеріали 5-ї Міжнар. конф. РНАОМ-2010. Луцьк, Шацькі озера, 1-5 червня 2010. С. 183–184.

42. *Duviryak A., Darewych J. W.* On the confinement interactions in partially reduced Yukawa-like models // 3<sup>rd</sup> Workshop on Current Problems in Physics. Abstracts. Lviv, Ukraine, 5-9 July 2010. *J. Phys. Stud.* 2010. V. 14, no. 3. P. 3998-1.
43. *Darewych J. W., Duviryak A., Zagladko I.* Canonical description and Poincaré-invariance of nonlocal Yukawa-like models // 3rd Internat. Conf. on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics. Book of Abstracts. Kharkov, Ukraine, 29 August – 2 September 2011. P. 39.
44. *Darewych J. W., Duviryak A.* Interquark interactions in a reformulated chromodynamics // Sci. Conf. “New Trends in Physics and Astrophysics” (dedicated to Prof. I. O. Vakarchuk on the occasion of his 65th birthday). Program and Abstracts. Lviv, 15-16 March 2012. P. 10.
45. Загладъко І.М., Дувіряк А.А. Модель типу Юкави в теорії прямих взаємодій: проблеми Пуанкаре-інваріантності та унітарності матриці розсіяння // Матеріали всеукраїнської наукової конференції “Актуальні проблеми теоретичної, експериментальної та прикладної фізики”. Тернопіль, 20-11 вересня 2012. С. 143–144.
46. Загладъко І.М., Дувіряк А.А. Розсіяння скалярних частинок з тахіонною взаємодією // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 3-4 січня 2013. *Журн. фіз. досліджен.* 2013. Т. 17, № 1. С. 1998-4.
47. Загладъко І., Дувіряк А. Взаємодія скалярних частинок через тахіонне поле // *Фіз. зб. НТШ.* 2014. Т. 9. С. 121–137.
48. *Duviryak A.* Almost-circular orbit method for quantization of the Fokker action integrals // 7<sup>th</sup> Workshop on Current Problems in Physics. Abstracts. Lviv, Ukraine, 8-9 July 2014. *J. Phys. Stud.* 2014. V. 18, no. 2/3. P. 2998-3.
49. Дувіряк А.А. Про нефізичні розв'язки релятивістських рівнянь руху // Різдвяні дискусії. Тези. Львів, 12-13 січня 2015. *Журн. фіз. досліджен.* 2015. Т. 19, № 1/2. С. 1998-2.
50. *Duviryak A.* Action-at-a-distance models for meson spectroscopy // 8<sup>th</sup> Workshop on Current Problems in Physics. Book of Abstracts. Zielona Góra, Poland, 19 – 22 October 2015. P. 7. <http://www.if.uz.zgora.pl/wcpp/wcpp15/abstracts.pdf>.