



ІНСТИТУТ  
ФІЗИКИ  
КОНДЕНСОВАНИХ  
СИСТЕМ

ICMP-00-11U

В.С. Янішевський\*

ФЕРОМАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ СПІНОВОЇ СІТКИ ДЛЯ  
УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ ІЗИНГА  $S = 1$

\*Дрогобицький педагогічний університет ім. І. Франка, 82100, Дрогобич,  
вул. І. Франка, 34

УДК: 548:537.611, 537.621, 539.124

PACS: 75.10.Nk

ФЕРОМАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ СПІНОВОЇ СІТКИ  
ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ ІЗИНГА  $S = 1$

В.С. Янішевський

**Анотація.** Продовжено вивчення ферромагнітних властивостей спінової сітки для узагальненої моделі Ізинга (УМІ). В наближенні середнього поля для вузлової підсистеми спінової сітки визначена область ферромагнітного основного стану в площині параметрів гамільтоніану. Проведено співставлення з відомими результатами УМІ для ґратки, де виявлено, зокрема, відсутність фазового переходу у антиквадрупольну фазу.

FERROMAGNETIC PROPERTIES OF A SPIN NET FOR A  
GENERALIZED MODEL ISING  $S = 1$

V.S. Yanishevsky

**Abstract.** The study of ferromagnetic properties of a spin net for a generalized model Ising (GMI) is prolonged. In approach of an mean field for a nodal subsystem of a spin net the region of a ferromagnetic ground state in a plane of parameters of a Hamiltonian is determined. The comparison from known by results GMI for a lattice is carried out, where the lack phase transition in an antiquadrupole phase is detected, in particular.

Подається в Журнал фізичних досліджень  
Submitted to Journal of Physical Studies

Моделі спінових сіток із спіновим станом  $S = 1$  вивчались в роботах [1,2,3], інтерес до яких був викликаний описом феромагнітного впорядкування електронних спінів на дислокаційних структурах [4]. Названі моделі слід розглядати як розвиток моделі дислокаційного феромагнетизму [4] на випадок спіну  $S = 1$ . В той же час, моделі спінових сіток можуть бути застосовні для опису декорованих ґраток [5,6,7,8]. В роботах [1,3] розглядалися феромагнітні властивості спінової сітки для звичайної моделі Ізинга  $S = 1$ . Підсумовуючи, можна сказати, що порівняно з випадком  $S = 1/2$  феромагнітне впорядкування супроводжується наявністю параметра середнього поля  $q$  ( $q = \langle \sigma^2 \rangle$ ). В роботі [3] були з'ясовані властивості термодинамічних функцій в наближенні середнього поля і вивчено вплив спінів ланок на параметри фазового переходу. В роботі [2] вивчались ефективні взаємодії в спіновій сітці для узагальненої моделі Ізинга (УМІ)  $S = 1$  в залежності від параметрів мікроскопічного гамільтоніану, і розглядалися деякі часткові випадки фазових переходів в моделі. Дана робота є продовженням [2] і в ній досліджується основний стан спінової сітки і проводиться порівняння із ґраткою. Розглядається також залежність намагніченості спінової сітки від зовнішнього магнітного поля.

## 1. Основні співвідношення

Відповідно до [2] будемо вести опис спінової сітки на основі гамільтоніану

$$H_1 = -\varepsilon \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - k \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i^2 \sigma_j^2 - \delta \sum_i \sigma_i^2 - h \sum_i \sigma_i. \quad (1)$$

Спінова сітка, що розглядається, являє собою певну ґратку, вузли якої з'єднані спіновими ланками (кількість спінів в ланці  $S = 1$ ). Сумуванням за спінами ланок здійснюється перехід до трансформованої ґратки з ефективним гамільтоніаном [1-3]:

$$H = \sum_i (zB - h)\sigma_i + \sum_i zD\sigma_i^2 + \sum_{\langle ij \rangle} I\sigma_i\sigma_j + \sum_{\langle ij \rangle} K\sigma_i^2\sigma_j^2 + \sum_{\langle ij \rangle} L\sigma_i\sigma_j^2, \quad (2)$$

де ефективні взаємодії визначаються формулами:

$$B = \frac{1}{2\beta} \ln \left( \frac{Z_1(-1,0)}{Z_1(1,0)} \right), \quad D = -\frac{1}{2\beta} \ln \left( \frac{Z_1(-1,0) \cdot Z_1(1,0)}{Z_1^2(0,0)} \right),$$

$$I = -\frac{1}{4\beta} \ln \left( \frac{Z_1(1,1) \cdot Z_1(-1,-1)}{Z_1^2(-1,1)} \right), \quad (3)$$

$$K = I - 2D - \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{Z_1(-1,1)}{Z_1(0,0)} \right),$$

$$L = -2B + \frac{1}{2\beta} \ln \left( \frac{Z_1(-1,-1)}{Z_1(1,1)} \right).$$

де  $Z_1(s, s')$  статсума одновимірного спінового ланцюжка з  $n+2$  спінами, де крайні спіни перебувають відповідно в станах  $s$  і  $s'$ . В нульовому зовнішньому полі в  $B, L = 0$ .

Зауважимо, що для звичайної моделі Ізинга в ефективному гамільтоніані (1.2) суттєву роль відіграє анізотропія, знак якої сприяє феромагнітному впорядкуванню [1, 3]. В низькотемпературній області  $D \approx -\varepsilon$  і досить слабо залежить від температури. Фазовий перехід у вузловій підсистемі відбувається, таким чином, за наявності значної анізотропії. В результаті флуктуації параметра порядку є менш виражені, про що свідчить, зокрема, задовільний опис фазового переходу в модифікованому гаусовому наближенні [9].

Для з'ясування основного стану спінової сітки використаємо низькотемпературні асимптотики для ефективних взаємодій, які були визначені в [2]. При проведенні порівняння із ґраткою звернемо увагу на характерні відмінності між властивостями моделі (1.1) на спіновій сітці і відповідній ґратці. Безумовно, мова не йтиме про вичерпний аналіз моделі, ми обмежимося наближенням середнього поля для вільної енергії вузлової підсистеми сітки [1, 3].

Відзначимо, що вивчення статистичних і термодинамічних властивостей моделі (1.1) для ґратки було темою багатьох робіт [10–13] з використанням, зокрема, методів середнього поля, діаграмної техніки та кластерних розкладів. Так, в наближенні середнього поля гамільтоніан типу (1.1) вивчався в [10–13], записаний в операторах квадрупольного моменту  $Q = 3\sigma^2 - 2$ . Значний обсяг аналітичних та числових результатів для моделі (1.1) в наближенні двочастинкового кластера наведений в [12]. Як впливає із згаданих робіт [12, 13] фазова діаграма моделі (1.1) є досить складною і в повній мірі ще не з'ясованою. Зауважимо також, що в зв'язку із широким застосуванням моделі типу (1.1) для вивчення термодинамічних властивостей розчинів  ${}^3\text{He}$  вона носить також назву — модель Блюма-Емері-Гріфітса.

Нагадаємо коротко основні властивості моделі (1.1) в наближенні середнього поля. Так, вільна енергія в наближенні середнього поля у випадку двох підґраток задається виразом ( $h = 0$ ):

$$\beta F = \frac{\varepsilon}{2} \rho_1 \rho_2 + \frac{k}{2} q_1 q_2 - \frac{1}{2} \ln (br_0(x_1, y_1) \cdot br_0(x_2, y_2)), \quad (4)$$

де  $x_{1,2} = \beta z \varepsilon \rho_{1,2}$ ,  $y_{1,2} = \beta z k q_{1,2} + \beta \delta$ ,  $br_0(x, y) = \sum_{\sigma} \exp(x\sigma + y\sigma^2)$ -має зміст статсуми спіну в полях  $x, y$ . Параметри підграток  $\rho_{1,2}$  і  $q_{1,2}$  визначають відповідно спіновий момент і квадрат спінового моменту  $\rho_{1,2} = \langle \sigma \rangle_{1,2}$ ,  $q_{1,2} = \langle \sigma^2 \rangle_{1,2}$ . Рівняння для параметрів середнього поля визначаються з умови стаціонарності вільної енергії за  $\rho_{1,2}$  і  $q_{1,2}$  і відповідно дорівнюють

$$\rho_{1,2} = br_1(x_{2,1}, y_{2,1}), \quad q_{1,2} = br_2(x_{2,1}, y_{2,1}). \quad (5)$$

де  $br_1(x, y) = \partial \ln br_0(x, y) / \partial x$ ,  $br_2(x, y) = \partial \ln br_0(x, y) / \partial y$ . Порядок індексів в формулах (1.5) вказує, що в праві частини рівнянь входять параметри іншої підгратки.

Розглянемо області феромагнітного основного стану в площині параметрів моделі (1.1)  $\Delta_1, \Delta$ , де введені позначення  $\Delta_1 = k/\varepsilon$ ,  $\Delta = \delta/\varepsilon$  [2]. Визначення областей феромагнітного впорядкування при  $T = 0$  зводиться до знаходження областей існування розв'язків  $\rho_{1,2} = 1$ ,  $q_{1,2} = 1$  системи рівнянь (1.5). Зокрема, для  $T \rightarrow 0$  в цьому випадку повинна виконуватись рівність

$$1 = \frac{a^{-\Delta_1 - \Delta/z \varepsilon t}}{a^{-\Delta_1 - \Delta/z \varepsilon t} + a} \Big|_{T \rightarrow 0} \quad (6)$$

де  $a = e^{-\beta \varepsilon}$ . З рівності (1.6) випливає, що феромагнітний стан існує за умови

$$\Delta_1 + \Delta/z > -1. \quad (7)$$

На рис. 1 вказана область основного феромагнітного стану (I), що задовольняє умові (1.7). Розглянемо розв'язки системи рівнянь (1.5) в області, де  $\rho_{1,2} = 0$ . В цьому випадку для отримуємо систему наступних рівнянь:

$$q_{1,2} = \frac{2a^{-\Delta_1 q_{2,1} - \Delta/z \varepsilon t}}{2a^{-\Delta_1 q_{2,1} - \Delta/z \varepsilon t} + 1}. \quad (8)$$

В правій півплощині параметрів ( $\Delta > 0$ ,  $\Delta_1 < 0$ ) матимемо зокрема:

$$q_{1,2} = \frac{2a^{|\Delta_1| q_{2,1}}}{2a^{|\Delta_1| q_{2,1}} + a^{\Delta/z \varepsilon t}}. \quad (9)$$

Легко бачити, що при  $T \rightarrow 0$  наявні лише два розв'язки  $q_{1,2} = (0, 1)$ . Це так звана квадрупольна фаза (для операторів квадрупольного моменту  $Q = 3\sigma^2 - 2$  відповідно матимемо  $\langle Q \rangle_{1,2} = (1, -2)$ ), що відома для гамільтоніанів з  $S = 1$  [10–13]. Відповідно квадрупольний

момент всієї ґратки дорівнює  $q = 1/2$  ( $q = (q_1 + q_2)/2$ ). Температура переходу в парафазу визначається з умови рівності квадрупольних моментів підграток  $q_1 = q_2$  при  $T \neq 0$  [10]. Параметром порядку в даному випадку є різниця квадрупольних моментів підграток  $\eta = (q_2 - q_1)/2$ . Фазовий перехід є переходом другого роду, що ілюструє зображення вільної енергії системи як функції параметра порядку на рис. 2. На рис. 3 наведені також відповідні чисельні розв'язки системи рівнянь (1.5) для  $q_1, q_2, \eta$  ( $\rho_{1,2} = 0$ ).

Для лівої півплощини ( $\Delta < 0$ ) аналогічно розглядаємо систему двох рівнянь.

$$q_{1,2} = \frac{2a^{|\Delta|/z \varepsilon t - \Delta_1 q_{2,1}}}{2a^{|\Delta|/z \varepsilon t - \Delta_1 q_{2,1}} + 1}. \quad (10)$$

У вказаній області  $|\Delta|/z \varepsilon t - \Delta_1 > 0$ , а тому існують лише розв'язки  $q_{1,2} = (0, 0)$ . Отже, дві підгратки впорядковані однаково і сумарний квадрупольний момент дорівнює нулю (область III на рис.1). На рис. 4 наведені характерні залежності квадрупольного моменту від температури для цієї області. Зауважимо також, що на осі  $\Delta = 0$ ,  $\Delta_1 < -1$ , система рівнянь (1.7) володіє розв'язками  $q_{1,2} = (0, 2/3)$ , тобто, одна із підграток перебуває в парафазі.

## 2. Основний стан спінової сітки

У випадку сітки ефективні взаємодії є складні функції параметрів моделі і температури. Зокрема, для звичайної моделі Ізинга [1] для  $T \rightarrow 0$  спінова сітка (в нульовому полі) описується наближено гамільтоніаном (1.2) з параметрами  $I \approx -\varepsilon$ ,  $D \approx -\varepsilon$ ,  $K \approx \varepsilon$ . Тобто, її можна трактувати як ґратку з відносними анізотропією  $\Delta' = 1 + z$  і біквадратною взаємодією  $\Delta'_1 = -1$  (які можна визначити на основі структури гамільтоніану (1.2), наступними співвідношеннями  $\Delta' = -(\delta - zD)/I$ ,  $\Delta'_1 = K/I$ ). Очевидно, що умова феромагнітного стану (1.7) виконується і таким чином, основний стан феромагнітний.

Для узагальненої моделі (1.1) ефективні взаємодії для  $T \rightarrow 0$  вивчалися в [2] і з'ясувалась характерна поведінка в площині параметрів ( $\Delta, \Delta_1$ ). Ми наведемо більш детально залежність ефективної обмінної взаємодії в площині ( $\Delta, \Delta_1$ ) для сіток з різною довжиною ланок. Ефективна обмінна взаємодія (для  $n = 1$ ) відмінна від нуля в області, що задовольняє умову  $\Delta_1 + \Delta/2 > -1$  рис. 5. В області I —  $I \approx -\varepsilon$ , II-перехідна область в якій  $I \approx -\varepsilon(1 + \Delta_1 + \Delta/2)$ , в області III —  $I \approx 0$ . Вкажемо на певну кореляцію між умовою відмінності від нуля обмінної взаємодії ( $T \rightarrow 0$ ) з умовою існування

феромагнітного стану (1.7). Як видно вони співпадають, якщо взяти до уваги, що для одновимірного випадку  $z = 2$ . Для спінових сіток з  $n \geq 2$  ситуація дещо змінюється в лівій півплощині ( $\Delta < 0$ ). Так, для заданого  $n \geq 2$   $I \approx 0$  на прямій  $\Delta_1 + \Delta / (1 + 1/n) = -1$ . Таким чином, в лівій півплощині обмінна взаємодія відмінна від нуля в області, що утворюється перетином прямих  $\Delta_1 + \Delta / (1 + 1/n) = -1$  і  $\Delta_1 + \Delta/2 = 0$  (рис. 5).

Виходячи з наведеного проаналізуємо області феромагнітного стану для  $\Delta > 0$ . В області I можна ввести для опису сітки параметри  $\Delta' = (1 + \Delta_1)z + \Delta$ ,  $\Delta'_1 = -1$  (див. також [2]). Умова феромагнітного порядку набирає вигляду  $\Delta'_1 + \Delta'/z \equiv \Delta_1 + \Delta/z > -1$ . Аналогічно для перехідної області (II) система еквівалентна ґратці з ефективними взаємодіями  $\Delta' = -\frac{(1+\Delta_1)z+\Delta}{(1+\Delta/2+\Delta_1)}$ ,  $\Delta'_1 = -1$ . Неважко показати, що в даному випадку умова феромагнітного стану  $\Delta'_1 + \Delta'/z > -1$  також зводиться до нерівності  $\Delta_1 + \Delta/z > -1$ . Тобто, в правій півплощині параметрів феромагнітної області для ґратки і спінової сітки співпадають. Відповідним чином, можна показати, що в лівій півплощині ( $\Delta < 0$ ) феромагнітний стан обмежується областю, де  $I \neq 0$ . Підсумовуючи, можна сказати, що для ( $\Delta < 0$ ) феромагнітна область суттєво визначається поведінкою одновимірних спінових ланцюжків, оскільки від'ємна анізотропія руйнує ефективну обмінну взаємодію між крайніми спінами ланцюжка.

Розглянемо поведінку квадрупольної вузлової підсистеми у відсутності феромагнітного порядку. Як вже вказувалось, ефективні взаємодії  $K$  і  $D$  наведені в [2]. Зокрема, в області нижче прямої  $\Delta_1 + \Delta/2 = -1$  ефективна квадрупольна взаємодія  $K$  змінює знак з додатного на від'ємний [2]. Для області, що визначається сектором ( $\Delta_1 + \Delta/z < -1$ ,  $\Delta_1 + \Delta/2 > -1$ ) (рис.5) можна ввести ефективні параметри для сітки  $\Delta' = -z\frac{1+\Delta/z+\Delta_1}{1+\Delta/2+\Delta_1}$ ,  $\Delta'_1 = 1$ . Звідси випливає, зокрема, що ефективна анізотропія  $\Delta' < 0$ . В результаті необхідно проаналізувати наступні рівняння для параметрів квадрупольного моменту

$$q_{1,2} = \frac{2a^{q_{2,1}+|\Delta'|/z}}{2a^{q_{2,1}+|\Delta'|/z} + 1}. \quad (11)$$

Очевидно, що система (2.1)  $T \rightarrow 0$  для володіє розв'язками  $q_{1,2} = (0, 0)$ . Тобто, дві підґратки впорядковані однаково і сумарний момент рівний нулю. Як бачимо, маємо суттєву відмінність між поведінкою моделі (1.1) на ґратці і відповідній спіновій сітці. Очевидно, це пов'язано з тим, що спінова сітка описується ефективною анізотропією, яка має протилежний знак до  $\Delta$  ( $\Delta' < 0$ ,  $\Delta > 0$ ). Як вже

вказувалось, в області, що визначається нерівністю  $\Delta_1 + \Delta/2 < -1$  ефективна обмінна взаємодія зникає ( $I \rightarrow 0$  для  $T \rightarrow 0$ ). Тому для області, що визначається сектором ( $\Delta_1 + \Delta/2 < -1$ ,  $\Delta_1 + \Delta > -1$ ) можна ввести для спінової сітки відносні ефективні величини  $\Delta' = z(1 + \Delta/z + \Delta_1)$ ,  $\Delta'_1 = -2(1 + \Delta/2 + \Delta_1)$ . Видно, що для даної області  $\Delta'_1 > 0$ ,  $\Delta' < 0$ , і неважко переконатись, що система рівнянь також має розв'язки  $q_{1,2} = (0, 0)$ . З переходом в область ( $\Delta_1 + \Delta < -1$ ) сітка описується відносними величинами  $\Delta' = \Delta(1 - z)$ ,  $\Delta'_1 = \Delta$ . Відповідно отримуємо систему рівнянь

$$q_{1,2} = \frac{2a^{(1-1/z)et}\Delta}{2a^{(1-1/z)et}\Delta + a^{\Delta q_{2,1}}} \quad (12)$$

При  $T \rightarrow 0$  система (2.2) володіє розв'язками  $q_{1,2} = (1, 1)$  і  $q_{1,2} = (0, 0)$ , однак умові мінімуму вільної енергії задовільняє  $q_{1,2} = (0, 0)$ . Тобто, в розглядуваній області основний стан квадрупольної підсистеми  $q = 0$  (область II на рис.6).

В лівій півплощині ( $\Delta < 0$ ) в області де  $I, D, K = 0$  ([2]), спінова сітка еквівалентна ґратці із відносними параметрами  $\Delta' = \Delta$ ,  $\Delta'_1 = \Delta$ ,  $\Delta'_1 = 0$ . Відповідно система рівнянь

$$q_{1,2} = \frac{2a^{|\Delta|/z}}{2a^{|\Delta|/z} + 1} \quad (13)$$

при  $T \rightarrow 0$  володіє лише нульовими розв'язками  $q_{1,2} = (0, 0)$ . Звідси випливає, що в основний стан вузлової підсистеми в розглядуваній області визначається розв'язками  $(\rho, q) = 0$  (область III на рис.6).

Звернемо увагу на відсутність фазового переходу в антиквадрупольну фазу, що має місце для звичайної ґратки. Як вже вказувалось це обумовлено знаком ефективної анізотропії  $\Delta(c) < 0$  для вузлової ґратки спінової сітки. У випадку ґратки такий перехід має місце для області параметрів ( $\Delta > 0$ ,  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta/z + \Delta_1 < -1$ ) гамільтоніану (1.1). Це факт відображено також чисельними розрахунками наведеними на рис.7 і 8. Параметр  $q$  монотонно зростає із підвищенням температури. Очевидно, що для опису вузлової підсистеми достатньо обмежитись моделлю однієї підґратки  $q = q_1 = q_2$ . Чисельні розрахунки наведені для спінових сіток з довжиною ланок  $n = 1, 10$  для набору параметрів гамільтоніану (1.1) ( $\Delta = 0.5$ ,  $\Delta_1 = -1.35$ ) і ( $\Delta = 0.5$ ,  $\Delta_1 = -1.9$ ) відповідно. Перший набір параметрів належить сектору ( $\Delta_1 + \Delta/2 < -1$ ,  $\Delta_1 + \Delta > -1$ ), а друга відповідно області ( $\Delta_1 + \Delta < -1$ ). Наведені вище розв'язки визначають квадрупольні моменти вузлової підсистеми. Для визначення

квадрупольного моменту всієї сітки можна як і у випадку для намагніченості [1] скористаємось формулою

$$Q = \left\langle \sum_i \sigma_i^2 \right\rangle = \frac{1}{\beta} \partial \ln Z \partial \delta, \quad (14)$$

де сумування в (2.4) ведеться за всіма спінами сітки.

В формулу (2.4) входить статсума  $Z$  всієї системи. Після проведення підсумовування за спінами ланок отримаємо формулу

$$Q = \frac{Nz}{2\beta} \cdot \frac{\partial \ln Z_1(0, 0)}{\partial \delta} - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \delta} \right\rangle. \quad (15)$$

В формулі (2.3) похідні беруться від параметрів ефективного гамільтоніану (1.2). В наближенні середнього поля для моделі двох підграток отримаємо

$$\begin{aligned} Q/N &= \frac{1}{2} \left( \frac{z}{\beta} \cdot \frac{\partial \ln Z_1(0, 0)}{\partial \delta} - \left( z \frac{\partial D}{\partial \delta} - 1 \right) (q_1 + q_2) \right. \\ &\quad \left. - z \frac{\partial I}{\partial \delta} \rho_1 \rho_2 - z \frac{\partial K}{\partial \delta} q_1 q_2 \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Задаючи відповідні асимптотики величин  $D$ ,  $I$ ,  $K$  в залежності від параметра  $\Delta$  можна визначити поведінку  $Q$ . Так, зокрема в феромагнітній області для асимптотики статсуми можна отримати формулу [2]

$$Z_1(0, 0) \approx 2a^{2(1+\Delta/2+\Delta_1)} / a^{(n+1)(1+\Delta+\Delta_1)}$$

і відповідно  $\partial \ln Z_1(0, 0) \partial \delta|_{t \rightarrow 0} = \beta n$ . Тобто, ми отримуємо

$$Q/N = 1 + zn/2, \quad (17)$$

що, звичайно відповідає стану повної поляризації спінів сітки [1]. Для області, де відсутній феромагнітний порядок ( $\Delta/z + \Delta_1 < -1$ ) згідно формули (2.6) для  $T \rightarrow 0$  відмінний від нуля внесок даватиме лише перший доданок (оскільки  $q_{1,2} = (0, 0)$  і  $\rho_{1,2} = (0, 0)$ ). Для  $Z_1(0, 0)$  в області  $\Delta/2 + \Delta_1 < -1$  відбувається також зміна асимптотики, зокрема  $\partial \ln Z_1(0, 0) \partial \delta|_{t \rightarrow 0} = \beta(n+2)/2$ . В результаті для цієї області для  $T \rightarrow 0$  матимемо

$$Q/N = z(n+2)/4. \quad (18)$$

Для наступної області  $\Delta + \Delta_1 < -1$  матимемо, зокрема,  $\partial \ln Z_1(0, 0) \partial \delta|_{t \rightarrow 0} = \beta n/2$ , а тому для  $T \rightarrow 0$

$$Q/N = zn/4. \quad (19)$$

На рис. 7 і рис. 8 наведені характерні залежності для квадрупольного моменту спінової сітки для згаданих областей. Виходячи із формул (2.7) і (2.8) вибрано відповідні умови нормування так, що при  $T \rightarrow 0$  відповідно  $Q \rightarrow 1$ . Характерні немонотонні залежності пов'язані, очевидно, із залежністю  $D$ ,  $K$  від  $\Delta$  і  $\Delta_1$ .

В лівій півплощині в області відсутності феромагнітної фази маємо для  $Z_1(0, 0) \approx 1 + 2na^{|\Delta|}$ , а тому із формули (2.4) отримуємо, що квадрупольний момент сітки для  $T \rightarrow 0$  дорівнює

$$Q = 0. \quad (20)$$

Характерна температурна залежність квадрупольного моменту сітки для цієї області наведена на рис. 9. Зазначимо також, що біквадратний момент  $Q$  спінової сітки в області II (рис. 6) відмінний від нуля і в області низьких температур визначається спіновими ланками.

### 3. Намагніченість в зовнішньому полі

Вільну енергію спінової сітки в зовнішньому полі можна записати у вигляді

$$\frac{\beta F}{N} = f_1(0, 0) + \Delta F \quad (21)$$

де  $f_1(0, 0) = -z/2 \ln Z_1(0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{\tilde{I}}{2} \rho_1 \rho_2 - \frac{\tilde{K}}{2} q_1 q_2 - \frac{\tilde{L}}{4} (\rho_1 q_2 + \rho_2 q_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln (br_0(x_2, y_2) \cdot br_0(x_2, y_2)), \end{aligned} \quad (22)$$

а також введені наступні позначення:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{I} \rho_2 + \beta h - \tilde{B} - \tilde{L}/2q_2, & x_2 &= \tilde{I} \rho_1 + \beta h - \tilde{B} - \tilde{L}/2q_1, \\ y_1 &= -\tilde{K} q_2 + \beta \delta - \tilde{D} - \tilde{L}/2\rho_2, & y_2 &= -\tilde{K} q_1 + \beta \delta - \tilde{D} - \tilde{L}/2\rho_1, \\ \tilde{I} &= z\beta|I|, & \tilde{D} &= z\beta D, & \tilde{K} &= z\beta K, & \tilde{B} &= z\beta B, & \tilde{L} &= z\beta L. \end{aligned}$$

Вільна енергія наведена для моделі двох підграток. Із умови стаціонарності знаходимо систему рівнянь для рівноважних значень  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $q_1$ ,  $q_2$

$$\rho_1 = \frac{\tilde{L}}{2\tilde{I}} q_1 + br_1(x_1, y_1) - \frac{\tilde{L}}{2\tilde{I}} br_2(x_1, y_1),$$

$$\begin{aligned}
\rho_2 &= \frac{\tilde{L}}{2\tilde{I}}q_2 + br_1(x_2, y_2) - \frac{\tilde{L}}{2\tilde{I}}br_2(x_2, y_2), \\
q_1 &= -\frac{\tilde{L}}{2\tilde{K}}\rho_1 + br_2(x_1, y_1) + \frac{\tilde{L}}{2\tilde{K}}br_1(x_1, y_1), \\
q_2 &= -\frac{\tilde{L}}{2\tilde{K}}\rho_2 + br_2(x_2, y_2) + \frac{\tilde{L}}{2\tilde{K}}br_1(x_2, y_2).
\end{aligned} \tag{23}$$

Намагніченість сітки можна визначити стандартним чином за формулою

$$M = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial h}. \tag{24}$$

В результаті після нескладних обчислень [1] можна отримати

$$\frac{M}{N} = \frac{z}{2\beta} \cdot \frac{\partial \ln Z_1(0, 0)}{\partial h} + \Delta m, \tag{25}$$

де

$$\begin{aligned}
\Delta m &= -\left(z \frac{\partial B}{\partial h} - 1\right) \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} - \frac{z}{2} \frac{\partial D}{\partial h} (q_1 + q_2) - \frac{z}{2} \frac{\partial I}{\partial h} \rho_1 \rho_2 \\
&\quad - \frac{z}{2} \frac{\partial K}{\partial h} q_1 q_2 - \frac{z}{2} \frac{\partial L}{\partial h} \frac{(q_1 \rho_2 + q_2 \rho_1)}{2}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Перший доданок в (3.3) визначає вклад спінових ланок в намагніченість, другий - пов'язаний із вузловою підсистемою.

Розглянемо поведінку намагніченості в залежності від зовнішнього поля для характерних областей наведених в розділі II. Зокрема, для ферромагнітної області маємо типові залежності, які зображені на рис.10. Нижче критичної температури крива починається із спонтанного моменту і досягає повної поляризації з підвищенням магнітного поля. Магнітне поле відкладене в безрозмірних одиницях ( $h/\varepsilon$ ), намагніченість віднесена до числа спінів сітки  $M/(1 + zn/2)$ .

Характерні залежності параметрів середнього поля  $\rho$  і  $q$  для спінової сітки від зовнішнього поля наведені на рис. 11, 13 15. На рис.11 залежність наведена для набору параметрів ( $\Delta = 0.5$ ,  $\Delta_1 = -1.15$ ), що відповідає сектору ( $\Delta_1 + \Delta/z < -1$ ,  $\Delta_1 + \Delta/2 > -1$ ). В даному випадку, як зазначалось вище, відсутній ферромагнітний стан, однак обмінна ефективна взаємодія відмінна від нуля [2]. Залежності параметрів вузлових підграток  $\rho$  і  $q$  на рис. 13 і 15 відповідають наборам параметрів, що розглядались в розділі 2. Спостережувані характерні максимуми в області низьких полів пов'язані, очевидно, із немонотонними залежностями ефективних обмінних взаємодій від

зовнішнього поля. Область, де  $\rho$ ,  $q \rightarrow 1$  відповідає фактично системі незв'язаних спінових ланцюжків. Для цієї області полів практично  $I$ ,  $K = 0$ , а  $B \rightarrow -1$ . На рис.12, 14, 16 наведені відповідні залежності для намагніченості. Для значень  $h$  де  $\rho$ ,  $q \approx 0$  намагніченість визначається, очевидно, першим доданком в (3.3), тобто одновимірними спіновими ланками, з якими власне пов'язані характерні перегиби на кривій намагніченості.

#### 4. Висновки

В даній роботі з'ясувались характерні риси поведінки узагальненої моделі Ізинга на структурі спінової сітки. Показано, що області ферромагнітної фази для додатної анізотропії ( $\delta > 0$  в (1.1)) для ґратки і сітки співпадають, а для  $\delta < 0$  - ферромагнітна область для спінової сітки звужена, що викликане впливом від'ємної анізотропії на ефективну взаємодію між вузловими спінами сітки. Наступна відмінність полягає в тому, що у випадку спінової сітки відсутній фазовий перехід у квадрупольну фазу, який має місце для ґратки. Як впливає з наведеного, це є наслідком багатопараметричності вихідного гамільтоніану. Гамільтоніан вузлової підсистеми сітки визначається ефективними величинами, що є складними функціями параметрів мікроскопічного гамільтоніану. В результаті ефективний гамільтоніан не належать тій частині підпростору, де спостерігається згаданий фазовий перехід.

#### Література

1. В. М. Цмоць, В. С. Янішевський, Я. Л. Заяць. Намагніченість спінової сітки в моделі Ізинга. УФЖ.-1996.-41, № 7-8.-С.727-736.
2. В. С. Янішевський. Узагальнена модель Ізинга S=1 на спіновій сітці. //УФЖ.-1997. - 42, № 5, с. 595-602.
3. В. С. Янішевський. Термодинаміка моделі Ізинга S=1 на спіновій сітці. // УФЖ.-1999, т. 44, №4 с.521-528.
4. Косевич А. М., Шкловський В. А. Дислокационная модель ферромагнетизма в немагнитных кристаллах. // ЖЭТФ.-1968.-55, в.3(9).- с.1131-1141.
5. М. Фишер //Природа критического состояния. М.:”Мир”,
6. Замкова Н. Г., Зиненко В. М. Термодинамика сверхобменной модели Мицуи. // ТМФ. - 1989.-79, №2.- с.272-281.
7. L. L. Goncalves. Randomly decorated Ising model // Int. J. Mod. Phys. B. -1991.- V.5, № 4,- P.675-683.

8. *M. A. Costa, L. L. Goncalves.* Randomly decorated Ising model on the square lattice. *J. Magn. Magn. Mat.* -1995.-140-144, - P. 2193-2194.
9. *В. С. Янішевський.* Намагніченість спінової сітки в моделі Ізинга. Гаусове наближення. // Журн. фіз. досл. -1999. -
10. *Chen H. U., Levy P. M.* Dipole and Quadrupole Phase Transitions in Spin-1 Models. // *Phys. Rev. B.*- 1974.- 7, №9.- p.4267-4284.
11. *Chakraborty K. G.* Effective-field model for a spin-1 Ising system with dipolar and quadrupolar interactions. // *Phys. Rev. B.*- 1984. Vol. 29, № 3, - p. 1454-1457.
12. *S. I. Sorokov, R. R. Levitskii, O. R. Baran.* Two-particle cluster approximation for Ising type model with arbitrary value of spin. Correlation functions of Blume-Emeri-Griffiths model. // *Cond. Matt. Phys.*, 1997, № 9, 57-87.
13. *Takahashi K., Tanaka M.* Spin-one Ising model with bilinear and biquadratic interactions. II. Phase diagram. // *J. Phys. Soc. Japan*, 1980, vol 48 № 5 p 1423 - 1428

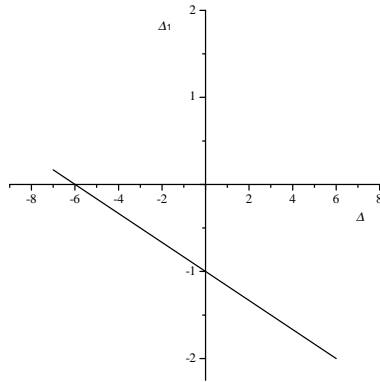


Рис. 1. Основний стан ( $T = 0$ ) спінової сітки в площині параметрів  $(\Delta, \Delta_1)$ ; I — ферромагнітна фаза, II — квадрупольна фаза.

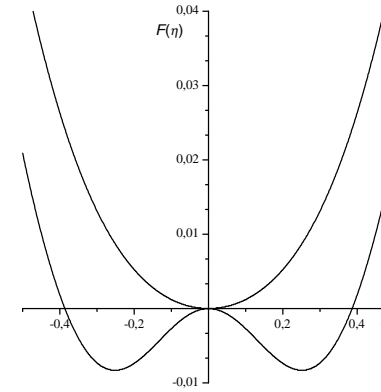


Рис. 2. Ілюстрація фазового переходу II-роду в квадрупольну фазу для ґратки.

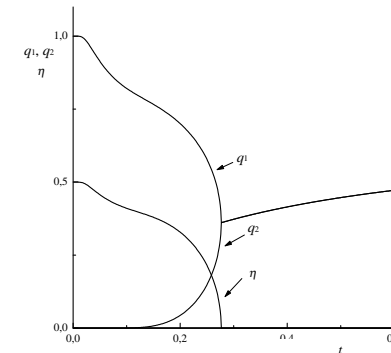


Рис. 3. Температурні залежності для квадрупольних моментів підґраток і параметра порядку ( $\eta = q_2 - q_1$ ).

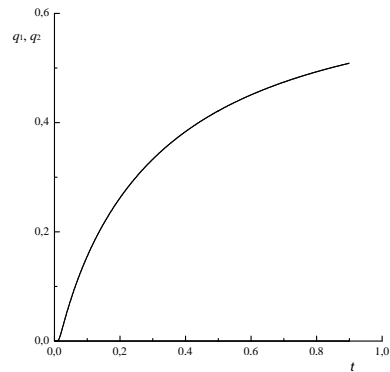


Рис. 4. Температурні залежності квадрупольних моментів підграток для  $\Delta < 0$ .

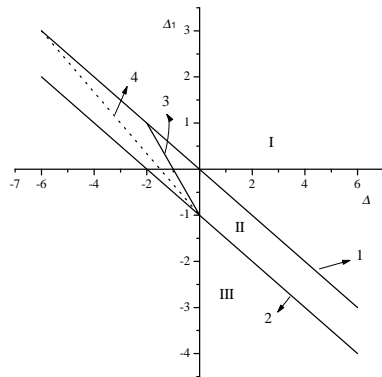


Рис. 5. Розбиття площини параметрів  $(\Delta, \Delta_1)$  на області для визначення поведінки ефективної обмінної взаємодії I. (На рисунку пронумеровані наступні прямі: 1 —  $\Delta_1 + \Delta/2 = 0$ ; 2 —  $\Delta_1 + \Delta/2 = -1$ ; 3 —  $\Delta_1 + \Delta = -1$ ; 4 —  $\Delta_1 + \Delta/(1 + 1/n) = 0$ ).

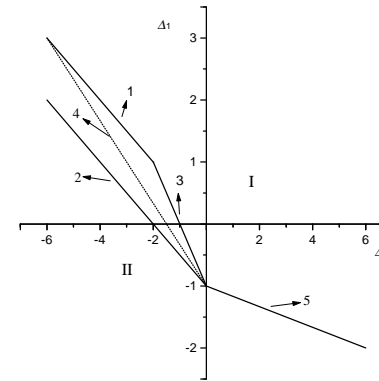


Рис. 6. Фазова діаграма сітки для  $T = 0$  в площині параметрів  $(\Delta, \Delta_1)$ ; I — феромагнітна фаза; (Позначення прямих 1–4 наведені на рис. 5, а пряма 5 —  $\Delta_1 + \Delta/z = -1$ , де  $z = 6$ ).

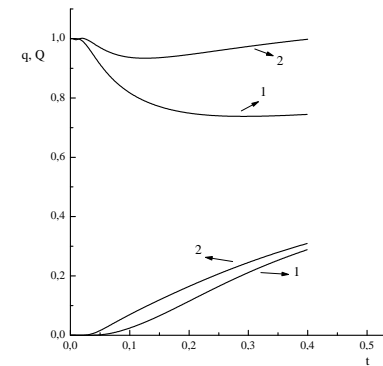


Рис. 7. Квадрупольні моменти підграток  $q$  (криві 1, 2) і квадрупольні моменти сітки  $Q$  (криві 1', 2') для  $n = 1, 10$  відповідно; ( $\Delta = 0.5, \Delta_1 = -1.35$ ).



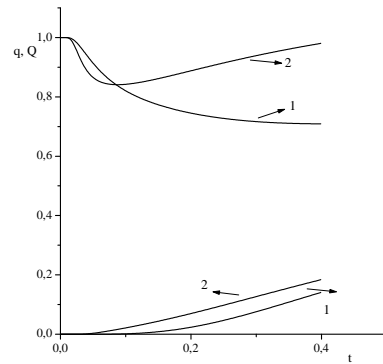


Рис. 8. Квадрупольні моменти підгранок  $q$  (криві 1, 2) і квадрупольні моменти сітки  $Q$  (криві 1', 2') для  $n = 1, 10$  відповідно; ( $\Delta = 0.5$ ,  $\Delta_1 = -1.9$ ).

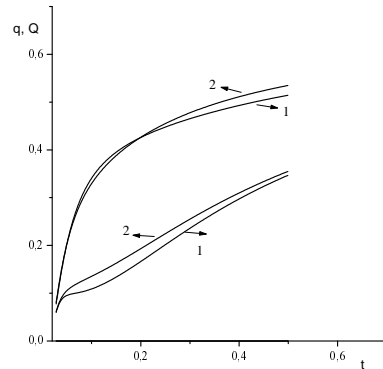


Рис. 9. Квадрупольні моменти підгранок  $q$  (криві 1, 2) і квадрупольні моменти сітки  $Q$  (криві 1', 2') для  $n = 1, 10$  відповідно; ( $\Delta = -0.5$ ,  $\Delta_1 = -1$ ).

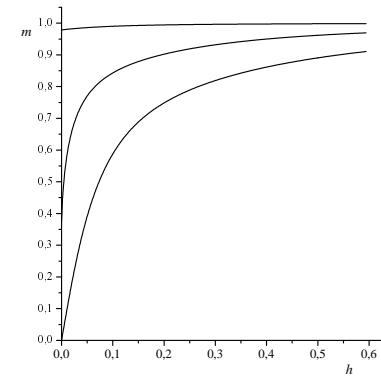


Рис. 10. Намагніченість спінової сітки  $m$  в залежності від зовнішнього поля для різних температур нижче і вище критичної; ( $n = 5$ ,  $\Delta = 0.5$ ,  $\Delta_1 = 0.5$ ).

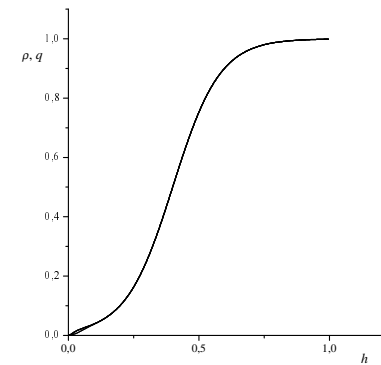


Рис. 11. Залежність параметрів вузлової підсистеми  $\rho$ ,  $q$  від зовнішнього поля  $h$  для сіток із  $n = 1, 5, 10$  для  $t = 0.015$  і параметрів гамільтоніану  $\Delta = 0.5$ ,  $\Delta_1 = -1.15$ .

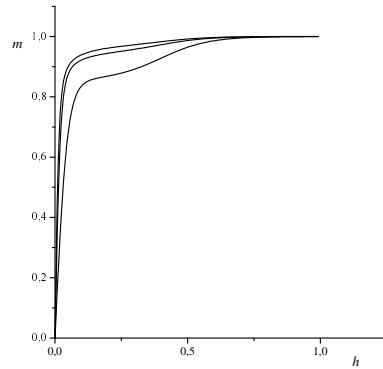


Рис. 12. Залежність намагніченості спінової сітки від зовнішнього поля  $h$  для сіток із  $n = 1, 5, 10$  для  $t = 0.015$  і параметрів гамільтоніану  $\Delta = 0.5$ ,  $\Delta_1 = -1.15$ .

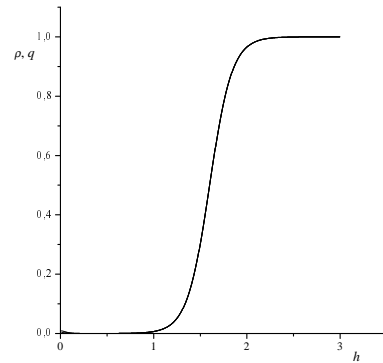


Рис. 13. Залежність параметрів вузлової підсистеми  $\rho, q$  від зовнішнього поля  $h$  для сіток із  $n = 1, 5, 10$  для  $t = 0.02$  і параметрів гамільтоніану  $\Delta = 0.5$ ,  $\Delta_1 = -1.35$ .

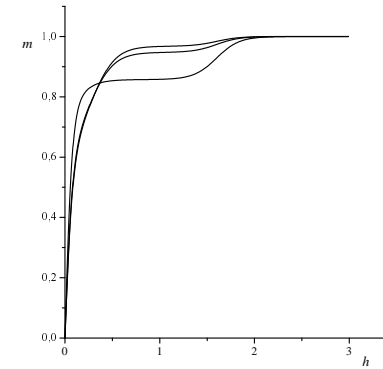


Рис. 14. Залежність намагніченості спінової сітки від зовнішнього поля  $h$  для сіток із  $n = 1, 5, 10$  для  $t = 0.02$  і параметрів гамільтоніану  $\Delta = 0.5$ ,  $\Delta_1 = -1.35$ .

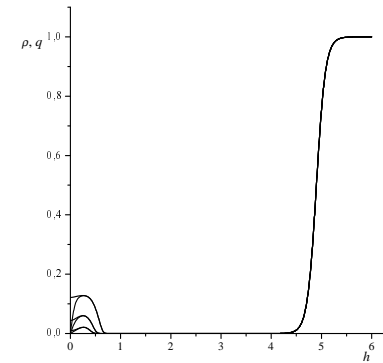


Рис. 15. Залежність параметрів вузлової підсистеми  $\rho, q$  від зовнішнього поля  $h$  для сіток із  $n = 1, 5, 10$  для  $t = 0.02$  і параметрів гамільтоніану  $\Delta = 0.5$ ,  $\Delta_1 = -1.9$ .

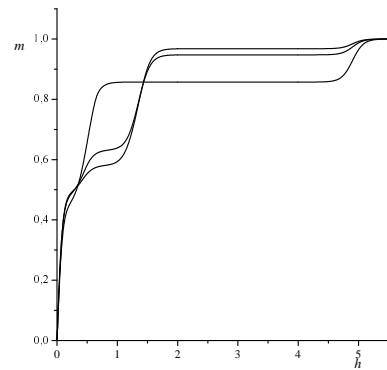


Рис. 16. Залежність намагніченості спінової сітки від зовнішнього поля  $h$  для сіток із  $n = 1, 5, 10$  для  $t = 0.02$  і параметрів гамільтоніану  $\Delta = 0.5$ ,  $\Delta_1 = -1.9$ .

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Василь Степанович Янішевський

ФЕРОМАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ СПІНОВОЇ СІТКИ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ  
МОДЕЛІ ІЗІНГА  $S = 1$

Роботу отримано 12 жовтня 2000 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу квантової статистики

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені