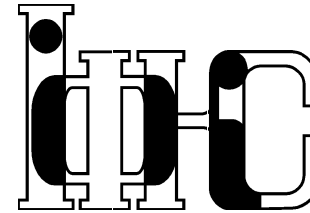


Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Національна академія наук України



ІНСТИТУТ  
ФІЗИКИ  
КОНДЕНСОВАНИХ  
СИСТЕМ

Аскольд Андрійович Дувіряк

ДВОЧАСТИНКОВЕ РІВНЯННЯ ДІРАКА: МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА  
ЗАСТОСУВАННЯ У СПЕКТРОСКОПІЇ МЕЗОНІВ

Роботу отримано 25 грудня 2006 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії металів та сплавів

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

ICMP-06-26U

А. Дувіряк

Двочастинкове рівняння Дірака: методи, моделі та застосування  
у спектроскопії мезонів

ЛЬВІВ

УДК: 531/533; 530.145; 531.18; 539.12

PACS: 03.65.Pm, 03.65.Ge, 12.39.Pn

## Двочастинкове рівняння Дірака: методи, моделі та застосування у спектроскопії мезонів

А. Дувіряк

**Анотація.** Двочастинкове рівняння Дірака з загальним локальним потенціалом зведено до пари звичайних диференційних рівнянь 2-го порядку для радіальних компонент хвильової функції. Знайдено клас спеціальних потенціалів, для яких рівняння допускає точні розв'язки. Для інших випадків запропоновано псевдо-пертурбативний метод розкладів за  $1/j$ . Побудовано кілька моделей легких мезонів, обчислено точні та наближені спектри енергій. Вони порівнюються з експериментальними даними.

## Two-body Dirac equation: methods, models and application in meson spectroscopy

A. Duviryak

**Abstract.** The two-body Dirac equation with general local potential is reduced to the pair of ordinary second-order differential equations for radial components of a the wave function. The class of special potentials is found, for which the equation possesses exact solutions. For other cases the pseudo-perturbative  $1/j$ -expansion method is proposed. Few models of light mesons are constructed, exact and approximate energy spectra are calculated. They are compared with experimental data.

## 1. Вступ

Двочастинкове рівняння Дірака (2ЧРД) все частіше використовують в релятивістичній задачі про зв'язані стани. Окрім двох діраківських вільночастинкових членів, воно містить оператор, що описує взаємодію двох ферміонів зі спіном  $1/2$ . Як приклади згадаємо потенціал Брайта [1, 2] або інші версії електромагнетного потенціалу (простіші [3–5] чи складніші [6–8]), а також його узагальнення, що використовують для опису міжкваркової [9–15] чи міжнуклонної [16, 17] взаємодії<sup>1</sup>. Усі ці потенціали є локальними в координатному представленні; вони виводяться з класичної [6–8] та напів-квантової [5, 20–22] теорії поля, або підбираються феноменологічно<sup>2</sup>.

Довший час 2ЧРД розглядали лише в рамках теорії збурень - квазірелятивістичних наближень і/або розкладів за константою взаємодії. Для випадку електромагнетної взаємодії тільки таке тлумачення рівняння Брайта (і то лише в 1-му наближенні) має фізичний сенс [2]. В задачах із сильним зв'язком використання теорії збурень є необґрунтованим. До 2ЧРД з різноманітними локальними потенціалами стали застосовувати непертурбативні методи, які полягали в зведенні його шляхом розділення змінних (на радіальну і спіну-кутові) до системи звичайних диференційних рівнянь (так звана *радіальна редукція*) з подальшим аналітичним або чисельним інтегруванням [5, 7–9, 11–17, 21].

І одразу непертурбативний розгляд 2ЧРД виявляє притаманні цьому рівнянню патологічні особливості. У багатьох фізично цікавих випадках радіально редуктована система має залежні від енергії нефізичні полюси при скінченних відстанях між частинками [21, 28, 29]. Така краєва задача у строгому математичному сенсі виявляється некоректною, або невідповідною її фізичному змістові. Це спонукало авторів у даній галузі до модифікації краєвої задачі [11], самих рівнянь [13, 14], або використання залежних від енергії потенціалів [29].

Попри значну кількість розглянутих часткових прикладів, загальний вигляд радіально зредуктованого 2ЧРД, структура нефізичних патологій та шляхи їх уникнення у літературі майже не обгово-

<sup>1</sup> Дещо інший підхід, який теж називають двочастинковими рівняннями Дірака (вживаючи, однак термін “рівняння” у множині) запропоновано Сазджаном [18] та Крагером і ван Алстїном [19]. На відміну від рівняння типу Брайта, тут система двох частинок описується не одним, а двома рівняннями типу Дірака, структура яких в першу чергу обумовлена математичною вимогою сумісності, а вже потім - фізичним змістом взаємодії. Такі рівняння тут не розглядаються.

<sup>2</sup> В рівняннях квантово-польового походження, таких як рівняння Бете-Салпетера [2, 23, 24] або квазі-потенціальні [25–27], взаємодія описується складним інтегральним оператором в імпульсному представленні.

рювалися.

У цій роботі здійснюється радіальна редукція 2ЧРД з загальним двоферміонним потенціалом, локальним у координатному представленні. Такий потенціал, що включає усі згадані вище приклади як часткові випадки, отримано Нікітіним та Фушичем [30] з вимоги обертової інваріантності рівняння<sup>3</sup>. З фізичних міркувань ми обмежуємо цей потенціал до ермітового, і явно параметризуємо 48-ма дійсними скалярними функціями відстані між частинками.

Радіальна редукція 2ЧРД з таким потенціалом здійснюється за відомою схемою [5, 21] (див. також [7–9, 11, 13, 15–17]), яка приводить до системи 8-ми диференційних рівнянь 1-го порядку. Подальша низка перетворень – спочатку до системи 4-х диференційних рівнянь 1-го порядку, а потім – до пари рівнянь 2-го порядку – дозволяє явно прослідкувати появу нефізичних сингулярностей, і звести задачу до зручного для аналізу вигляду.

Таким шляхом знаходимо клас потенціалів, для яких одержана система рівнянь не є патологічна, а серед них – точно розв’язувані випадки, що є узагальненнями відомих у літературі діраківських осциляторів [31–33].

Для решти випадків пропонується псевдопертурбативний метод розв’язування 2ЧРД із застосуванням розкладів за  $1/j$  (де  $j$  – квантове число повного моменту імпульсу системи), який є застосовний до випадку сильного зв’язку і нечутливий до існування особливих точок крайової задачі. Метод узагальнює техніку розкладів за  $1/N$  [34–36] або  $1/\ell$  [37, 38] на випадок двох зв’язаних рівнянь із нелінійною залежністю від спектрального параметру.

Результати точного та псевдопертурбативного аналізу 2ЧРД застосовуються до опису спектрів легких мезонів. Спочатку будується точно розв’язувана модель із потенціалом, що є суперпозицією лінійного та кулонівського членів із складною спіновою структурою. Далі методом  $1/j$  розглядається кілька моделей із різними лінійними потенціалами скалярного типу і кулонівськими – векторного типу. Отримані точні та наближені спектри аналізуються і порівнюються із реальними спектрами легких мезонів.

<sup>3</sup>Обертова інваріантність є залишковою симетрією після переходу у систему відліку центра мас.

## 2. Загальна структура потенціалу

В системі відліку центра інерції 2ЧРД має вигляд:

$$\{h_1(\mathbf{p}) + h_2(-\mathbf{p}) + U(\mathbf{r}) - E\} \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.1)$$

де  $\Phi(\mathbf{r})$  є 16-компонентною хвильовою функцією (діраківським  $4 \times 4$ -біспінором), залежним від відносного радіус-вектора  $\mathbf{r}$ ,

$$h_a(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\alpha}_a \cdot \mathbf{p} + m_a \beta_a \equiv -i \boldsymbol{\alpha}_a \cdot \nabla + m_a \beta_a, \quad a = 1, 2, \quad (2.2)$$

є діраківськими намільтоніанами вільних частинок з масами  $m_a$ ,  $a = 1, 2$ ,  $\mathbf{p} = -i \nabla$ , а  $U(\mathbf{r})$  – потенціал взаємодії. Якщо скористатися  $4 \times 4$ -матричним представленням для  $\Phi(\mathbf{r})$ , то оператори  $\boldsymbol{\alpha}_a$  та  $\beta_a$  діють так:  $\boldsymbol{\alpha}_1 \Phi = \boldsymbol{\alpha} \Phi$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_2 \Phi = \Phi \boldsymbol{\alpha}^T$  і т.д., де  $\boldsymbol{\alpha}$  та  $\beta$  – матриці Дірака.

Потенціал  $U(\mathbf{r})$  є мультиплікативним оператором в координатному представленні, інваріантним щодо просторових поворотів та інверсій. В [30] подано найбільш загальний вигляд такого потенціалу:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{A=1}^{48} U_A(r) \Gamma_A. \quad (2.3)$$

Він параметризується 48-ма довільними (взагалі кажучи, комплексними) функціями  $U_A(r)$  відстані між частинками  $r = |\mathbf{r}|$  (будемо називати їх парціальними потенціалами), а матриці  $\Gamma_A$  будуються в термінах матриць Дірака та одиничного вектора  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ .

У цій роботі будемо вимагати, щоби потенціал  $U$  був ермітовим у скалярному добутку

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int d^3r \text{Tr}(\Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r})), \quad (2.4)$$

а, отже, рівняння (2.1) – гамільтоновим. Вимога ермітовості зменшує довільність загального потенціалу до 48-ми дійсних довільних парціальних потенціалів.

Нижче ми пропонуємо ермітів базис для матриць  $\Gamma$ , що входять у загальний потенціал. Скористаємось для матриць Дірака співвідношенням  $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^5 \boldsymbol{\sigma}$ , де компоненти  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) вектора  $\boldsymbol{\sigma}$  можна розуміти або як  $2 \times 2$ -матриці Паулі, або як блок-діагональні  $4 \times 4$ -матриці  $\text{diag}(\sigma_i, \sigma_i)$  (що не повинно привести до непорозумінь). Цим самим  $\boldsymbol{\alpha}$  умовно розділено на два множники, один з яких діє на “частинково-античастинкові” ступені вільності, а інший – на власне спінові ступені вільності. Назвемо умовно ці множники *діраківським* та *спіновим* відповідно. Подібно можна вчинити і з іншими матрицями Дірака чи їх добутками. Тепер враховуючи, що при поворотах

та інверсіях  $\beta$  веде себе як скаляр,  $\gamma^5$  – як псевдо-скаляр,  $\mathbf{n}$  – як вектор,  $\boldsymbol{\sigma}$  – як псевдо-вектор, зручно побудувати шуканий базис у вигляді добутку діраківського та спінового множників:

$$\Gamma_{ee} = \{I, \beta_1, \beta_2, \beta_1\beta_2\} \times S, \quad \Gamma_{oo} = \gamma_1^5 \gamma_2^5 \times \Gamma_{ee}, \quad (2.5)$$

$$\Gamma_{eo} = \{I, \beta_1, i\beta_2, i\beta_1\beta_2\} \times \gamma_2^5 \times T, \quad \Gamma_{oe} : 1 \leftrightarrow 2, \quad (2.6)$$

де  $I$  – одиничний оператор,

$$S = \{S_{(i)}, i = 1, 2, 3\} \equiv \{I, \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2, (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n})\} \quad (2.7)$$

– множина скалярних, а

$$T = \{T_{(i)}, i = 1, 2, 3\} \equiv \{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}, (\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2)\} \quad (2.8)$$

– псевдоскалярних спінових множників. Матриці  $\Gamma$  в (2.5)–(2.6) згруповано, згідно з класифікацією Храпливого [39], у парно-парні оператори  $\Gamma_{ee}$ , непарно-непарні  $\Gamma_{oo}$ , парно-непарні  $\Gamma_{eo}$  та непарно-парні  $\Gamma_{oe}$ . Усі інші  $O(3)$ -інваріантні ермітові матриці, побудовані у термінах матриць Дірака та вектору  $\mathbf{n}$ , виражаються через (2.5)–(2.6). Відповідно, і в потенціалі (2.3) можна виділити 4 доданки  $U_{ee}$ ,  $U_{oo}$ ,  $U_{eo}$  та  $U_{oe}$ .

Зручно перейти від матричного до блок-векторного представлення хвильової функції, розгорнувши у вектор її “частинково-античастинкові” ступені вільності:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} s(\mathbf{r}) & t(\mathbf{r}) \\ u(\mathbf{r}) & v(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad \dashrightarrow \quad \begin{bmatrix} s(\mathbf{r}) \\ t(\mathbf{r}) \\ u(\mathbf{r}) \\ v(\mathbf{r}) \end{bmatrix}; \quad (2.9)$$

тут  $s(\mathbf{r})$  –  $2 \times 2$ -спінорна матриця, що є велико-великою компонентою хвильової функції (згідно з термінологією Храпливого [39]), а  $t(\mathbf{r})$ ,  $u(\mathbf{r})$  і  $v(\mathbf{r})$  – відповідно велико-мала, мало-велика і мало-мала компоненти  $\Phi(\mathbf{r})$ .

У цьому представленні структуру загального потенціалу (2.3) можна описати компактніше, зібравши 48 парціальних потенціалів  $U_A(r)$  у меншу кількість матричних діраківських мультиплетів – парно-парних, парно-непарних і т. д. Кожен такий мультиплет містить парціальні потенціали, що мають спільний спіновий множник:

$$\begin{aligned} U &= U_{ee} + U_{oo} + U_{eo} + U_{oe} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \left( \Delta_{ee}^{(i)} + \Delta_{oo}^{(i)} \right) S_{(i)} + \left( \Omega_{eo}^{(i)} + \Omega_{oe}^{(i)} \right) T_{(i)} \right\}, \quad (2.10) \end{aligned}$$

де (упускаючи індекс  $i$ )

$$\Delta_{ee} = \begin{bmatrix} U_{11} & & & \\ & U_{22} & & \\ & & U_{33} & \\ 0 & & & U_{44} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\Delta_{oo} = \begin{bmatrix} 0 & & & W_{14} \\ & & W_{23} & \\ & & & \\ * & W_{23} & & \\ * & & & 0 \\ W_{14} & & & \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\Omega_{eo} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & & \\ * & & 0 & \\ 0 & & 0 & W_{34} \\ 0 & & * & \\ W_{12} & & & \\ * & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

$$\Omega_{oe} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & & W_{13} & 0 \\ * & & 0 & W_{24} \\ 0 & & & \\ W_{13} & 0 & & \\ * & & & \\ 0 & & * & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

де матричні елементи  $U_{\alpha\beta}$  є дійсними, а  $W_{\alpha\beta}$  – комплексними функціями від  $r$  (зірочка “\*” позначає комплексне спряження), і мається на увазі, що кожен елемент множиться на одиничний спіновий оператор  $I$ . З огляду на структуру діраківських множників потенціали  $U_{ee}$  і  $U_{oo}$  (та їх суперпозиції) будемо називати *власними*, а  $U_{eo}$  і  $U_{oe}$  – *невласними*.

Щоб переконатися в еквівалентності представлень (2.3) і (2.10) потенціалу  $U$  зауважимо, що діраківські множники  $\Delta = \Delta_{ee} + \Delta_{oo}$  і  $\Omega = \Omega_{eo} + \Omega_{oe}$  повинні бути ермітовими матрицями, причому власний множник  $\Delta$  – скаляром, а невластний  $\Omega$  – псевдоскаляром щодо просторової інверсії. Дія перетворення інверсії на діраківські множники  $\Delta$  і  $\Omega$  визначається оператором  $\beta_1\beta_2$ , який у даному представленні має вигляд:

$$\beta_1\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.15)$$

тут  $1$  – одинична  $2 \times 2$  матриця. Легко переконатися, що  $\beta_1\beta_2\Delta\beta_1\beta_2 = \Delta$ ,  $\beta_1\beta_2\Omega\beta_1\beta_2 = -\Omega$ . Оскільки сума  $\Delta + \Omega$  є ермітовою  $4 \times 4$ -матрицею загального вигляду, то  $\Delta$  є найзагальнішою ермітовою

$4 \times 4$ -матрицею скалярного типу, а  $\mathbf{\Omega}$  – псевдо-скалярного типу. Кожна з матриць (2.11)–(2.14) містить по 4 дійсних або 2 комплексних довільних функцій  $r$ , і таких квадруплетів у виразі (2.10) міститься  $4 \times 3 = 12$ , що еквівалентно наявності 48-ми парціальних потенціалів у (2.3).

Розглянемо нерелятивістичне наближення 2ЧРД (2.1) з загальним потенціалом (2.3), застосувавши перетворення Фолді-Вайтгаузена-Храпливого [39]. У результаті отримаємо гамільтоніан:  $H_{\text{nr}} = \sum_{a=1}^2 \beta_a (m_a + \mathbf{p}^2/2m_a) + U_{ee}$ , який після проєктування на додатньо-енергетичні стани приводить до рівняння Шредингера з потенціалом

$$\begin{aligned} U_{\text{nr}}(\mathbf{r}) &= U_{11}^{(i)}(r)S_{(i)} \\ &= U_{11}^{(1)}(r) + U_{11}^{(2)}(r)\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + U_{11}^{(3)}(r)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Таким чином, із 48-ми парціальних потенціалів, що містяться у виразах (2.10)–(2.14), у нерелятивістичній границі виживає 3.

Найцікавішими з фізичного погляду є потенціали, що допускають теоретико-польову інтерпретація взаємодії. Зокрема, потенціали, що відображають векторну структуру взаємодії, використовуються в задачах електродинаміки, скалярна структура з'являється в потенціальних моделях гадронів і т.д.

### 3. Радіальна редукція 2ЧРД

Здійсимо радіальну редукцію 2ЧРД, подібно до робіт [5, 21]. Виберім  $F(\mathbf{r})$  власною функцією квадрату  $\mathbf{j}^2$  і компоненти  $j_3$  повного моменту імпульсу системи  $\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \mathbf{s} = -i\mathbf{r} \times \nabla + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$  та парності  $P$ , і представимо її у блок-векторному вигляді:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} i s_1(r)\phi^A(\mathbf{n}) + i s_2(r)\phi^0(\mathbf{n}) \\ t_1(r)\phi^-(\mathbf{n}) + t_2(r)\phi^+(\mathbf{n}) \\ u_1(r)\phi^-(\mathbf{n}) + u_2(r)\phi^+(\mathbf{n}) \\ i v_1(r)\phi^A(\mathbf{n}) + i v_2(r)\phi^0(\mathbf{n}) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

для парності  $P = (-)^{j \pm 1}$ , та

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} i s_1(r)\phi^-(\mathbf{n}) + i s_2(r)\phi^+(\mathbf{n}) \\ t_1(r)\phi^A(\mathbf{n}) + t_2(r)\phi^0(\mathbf{n}) \\ u_1(r)\phi^A(\mathbf{n}) + u_2(r)\phi^0(\mathbf{n}) \\ i v_1(r)\phi^-(\mathbf{n}) + i v_2(r)\phi^+(\mathbf{n}) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

для парності  $P = (-)^j$ . Тут біспінорні гармоніки  $\phi^A(\mathbf{n})$  відповідають повному спінові  $s = 0$  та орбітальному моменту  $\ell = j$ , а  $\phi^0(\mathbf{n})$ ,

$\phi^-(\mathbf{n})$ ,  $\phi^+(\mathbf{n})$  відповідають триплетові з  $s = 1$  та  $\ell = j, j+1, j-1$ . Явний вигляд та властивості біспінорних гармонік подано в Додатку А. Тоді для  $j > 0$  задача на власні стани (2.1) зводиться до системи 8-ми диференціальних рівнянь 1-го порядку із шуканими функціями  $s_1(r) \dots v_2(r)$  та власним значенням енергії  $E$ .

Представимо цю систему у матричному вигляді, означивши 8-вимірну вектор-функцію  $\Phi(r) = \{s_1(r), s_2(r), t_1(r), \dots, v_2(r)\}$ :

$$\left\{ \mathbf{H}(j) \frac{d}{dr} + \mathbf{V}(r, E, j) \right\} \Phi(r) = 0. \quad (3.3)$$

Тут  $8 \times 8$ -матриці  $\mathbf{H}(j)$  та

$$\mathbf{V}(r, E, j) = \mathbf{G}(j)/r + \mathbf{m} + \mathbf{U}(r, j) - E\mathbf{I} \quad (3.4)$$

мають властивості:  $\mathbf{H}$  – дійсна,  $\mathbf{H}^T = -\mathbf{H}$ ;  $\mathbf{V}$  – ермітова:  $\mathbf{V}^\dagger = \mathbf{V}$ ;  $\mathbf{I}$  – одинична  $8 \times 8$  матриця; діагональна матриця

$$\mathbf{m} = \text{diag}(m_{+1}, m_{-1}, -m_{-1}, -m_{+1}) \quad (3.5)$$

(тут  $m_{\pm} = m_1 \pm m_2$ , а  $\mathbf{I}$  – одинична  $2 \times 2$  матриця) та  $j$ -і  $P$ -залежні матриці  $\mathbf{H}(j)$ ,  $\mathbf{G}(j)$  є сталими (тобто незалежними від  $r$ ), а  $\mathbf{U}(r, j)$  представляє потенціал (2.3). Оператор у лівій частині (3.3) є ермітовим щодо скалярного добутку:

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_0^\infty dr \left( \Psi^\dagger(r) \Phi(r) \right), \quad (3.6)$$

індукованого (2.4). У випадку  $j = 0$  компоненти  $s_2 = t_2 = u_2 = v_2 = 0$  так що вимірність задачі (3.3) зменшується з 8 до 4.

Усі згадані вище матриці зручно подати у блок-матричному вигляді. Для цього біспінорні гармоніки об'єднаємо у два дублети з різними парностями:

$$\hat{\phi} = \begin{bmatrix} \phi^A \\ \phi^0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \phi^- \\ \phi^+ \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

так що хвильові функції (3.1), (3.2) запишуться як:

$$\Phi = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} i(s, \hat{\phi}) \\ (t, \hat{\mathbf{e}}) \\ (u, \hat{\mathbf{e}}) \\ i(v, \hat{\phi}) \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^{j \pm 1}, \quad \Phi = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} i(s, \hat{\mathbf{e}}) \\ (t, \hat{\phi}) \\ (u, \hat{\phi}) \\ i(v, \hat{\mathbf{e}}) \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^j; \quad (3.8)$$

тут  $(s, \delta) = s_1 \phi^A + s_2 \phi^0$  і т.д. Тепер враховуючи властивості біспінорних гармонік (див. [5, 21] та Додаток А) і означивши величини:

$$A = \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}, \quad B = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}, \quad C = \sqrt{j(j+1)}, \quad (3.9)$$

та  $2 \times 2$ -матриці:

$$\sigma_{\uparrow} = \frac{1}{2}(I + \sigma_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{\downarrow} = \frac{1}{2}(I - \sigma_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \quad (R \in O(2)), \quad (3.11)$$

отримаємо у цих термінах:

$$\mathbf{G} = - \begin{bmatrix} 0 & R(j+\sigma_{\uparrow}) & R^T(j\sigma_3+\sigma_{\uparrow}) & 0 \\ (j+\sigma_{\uparrow})R^T & 0 & 0 & (j\sigma_3+\sigma_{\uparrow})R \\ (j\sigma_3+\sigma_{\uparrow})R & 0 & 0 & (j+\sigma_{\uparrow})R^T \\ 0 & R^T(j\sigma_3+\sigma_{\uparrow}) & R(j+\sigma_{\uparrow}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -R\sigma_3 & -R^T & 0 \\ \sigma_3 R^T & 0 & 0 & R \\ R & 0 & 0 & \sigma_3 R^T \\ 0 & -R^T & -R\sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^{j\pm 1} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & (j+\sigma_{\uparrow})R^T & (j\sigma_3+\sigma_{\uparrow})R & 0 \\ R(j+\sigma_{\uparrow})\sigma_3 & 0 & 0 & R^T(j\sigma_3+\sigma_{\uparrow}) \\ R^T(j\sigma_3+\sigma_{\uparrow}) & 0 & 0 & R(j+\sigma_{\uparrow}) \\ 0 & (j\sigma_3+\sigma_{\uparrow})R & (j+\sigma_{\uparrow})R^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_3 R^T & -R & 0 \\ R\sigma_3 & 0 & 0 & R^T \\ R^T & 0 & 0 & R\sigma_3 \\ 0 & -R & -\sigma_3 R^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^j. \quad (3.15)$$

Щоб описати потенціал взаємодії (2.10)-(2.14) у матричному представленні, залишається обчислити дію спінових операторів на біспінорні дублети. Для власних потенціалів отримаємо:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S & & & 0 \\ & \Sigma & & \\ 0 & & \Sigma & \\ & & & S \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^{j\pm 1}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \Sigma & & & 0 \\ & S & & \\ 0 & & S & \\ & & & \Sigma \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^j, \quad (3.17)$$

де  $2 \times 2$ -блоки  $\mathbf{S}$  та  $\Sigma$  є такими:

$i$	1	2	3
$S_{(i)}$	$I$	$\sigma_1 \cdot \sigma_2$	$(\sigma_1 \cdot \mathbf{n})(\sigma_2 \cdot \mathbf{n})$
$\mathbf{S}_{(i)}$	$I$	$\tau$	$-\sigma_3$
$\Sigma_{(i)}$	$I$	$I$	$-R\sigma_3 R^T$

(3.18)

Для невласних потенціалів маємо:

$$\mathbf{T} = i \begin{bmatrix} \mathbb{T} & & & 0 \\ & -\mathbb{T}^\dagger & & \\ 0 & & -\mathbb{T}^\dagger & \\ & & & \mathbb{T} \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^{j\pm 1}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{T} = i \begin{bmatrix} \mathbb{T}^\dagger & & & 0 \\ & -\mathbb{T} & & \\ 0 & & -\mathbb{T} & \\ & & & \mathbb{T}^\dagger \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^j, \quad (3.20)$$

де  $2 \times 2$ -блок  $\mathbb{T}$  є таким:

$i$	1	2	3
$T_{(i)}$	$\sigma_1 \cdot \mathbf{n}$	$\sigma_2 \cdot \mathbf{n}$	$(\mathbf{n}, \sigma_1, \sigma_2)$
$\mathbb{T}_{(i)}$	$R$	$-R\sigma_3$	$-2i R\sigma_{\uparrow}$

(3.21)

Отже, загальний потенціал має вигляд:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \left( \mathbf{\Delta}^{(i)} \mathbf{S}_{(i)} + \mathbf{\Omega}^{(i)} \mathbf{T}_{(i)} \right). \quad (3.22)$$

Нагадаємо, що матриці  $\mathbf{\Delta}^{(i)}$  і  $\mathbf{\Omega}^{(i)}$  виду:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} U_{11} & 0 & 0 & W_{14} \\ 0 & U_{22} & W_{23} & 0 \\ 0 & * & W_{23} & U_{33} \\ * & W_{14} & 0 & 0 \\ & & & U_{44} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} & 0 \\ * & W_{12} & 0 & 0 \\ * & W_{13} & 0 & 0 \\ 0 & * & W_{24} & * \\ & & & W_{34} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

де  $U_{\alpha\beta}$  – довільні дійсні, а  $W_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} + iY_{\alpha\beta}$  – комплексні функції  $r$ , становлять 3 власних і 3 невластних октега дійсних парціальних потенціалів.

У випадку  $j = 0$  в усіх  $2 \times 2$ -блоках, що входять в матриці системи (3.3), слід залишити лише лівий верхній елемент, поклавши у ньому  $j = 0$ .

#### 4. Редукція радіальної системи до рівнянь 2-го порядку

Виявляється, що  $\text{rank } \mathbf{H} = 4$  (2 у випадку  $j = 0$ ). Іншими словами, лише 4 з 8-ми рівнянь (3.3) (2 з 4-х) є диференційними, решта – алгебричні співвідношення. Їх можна розділити з допомогою ортогонального перетворення (з групи  $O(8)$ ):

$$\bar{\Phi} = \mathbf{O}\Phi, \quad \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{O}\mathbf{H}\mathbf{O}^T \quad \text{і т.д.}, \quad (4.1)$$

що очевидно зберігає скалярний добуток (3.6) і явно виділяє нетривіальний мінор матриці  $\mathbf{H}$ . Запропонована в Додатку В матриця  $\mathbf{O}$  зводить  $\mathbf{H}$  до незалежного від парності  $P$  канонічного вигляду:

$$\bar{\mathbf{H}} = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

де  $\mathbf{J}^{(2)}$  – симплектична  $4 \times 4$ -матриця

$$\mathbf{J}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Вигляд інших перетворених матриць подано також в Додатку В. Тут лише зазначимо, що матриця загального потенціалу  $\bar{\mathbf{U}}$  набуває діагонально-блочного вигляду:

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{W}_{12} & \mathbf{W}_{13} & \mathbf{W}_{14} \\ * & \mathbf{U}_{22} & \mathbf{W}_{23} & \mathbf{W}_{24} \\ \mathbf{W}_{13} & * & * & * \\ * & \mathbf{W}_{24} & * & \mathbf{U}_{44} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

де  $U_{\alpha\beta}$  – дійсні, а  $W_{\alpha\beta}$  – комплексні діагональні  $2 \times 2$ -блоки, взагалі кажучи різні для різних парностей. Загальна кількість дійсних парціальних потенціалів – 32 для  $P = (-)^{j \pm 1}$  і 32 для  $P = (-)^j$ , однак серед них лише 48 є незалежних.

Надалі зручно 8-вимірні вектори та матриці представляти в термінах 4-вимірних блоків:

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_{11} & \bar{\mathbf{V}}_{12} \\ \bar{\mathbf{V}}_{21} & \bar{\mathbf{V}}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

і т.д. (що вже фактично здійснено в (4.2)). В цих термінах система (3.3) набуває вигляду:

$$2\mathbf{J}^{(2)}\bar{\Phi}'_1 + \bar{\mathbf{V}}_{11}\bar{\Phi}_1 + \bar{\mathbf{V}}_{12}\bar{\Phi}_2 = 0, \quad (4.6)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{21}\bar{\Phi}_1 + \bar{\mathbf{V}}_{22}\bar{\Phi}_2 = 0. \quad (4.7)$$

Виключивши  $\bar{\Phi}_2$  з (4.6) з допомогою (4.7), отримаємо систему диференційних рівнянь для 4-вектора  $\bar{\Phi}_1$ :

$$\left\{ \mathbf{J}^{(2)} \frac{d}{dr} + \mathbf{V}^\perp(r, E, j) \right\} \bar{\Phi}_1(r) = 0, \quad (4.8)$$

де

$$\mathbf{V}^\perp = (\bar{\mathbf{V}}_{11} - \bar{\mathbf{V}}_{12}\bar{\Lambda}\bar{\mathbf{V}}_{21})/2, \quad \bar{\Lambda} = [\bar{\mathbf{V}}_{22}]^{-1}, \quad (4.9)$$

а 4-вектор  $\bar{\Phi}_2$  визначається тоді з алгебричного співвідношення  $\bar{\Phi}_2 = -\bar{\Lambda}\bar{\mathbf{V}}_{21}\bar{\Phi}_1$ .

Тепер представляємо 4-вектор  $\bar{\Phi}_1$  у  $2+2$ -блочному вигляді:

$$\bar{\Phi}_1(r) = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

виключаємо  $\Phi_2$  і приходимо до системи диференційних рівнянь 2-го порядку для 2-вектора  $\Phi_1$ :

$$\mathbf{L}_1(E)\Phi_1 = \left\{ \left( \frac{d}{dr} + \mathbf{V}_{12} \right) [\mathbf{V}_{22}]^{-1} \left( \frac{d}{dr} - \mathbf{V}_{21} \right) + \mathbf{V}_{11} \right\} \Phi_1 = 0. \quad (4.11)$$

З означення матриці  $\mathbf{V}^\perp$  (4.10), (4.9) та вигляду її складових (B.7), (B.8) і (4.5) випливає, що її блок  $\mathbf{V}_{22}$  є діагональним. Це дає змогу спростити систему (4.11) до шредингеро-подібного вигляду, зручного у застосуваннях. Для цього в першу чергу покладімо:

$$\tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 / \sqrt{\mathbf{V}_{22}}, \quad \tilde{\mathbf{L}}_1(E) = \sqrt{\mathbf{V}_{22}}\mathbf{L}_1(E)\sqrt{\mathbf{V}_{22}}, \quad (4.12)$$

де квадратний корінь з матриці обчислюється по-елементно. Рівняння (4.11) набуває вигляду  $\tilde{\mathbf{L}}_1(E)\tilde{\Phi}_1 = 0$ , де

$$\tilde{\mathbf{L}}_1(E) = \left( \frac{d}{dr} + \mathbf{M} \right) \left( \frac{d}{dr} - \mathbf{M}^\dagger \right) + \mathbf{Z}, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
Z &= \sqrt{V_{22}}V_{11}\sqrt{V_{22}} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( M \frac{V'_{22}}{V_{22}} + \frac{V'_{22}}{V_{22}} M^\dagger \right) + \frac{1}{2} \frac{V''_{22}}{V_{22}} - \frac{3}{4} \left( \frac{V'_{22}}{V_{22}} \right)^2, \\
M &= \sqrt{V_{22}}V_{12} / \sqrt{V_{22}}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Представимо тепер перший член оператора (4.13) у вигляді:

$$\left( \frac{d}{dr} + M \right) \left( \frac{d}{dr} - M^\dagger \right) = \left( \frac{d}{dr} + A \right)^2 - B^2 - B' - [A, B], \tag{4.15}$$

де  $A$  та  $B$  - відповідно антиермітова та ермітова частини  $M$ :

$$A = \frac{1}{2}(M - M^\dagger) = -A^\dagger, \quad B = \frac{1}{2}(M + M^\dagger) = B^\dagger. \tag{4.16}$$

Якщо  $M$  ермітова, то оператор (4.13) не містить 1-ї похідної. В іншому разі спробуємо усунути її перетворенням:

$$\bar{\Phi}_1 = C^{-1}\tilde{\Phi}_1, \quad \bar{L}_1 = C^{-1}\tilde{L}_1C, \tag{4.17}$$

таким, що

$$C^{-1} \left( \frac{d}{dr} + A \right) C \equiv \frac{d}{dr} + C^{-1} (C' + AC) = \frac{d}{dr}. \tag{4.18}$$

Звідси випливає рівняння на  $C$ :

$$C' + AC = 0, \tag{4.19}$$

що має розв'язок:

$$C = \text{Texp} \left( - \int dr A \right) = \text{Texp} \left( - \frac{1}{2} \int dr (M - M^\dagger) \right). \tag{4.20}$$

З антиермітовості  $A$  впливає унітарність  $C$ .

Тепер оператор

$$\bar{L}_1(E) = \frac{d^2}{dr^2} - W, \tag{4.21}$$

$$W = C^\dagger (B^2 + B' + [A, B] - Z) C \tag{4.22}$$

має матрично-двочленний вигляд, як і відповідне рівняння.

Якщо замість  $\Phi_2$  із системи (4.8) виключити  $\Phi_1$ , прийдемо до системи для 2-вектора  $\Phi_2$ :

$$L_2(E)\Phi_2 = \left\{ \left( \frac{d}{dr} - V_{21} \right) [V_{11}]^{-1} \left( \frac{d}{dr} + V_{12} \right) + V_{22} \right\} \Phi_2 = 0. \tag{4.23}$$

Оскільки блок  $V_{11}$ , взагалі кажучи, не є діагональним (на відміну від  $V_{22}$ ), то система (4.23) виявляється складнішою, ніж (4.11). Вона, однак, теж може бути корисною в застосуваннях.

## 5. Пошуки точно розв'язуваних моделей

Система 2-го порядку (4.11) є зручною для пошуку потенціалів, що допускають точні розв'язки 2ЧРД. Кілька випадків, розв'язуваних при певних значеннях  $j$  і  $P$ , вказано в [16]; два цілком розв'язувані приклади – 2-частинкові діраківські осцилятори [32, 33] з лінійним за  $r$  потенціалом. Нас цікавлять їх узагальнення.

Зауважимо, що у вільночастинковому випадку матриця  $V_{22}$ , що входить в ліву частину системи (4.11), є сталою. Будемо вимагати, щоб і у випадку взаємодії  $V_{22}$  не залежала від  $r$  (інакше система (4.11) дуже ускладнюється). Достатніми для цього умовами на блок-матричні елементи потенціалу (4.4) є:

$$U_{22} = U_{33} = W_{23} = W_{24} = W_{34} = 0. \tag{5.1}$$

Враховуючи розклад потенціалу  $\mathbf{U}$  на октети (3.22)–(3.24), (B.9)–(B.18), знаходимо найбільш загальний його вигляд, коли умови (5.1) виконуються для усіх  $P$ . Він параметризується 8-ма дійсними парціяльними потенціалами  $U_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, 8$ ), та 5-ма комплексними  $W^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $W_2$  і  $W_4$ , пов'язаними з потнціалами (B.11) і (B.16) так:

$$\begin{aligned}
U_\alpha^{(1)} &= U_\alpha, & U_\alpha^{(2)} &= -U_\alpha, & U_\alpha^{(3)} &= 0, & \alpha &= 1, \dots, 8, \\
W_1^{(i)} &= W^{(i)}, & & & & & i &= 1, 2, 3, \\
W_2^{(1)} &= -iW_2, & W_2^{(2)} &= iW_2, & W_2^{(3)} &= W_1, & & \\
W_3^{(1)} &= -W^{(2)}, & W_3^{(2)} &= -W^{(1)}, & W_3^{(3)} &= W^{(3)}, & & \\
W_4^{(1)} &= iW_1, & W_4^{(2)} &= -iW_1, & W_4^{(3)} &= -W_2. & & 
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Розклавши комплексні потенціали на дійсні та уявні частини:  $W = X + iY$ , отримаємо 18 дійсних парціяльних потенціалів, що параметризують повний потенціал  $U$ . У термінах матриць Дірака він має вигляд:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \{ U_1(1 + \beta_1\beta_2) + U_2(1 - \beta_1\beta_2) + U_3(\beta_1 + \beta_2) + U_4(\beta_1 - \beta_2) \\
&\quad + [U_5(1 + \beta_1\beta_2) + U_6(1 - \beta_1\beta_2) \\
&\quad - U_7 i(\beta_1 + \beta_2) + U_8 i(\beta_1 - \beta_2)] \gamma_1^5 \gamma_2^5 \} (1 - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \\
&\quad + \left\{ X^{(1)} + Y^{(1)} i \beta_1 \beta_2 - [X^{(2)} + Y^{(2)} i \beta_1 \beta_2] \gamma_1^5 \gamma_2^5 \right\} (\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) \cdot \mathbf{n} \\
&\quad + \left\{ X^{(3)} + Y^{(3)} i \beta_1 \beta_2 \right\} (\gamma_1^5 + \gamma_2^5) (\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{n} \\
&\quad - i \{ [X_1 + Y_1 i \beta_1 \beta_2] \beta_2 \gamma_2^5 + [X_2 + Y_2 i \beta_1 \beta_2] \beta_1 \gamma_1^5 \} \times \\
&\quad \times (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2 + i \boldsymbol{\alpha}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_2) \cdot \mathbf{n},
\end{aligned} \tag{5.3}$$



а у матричному представленні (4.4):

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_1\sigma_\uparrow & \mathfrak{f} & w_1\sigma_\uparrow & w_2\sigma_\uparrow \\ * & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{f} & 0 & 0 & 0 \\ w_1\sigma_\uparrow & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ w_2\sigma_\uparrow & 0 & 0 & u_2\sigma_\uparrow \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

де  $\mathfrak{f} = f_\uparrow\sigma_\uparrow + f_\downarrow\sigma_\downarrow$ ,

$$\begin{aligned} u_1 &= 4(U_1 + U_5), & u_2 &= 4(U_1 - U_5), \\ w_1 &= 4(W_1 - W_2), & w_2 &= 4(U_3 + iU_7), \\ f_\uparrow &= 4W^{(3)} - 2i(W^{(1)} - W^{(2)}), \\ f_\downarrow &= -2i(W^{(1)} + W^{(2)}) \quad \text{для } P = (-)^{j\pm 1}, \\ \\ u_1 &= 4(U_2 + U_6), & u_2 &= 4(U_2 - U_6), \\ w_1 &= 4(W_1 + W_2), & w_2 &= 4(U_4 + iU_8), \\ f_\uparrow &= -4W^{*(3)} + 2i(W^{*(1)} - W^{*(2)}), \\ f_\downarrow &= 2i(W^{*(1)} + W^{*(2)}) \quad \text{для } P = (-)^j. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Тепер систему (4.11) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{2} (F - F^*) \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} \left( E - \frac{\nu^2}{E} \right) \left[ E - \frac{\mu^2}{E} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left( u_1 + \frac{|w_1|^2 - \mu^2}{E} + \frac{|w_2 + \mu|^2}{E - u_2} \right) \sigma_\uparrow - \frac{2C}{Er} (w_1\sigma_+ + w_1^*\sigma_-) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4} |F|^2 - \frac{1}{2} F' - \frac{1}{2r} (F_\uparrow + F_\uparrow^*) \sigma_\uparrow - \frac{C^2}{r^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\nu C}{2Er} \left[ (F_\uparrow + F_\downarrow^*) \sigma_+ + (F_\downarrow + F_\uparrow^*) \sigma_- \right] \right\} \Phi_1 = 0, \quad (5.6) \end{aligned}$$

де  $\mu = m_\pm i$  і  $\nu = m_\mp$  для  $P = \mp(-)^j$ , а всі операції (диференціювання, комплексне спряження тощо) над діагональною матрицею

$$F = F_\uparrow\sigma_\uparrow + F_\downarrow\sigma_\downarrow = \mathfrak{f} + \frac{\nu}{E} w_1\sigma_\uparrow \quad (5.7)$$

здійснюються поелементно. Підстановка

$$\Phi_1 = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dr (F - F^*) \right\} \Psi \quad (5.8)$$

усуває 1-ші похідні з рівнянь (5.6) і зводить їх до системи

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{4} \left[ \left( E - \frac{\nu^2}{E} \right) \left( E - u_1 - \frac{y_1^2}{E} - \frac{|w_2 + \mu|^2}{E - u_2} \right) - g_\uparrow^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2 \left( \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) g_\uparrow + 2 \frac{\nu}{E} \left( g_\uparrow + \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) x_1 - x_1^2 \right] \sigma_\uparrow \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \left[ \left( E - \frac{\nu^2}{E} \right) \left( E - \frac{\mu^2}{E} \right) - g_\uparrow^2 - 2 \frac{d}{dr} g_\downarrow \right] \sigma_\downarrow - \frac{C^2}{r^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{C}{2r} \left[ x_1 - \frac{\nu}{E} (g_\uparrow + g_\downarrow + i(h_\uparrow - h_\downarrow)) \right] \sigma_+ \right. \\ & \quad \left. - \frac{C}{2r} \left[ x_1 - \frac{\nu}{E} (g_\uparrow + g_\downarrow - i(h_\uparrow - h_\downarrow)) \right] \sigma_- \right\} \Psi = 0; \quad (5.9) \end{aligned}$$

тут функції (5.5) представлені через їх дійсні та уявні частини:

$$f = g + ih, \quad w = x + iy. \quad (5.10)$$

Потенціали  $u$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $g$  і  $h$  по-різному означені для різних парностей. Надалі величини, що стосуються випадку  $P = (-)^{j\pm 1}$ , позначатимемо індексом “+”, а випадку  $P = (-)^j$  – індексом “-” (якщо ж розглядається довільний випадок, або парність не суттєва, ці індекси упускатимуться). Тоді серед 20-ти функцій  $u_{i\pm}$ ,  $x_{i\pm}$ ,  $y_{i\pm}$  ( $i = 1, 2$ ),  $g_{\uparrow\pm}$  і  $h_{\uparrow\pm}$  лише 18 є незалежними, оскільки, згідно з (5.5) і (5.10),  $g_{\downarrow+} = g_{\downarrow-} \equiv g_\downarrow$  і  $h_{\downarrow+} = -h_{\downarrow-} \equiv h_\downarrow$ . Ці функції еквівалентно представляють 18 парціальних потенціалів  $U$ ,  $X$  і  $Y$ , що входять у вираз (5.3), і саме їх зручно підбирати при побудові точно розв’язуваних моделей. При цьому будемо прагнути до однієї з двох можливостей: коли система (5.9) розщеплюється на два незалежні рівняння, або коли її можна діагоналізувати.

### 5.1. Сім'я гармонічних осциляторів

Покладімо:

$$u_1 = u_2 = w_1 = w_2 = 0, \quad (5.11)$$

що з врахуванням співвідношень (5.5) дає:

$$U_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, 8, \quad (5.12)$$

$$W_1 = W_2 = 0. \quad (5.13)$$

Отже власна частина потенціалу (5.4) зникає, а невласна – частково обмежується. Додатково обмежимо її умовою:

$$g_\uparrow^2 = g_\downarrow^2, \quad (5.14)$$

що дає 4 можливості:

$$\begin{aligned} \text{Ia). } & g_{\downarrow} = g_{\uparrow+} = g_{\uparrow-}, & \text{Ib). } & g_{\downarrow} = g_{\uparrow+} = -g_{\uparrow-}, \\ \text{Ic). } & g_{\downarrow} = -g_{\uparrow+} = g_{\uparrow-}, & \text{Id). } & g_{\downarrow} = -g_{\uparrow+} = -g_{\uparrow-}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Почнемо з можливості Ia. З рівностей (5.5) отримаємо умови:

$$\text{Ia). } \quad Y^{(1)} \equiv Y, \quad Y^{(2)} = X^{(3)} = 0, \quad (5.16)$$

де  $Y$  а також решта парціяльних потенціалів  $X^{(1)}$ ,  $X^{(2)}$  і  $Y^{(3)}$  можуть бути довільними функціями. Покладімо тепер:

$$Y = ar, \quad X^{(2)} = br, \quad Y^{(3)} = cr, \quad (5.17)$$

де  $a$ ,  $b$  і  $c$  - сталі. Це відповідає повному потенціалу:

$$U = \left\{ X^{(1)}/r - b\gamma_1^5\gamma_2^5 + [i a + c(1 + \alpha_1 \cdot \alpha_2)] \beta_1\beta_2 \right\} (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot r. \quad (5.18)$$

Тоді система (5.9) набуває вигляду:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{4} \left( E - \frac{m_{\pm}^2}{E} \right) \left( E - \frac{m_{\mp}^2}{E} \right) - D - a^2 r^2 - \frac{C^2}{r^2} \right\} \Psi = 0, \quad (5.19)$$

де стали ермітову матрицю

$$D = \begin{bmatrix} 3a & -2\frac{m_{\mp}C}{E}[a + i(c \pm b)] \\ -2\frac{m_{\pm}C}{E}[a - i(c \pm b)] & a \end{bmatrix} \quad \text{для } P = \mp(-)^j \quad (5.20)$$

можна очевидно діагоналізувати до власних значень

$$\text{Ia). } \quad d_{\uparrow\pm} = 2a \pm \text{sgn } a \sqrt{a^2 + 4\frac{m_{\mp}^2 C^2}{E^2}[a^2 + (b \pm c)^2]}. \quad (5.21)$$

Тепер система (5.19) розщеплюється на два рівняння гармонічних осциляторів, і спектр визначається співвідношеннями (5.21) та

$$\frac{1}{4} \left( E - \frac{m_{\pm}^2}{E} \right) \left( E - \frac{m_{\mp}^2}{E} \right) - d_{\uparrow\pm} = |a|(2n+3), \quad n = j + 2n_r, \quad (5.22)$$

де  $n_r = 0, 1, \dots$  - радіальне квантове число. Для заданих  $j$  та  $n_r$  маємо 4 рівняння, що дають 4 додатніх значення енергії  $E_{\uparrow\pm}$ .

Аналогічно можна розглянути й решту можливостей (Ib)–(Id), вказаних в (5.15). У цих випадках парціяльні потенціали визначаються співвідношеннями (5.12), (5.17) і однією з альтернатив:

$$\begin{aligned} \text{Ib). } & Y^{(1)} = Y^{(2)} = X^{(3)} = \frac{1}{2}Y, \\ \text{Ic). } & Y^{(1)} = Y^{(2)} = -X^{(3)} = \frac{1}{2}Y, \\ \text{Id). } & Y^{(2)} = Y, \quad Y^{(1)} = X^{(3)} = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Хвильові рівняння мають вигляд (5.19) з дещо іншими матрицями  $D$ , які зводяться до таких власних значень:

$$\begin{aligned} \text{Ib). } & d_{\uparrow+} \text{ як в Ia (див.(5.21)),} \\ & d_{\uparrow-} = -a \mp 2 \text{sgn } a \sqrt{a^2 + \frac{m_{\pm}^2 C^2}{E^2}(b-c)^2}, \\ \text{Ic). } & d_{\uparrow+} = -a \mp 2 \text{sgn } a \sqrt{a^2 + \frac{m_{\mp}^2 C^2}{E^2}(b+c)^2}, \\ & d_{\uparrow-} \text{ як в Ia,} \\ \text{Id). } & d_{\uparrow+} \text{ як в Ic,} \quad d_{\uparrow-} \text{ як в Ib.} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Із цими виразами для  $d_{\uparrow\pm}$  рівняння (5.22) дає спектр решти моделей Ia–Id.

Ірраціональні рівняння (5.22), (5.21) зводяться до алгебричних рівнянь 4-го степеня. Вони мають взагалі кажучи громіздкі розв'язки, серед яких є і нефізичні, зокрема, від'ємні - подібно до випадку 1-частинкового рівняння Дірака.

Для безмасових частинок спектри описуються формулою:

$$E_{\uparrow\pm}^2 = 4[|a|(2n+3) + d_{\uparrow\pm}], \quad (5.25)$$

де сталі  $d_{\uparrow\pm}$  вже не залежать від  $E$  і для різних випадків є такі:

$$\begin{aligned} \text{Ia). } & d_{\uparrow+} = d_{\uparrow-} = 2a \pm a, \\ \text{Ib). } & d_{\uparrow+} \text{ як в Ia,} \quad d_{\uparrow-} = -a \mp 2a, \\ \text{Ic). } & d_{\uparrow+} \text{ як } d_{\uparrow-} \text{ в Ib,} \quad d_{\uparrow-} \text{ як } d_{\uparrow+} \text{ в Ia,} \\ \text{Id). } & d_{\uparrow+} = d_{\uparrow-} \text{ як } d_{\uparrow-} \text{ в Ib.} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Таким чином, у площині  $(E^2, j)$  рівні енергії  $E_{\uparrow\pm}$  лягають на паралельні прямі - так звані лінійні траєкторії Реже - з параметром нахилу  $8|a|$ . Основних траєкторій (що відповідають  $n_r = 0$ ) є 4, і кожна з них породжує дочірні траєкторії (з  $n_r = 1, 2, \dots$ ), так що усіх їх зручно класифікувати за сукупністю квантових чисел  $n_r, \uparrow\pm$ . Однак,

в залежності від моделі, різні стани з фіксованим  $j$  можуть бути виродженими, так що відповідні траєкторії можуть збігатися одна з одною. Приклади траєкторій Редже для безмасових моделей Ia–Id при додатній та від’ємній константі взаємодії  $a$  показані на Рис. 1 (де для наочності вироджені траєкторії дещо зміщені одна щодо іншої). При  $b = c = 0$  і  $m_1 = m_2$  моделі Ia і Id зводяться до двох відомих версій двочастинкових діраківських осциляторів [32] і [33] відповідно.

Іншу сім’ю осциляторів можна отримати, якщо покласти:

$$u_1 = u_2 = y_1 = w_2 = g_{\uparrow} = 0, \quad (5.27)$$

що з врахуванням співвідношень (5.5) дає (5.12) і

$$Y_1 = Y_2 = X^{(3)} = 0, \quad Y^{(1)} = Y^{(2)} = \frac{1}{2}Y. \quad (5.28)$$

Крім цього покладімо:

$$g_{\downarrow}^2 = x_{1+}^2 = x_{1-}^2, \quad (5.29)$$

що знову дає 4 можливості:

$$\begin{aligned} \text{Па). } & g_{\downarrow} = x_{1+} = x_{1-}, & \text{Пб). } & g_{\downarrow} = x_{1+} = -x_{1-}, \\ \text{Пс). } & g_{\downarrow} = -x_{1+} = x_{1-}, & \text{Пд). } & g_{\downarrow} = -x_{1+} = -x_{1-}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

тобто

$$\begin{aligned} \text{Па). } & X_1 = \frac{1}{2}Y, \quad X_2 = 0, & \text{Пб). } & X_1 = 0, \quad X_2 = -\frac{1}{2}Y, \\ \text{Пс). } & X_1 = 0, \quad X_2 = \frac{1}{2}Y, & \text{Пд). } & X_1 = -\frac{1}{2}Y, \quad X_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Разом з вибором парціальних потенціалів (5.16) це приводить до ще 4-х гармонічних осциляторів, що описуються рівняннями (5.19) з деякими матрицями  $D$ , а їх спектри – співвідношеннями (5.22) з відповідними  $d_{\uparrow\pm}$ .

Розглянемо тут лише випадок безмасових частинок. Тоді усі моделі дають спільний спектр:

$$\begin{aligned} a > 0 : & & a < 0 : & \\ E_{\uparrow\pm}^2 & = 4a(j + 4n_r + 3), & E_{\uparrow\pm}^2 & = 4|a|(3j + 4n_r + 3), \\ E_{\downarrow\pm}^2 & = 4a(3j + 4n_r + 4), & E_{\downarrow\pm}^2 & = 4|a|(j + 4n_r + 2). \end{aligned} \quad (5.32)$$

На відміну від попереднього сімейства моделей, тут траєкторії не паралельні: 2 головні і їх дочірні мають параметр нахилу  $4|a|$ , інші ж –  $12|a|$ .

Нарешті, можна побудувати комбіновані моделі осциляторів, поклавши  $u_1 = u_2 = y_1 = w_2 = 0$  і  $x_{1-} = g_{\uparrow+} = g_{\downarrow}$ ,  $x_{1+} = 0$ ,  $g_{\uparrow-} = 0$  або  $x_{1+} = g_{\uparrow-} = g_{\downarrow}$ ,  $x_{1-} = 0$ ,  $g_{\uparrow+} = 0$ . Це веде до вибору парціальних потенціалів (5.12), (5.17),

$$X_1 = Y^{(2)} = \frac{1}{4}Y, \quad Y^{(1)} = \frac{3}{4}Y, \quad Y_1 = Y_2 = 0, \quad (5.33)$$

і однієї з двох можливостей:

$$X_2 = X^{(3)} = \pm \frac{1}{4}Y. \quad (5.34)$$

У цих випадках одна з головних (разом з дочірніми) траєкторій (для безмасових частинок) буде мати нахил  $4|a|$ , друга –  $12|a|$ , а решта дві –  $8|a|$ .

## 5.2. Спектри легких мезонів

Як відомо, спектри легких мезонів (що складаються з  $u$ ,  $d$  і  $s$  кварків) мають характерні риси, що після деякої ідеалізації вкладаються у подану нижче картину [40].

1. Мезонні стани лягають у площині  $(E^2, j)$  на прями, відомі як траєкторії Редже.
2. Траєкторії Редже паралельні одна одній з універсальним параметром нахилу  $\sigma \approx 1.15 \text{GeV}^2$ .
3. Нерелятивістична класифікація мезонів як  $(n^{2s+1}\ell_j)$ -станів кварк-антикваркової системи є адекватною: поряд з  $j$  “хорошими” квантовими числами можна вважати орбітальне число  $\ell$ , сумарний спін системи  $s$  та радіальне число  $n_r$  (або по’язане з ним  $n = n_r + \ell + 1$ ).
4. Спектри є  $\ell s$ -виродженими, тобто залежать від  $\ell$  та  $n_r$ , але не від  $j$  чи  $s$ .
5. Стани з різними  $\ell$  і  $n_r$  характеризуються додатковим (випадковим) виродженням, що приводить до “вежової” структури спектру [41].

Детальніше твердження 3 означає, що у площині  $(E^2, \ell)$  мезонні стани також утворюють прями: існує 4 головних ( $n_r = 0$ ) траєкторій Редже, що відповідають синглетним ( $s = 0$ ) та триплетним ( $s = 1$ ) сімействам станів, і кожна головна траєкторія породжує низку дочірніх ( $n_r = 1, 2, \dots$ ). Тоді твердження 4 значить, що у площині  $(E^2, \ell)$  усі головні траєкторії вироджуються в одну (це ж стосується і дочірніх траєкторій з фіксованим  $n_r$ ). Існування випадкового виродження

мало б свідчити про функційну залежність  $E^2$  від  $\ell$  та  $n_r$  через їх суму із співмірними коефіцієнтами [41]. В літературі найчастіше використовують масові формули з  $(\ell + 2n_r)$ -залежністю, характерною для осциляторних [42–46] та деяких струнних [47] моделей мезонів. Менш відома  $(\ell + n_r)$ -залежність; вона з'являється у запропонованих в [48, 49] феноменологічних формулах для опису  $\pi$ - і  $\rho$ -траєкторій, а також у потенціальній моделі безспінових кварків із взаємодією векторною типу [50, 51]. Обидві можливості пролюстровані на Рис. 2, де відповідні траєкторії Редже показано у координатах  $(E^2, j)$  і  $(E^2, \ell)$ .

Зауважимо, що ідеалізована картина характеризує відносно розташування траєкторій на цих площинах. Їх абсолютне розташування залежить від ароматового складу мезонів, і для  $(\pi\rho)$ -сімейства воно приблизно таке, як на Рис. 2. Із збільшенням мас складових кварків траєкторії зміщуються вправо (в область більших значень  $E^2$ ).

Реальні спектри мезонів відрізняються від ідеалізованої картини. По-перше, відомо обмежене число мезонів, і не всі вони надійно ідентифікуються із станами ідеалізованих спектрів. Далі, траєкторії не цілком прямі, особливо у нижній частині спектру [47, 52, 53], а середнє чи асимптотичне (при великих  $j$ ) значення параметру нахилу  $\sigma$  залежить від ароматового складу мезонів [46, 53].  $\ell s$ -виродження є наближенням – порядку  $5 \div 6\%$  від  $\sigma$ , і тлумачиться як результат  $ss$ -розщеплення [40]. Вежова структура встановлена ненадійно (тобто лише для окремих груп станів) і також є наближеною [47]. Тому при побудові потенціальних моделей зручно орієнтуватися на ідеалізовану картину як на нульове наближення, з можливістю подальшого введення різних поправок.

Більшість рис ідеалізованої структури мезонних спектрів притаманна спектрам осциляторних моделей Ia–Id, розглянутих на початку попереднього підрозділу. Дійсно, у безмасовому випадку траєкторії є прямими і паралельними. Хоча моделі мають вільночастинкові нерелятивістичні границі, однак їх зв'язані стани формально можна класифікувати нерелятивістично: рівні  $E_{\uparrow+}$  з парністю  $P = (-)^j$  починаються з  $j = 0$ , як і синглетні стани  $\phi^A$ , тоді як  $E_{\downarrow+}$  починаються з  $j = 1$  – як триплетні стани  $\phi^0$ ; аналогічно рівні  $E_{\uparrow-}$  та  $E_{\downarrow-}$  з  $P = -(-)^j$  починаються з  $j = 0$  та  $j = 1$ , і відповідають триплетним станам  $\phi^-$  та  $\phi^+$ . Тому траєкторії  $\uparrow+$  можна приписати синглетні квантові числа  $s = 0$ ,  $\ell = j$ , а траєкторіям  $\downarrow+$  і  $\downarrow-$  – триплетні числа  $s = 1$ ,  $\ell = j$  і  $s = 1$ ,  $\ell = j \pm 1$  відповідно.

Усі моделі приводять як до виродження траєкторій, так і до випадкового виродження станів (вежової структури) з тією чи іншою кратністю – у залежності від моделі та вибору її параметрів. Однак

характер виродження інший, ніж в ідеалізованій картині. Зокрема, ні одна з моделей не відтворює  $\ell s$ -виродження траєкторій (риса 4) та відповідний до нього порядок розміщення траєкторій (порівн. Рис 1 та 2): в ідеалізованій картині мали б збігатися траєкторії  $n_r \uparrow + i n_r \downarrow +$  (а у площині  $(E^2, \ell)$  – усі 4 сімейства траєкторій  $n_r \uparrow \pm$ ,  $n_r = 0, 1, \dots$ ); насправді ж збігаються  $n_r \downarrow +$  і  $n_r \downarrow -$  (які мали би бути розщеплені на величину  $\sigma$ ).

Спробуємо побудувати модель, яка хоча б наближено відтворювала спектри легких мезонів. Для того, щоб у площині  $(E^2, \ell)$  усі траєкторії були повністю вироджені за спіновими станами, необхідно, щоби існував додатковий інтеграл руху – повний спін системи  $\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$  (або інший інтеграл, що в нерелятивістичній границі переходить у цю величину) [40, 52]. Однак навіть за відсутності взаємодії 2-частинковий гамільтоніян Дірака не комутує з  $\mathbf{s}$ . Тому вимогу 4 можна задовольнити лише наближено.

Покладімо в рівняннях (5.9)

$$g_{\uparrow} = 2 \left( ar + \frac{\chi \mp 1/2}{r} \right), \quad x_1 = \frac{4\kappa}{r} \quad (5.35)$$

(решта функцій рівні нулю). Тоді воно набуває вигляду:

$$\Psi'' + \left\{ \frac{1}{4}E^2 - 2a(\chi+1) - a^2r^2 - (C^2 + \chi^2 - \frac{1}{4} + 2\kappa C)/r^2 \right\} \Psi = 0, \quad (5.36)$$

де коефіцієнт біля  $1/r^2$  містить недіагональну ермітову матрицю:

$$K = \begin{bmatrix} 2\kappa C \\ C & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Після її діагоналізації система розщеплюється на два рівняння типу осциляторних, що дають спектр

$$E_{\uparrow}^2 = 8|a|(k_{\uparrow} + 2n_r + 3/2) + 8a(\chi + 1); \quad (5.38)$$

тут

$$k_{\uparrow} = \sqrt{(\sqrt{C^2 + \chi^2 \pm \kappa})^2 + \chi^2 - 1/2} \stackrel{j \rightarrow \infty}{\approx} j \pm \kappa + O(1/j). \quad (5.39)$$

Нагадаємо, що для різних парностей функції  $x_{1\pm}$ , а в даному випадку (5.35), параметри  $\kappa_{\pm}$  можна вибирати незалежно. Тому модель містить 4-параметричний потенціал виду (5.3), де

$$\text{III).} \quad Y^{(1)} = ar + \frac{\chi}{r}, \quad Y^{(2)} = \frac{1/2}{r}, \quad X_1 = \frac{\kappa_1}{r}, \quad X_2 = \frac{\kappa_2}{r}, \quad (5.40)$$

$\varkappa_1 = \frac{1}{2}(\varkappa_+ + \varkappa_-)$ ,  $\varkappa_2 = \frac{1}{2}(\varkappa_+ - \varkappa_-)$ . Решта парціальних потенціалів рівні нулю (окрім хіба що довільного калібрувального  $X^{(1)}$ ).

Роль “кулонівських” членів у потенціалах (5.40) можна окреслити так: вони деформують траєкторії Редже, залишаючи їх лише асимптотично (при  $j \rightarrow \infty$ ) прямими; потенціал  $Y^{(2)}$  зводить асимптотики докуши,  $X_1$  та  $X_2$  розщеплюють їх симетрично (вліво і вправо) на  $|a|\varkappa_{\pm}$ , а 2-й доданок  $Y^{(1)}$  зміщує усі асимптотики разом на  $8a\chi$  вліво.

При виборі  $\varkappa_+ = 0$ ,  $\varkappa_- = 1$ , траєкторії є асимптотично виродженими у площині  $(E^2, \ell)$ ; див. Рис. 3. Таким чином наближено відтворюється властивість 4 ідеалізованих спектрів мезонів.

У масивному випадку система (5.9) ускладнюється:

$$\Psi'' + \left\{ \frac{1}{4} \left( E - \frac{\nu^2}{E} \right) \left( E - \frac{\mu^2}{E} \right) - 2a(\chi + 1) - a^2 r^2 - \frac{C^2 + \chi^2 - 1/4}{r^2} - 2K \left[ \frac{\varkappa}{r^2} - \frac{\nu}{E} \left( a + \frac{\chi}{r^2} \right) \right] \right\} \Psi = 0, \quad (5.41)$$

але її також можна діагоналізувати до 2-х рівнянь осциляторного типу. Спектральна умова у цьому випадку не розв’язується аналітично. Тому спектр подаємо у неявному вигляді, зручному для розв’язування ітераційним методом:

$$E_{\uparrow} = \sum_{a=1}^2 \sqrt{m_a^2 + 2|a|[k_{\uparrow} + 2n_r + \frac{1}{2} - \chi + (\varkappa \pm \sqrt{C^2 + \varkappa^2})\chi\nu/E_{\uparrow}]}, \\ k_{\uparrow} = \sqrt{(\sqrt{C^2 + \varkappa^2} \pm \varkappa)^2 + \chi^2} - 2(\varkappa \pm \sqrt{C^2 + \varkappa^2})\nu/E_{\uparrow} - \frac{1}{2}; \quad (5.42)$$

тут  $\nu = m_1 \mp m_2$  і  $\varkappa = \varkappa_{\pm} = \varkappa_1 \pm \varkappa_2$  для енергій  $E_{\uparrow\pm}$  станів з різною парністю  $P = \pm(-)^j$ .

4 довільних параметри  $a$ ,  $\chi$ ,  $\varkappa_1$ ,  $\varkappa_2$  (а в масивному випадку – ще й маси  $m_1$ ,  $m_2$ ) можна підібрати таким чином, щоб якомога краще відтворити реальні спектри мезонів. На Рис. 4 показано спектр легких мезонів ( $\pi$ - $\rho$ )-сімейства, побудований за даними [54], і відповідні траєкторії Редже, отримані при оптимальних значеннях параметрів:  $a = 0.145$  GeV<sup>2</sup>,  $\chi = 0.746$ ,  $\varkappa_1 = 0.177$ ,  $\varkappa_2 = -0.262$ ,  $m_1 = 0.139$  GeV,  $m_2 = 0.058$  GeV. Отримані траєкторії дещо викривлені, особливо у нижній ділянці, тому оптимальні значення  $\varkappa_1$  і  $\varkappa_2$  помітно відрізняються від значень ( $\varkappa_1 = 1/2$ ,  $\varkappa_2 = -1/2$ ), що забезпечують асимптотичну виродженість траєкторій. Очевидно, що спостережувані рівні непогано лягають на траєкторії Редже. Однак частина радіальних

збуджень не попадає на дочірні траєкторії, особливо у їх нижній ділянці. Однією з причин цієї невідповідності може бути специфічний характер викривленості модельних траєкторій: траєкторії  $n_r \uparrow \pm$  мають додатню кривину, тоді як  $n_r \downarrow \pm$  – від’ємну. Інша причина – асимптотичне випадкове виродження типу  $\ell + 2n_r$ , що дає замало дочірніх траєкторій. Очевидно, наприклад, що станам  $\pi(1300)$ ,  $\pi_2(2100)$  і  $a_1(1640)$  бракує “своїх” дочірніх траєкторій типу  $\uparrow +$  і  $\downarrow +$ , а стани  $\rho(2265)$  чи  $\rho(2280)$  не попадають на траєкторію  $2\downarrow -$  через її викривленість. З іншого боку, викривленість траєкторії  $0\uparrow +$  добре узгоджується із реальними станами  $\pi_0$ ,  $\mathbf{b}_1(1235)$  і т.д. Зауважимо також, що отримані оптимальні величини  $m_1$  і  $m_2$  та їх різниці значно перевищують загальноприйняті значення для струмових мас  $u$  і  $d$  кварків ( $m \approx 5 \div 7$  MeV), і значно ближчі до т. зв. конститuentних мас ( $m \approx 350$  MeV), що використовуються в нерелятивістичних моделях. Тут їх слід розглядати лише як феноменологічні параметри, а не спостережувані величини.

## 6. Псевдо-пертурбативний метод розкладів за $1/j$

Точно розв’язувана модель легких мезонів, побудована у попередньому розділі, базується на суперпозиції лінійного та кулонівського двоферміонних потенціалів із складної спін-кутовою залежністю. Фізична інтерпретація такого потенціалу не є очевидною. Крім того, він задається невласним оператором (див. Розділ 2) і, отже, зникає у нерелятивістичній границі. Тому модель придатна до опису лише легких мезонів, що вважаються істотно релятивістичними об’єктами.

Важливим з фізичного погляду завданням є побудова універсальної релятивістичної моделі, яка допускає теоретико-польову інтерпретацію взаємодії, а в нерелятивістичній границі зводиться до потенціальної моделі, придатної для опису важких мезонів. Прийнято вважати, що кандидатом на цю роль може бути релятивістична модель із короткосяжною векторною і далекосяжною скалярною взаємодіями [10, 11, 15, 19, 55, 56], які у нерелятивістичній границі зводяться до потенціалу  $U_{nr}(r) = u_v(r) + u_s(r)$ . Найчастіше (і найпростіше) вибирають

$$u_v(r) = -\alpha/r, \quad (6.1)$$

$$u_s(r) = ar, \quad (6.2)$$

де “біжуча константа”  $\alpha$  змінюється від  $\alpha = 0.27$  для важких мезонів до  $\alpha = 0.8$  для легких, а стала  $a = 0.25 \div 0.3 \text{ GeV}^2$  є універсальною [55].

Оскільки задовільної у всіх відношеннях універсальної моделі ще немає, варто розглянути кілька прикладів в рамках 2ЧРД.

В літературі використовують різні потенціали для опису двоферміонних взаємодій скалярного і векторного типу. Ось приклади векторних потенціалів:

$$U_{\mathbf{v}}^{(\text{st})}(r) = u(r), \quad (6.3)$$

$$U_{\mathbf{v}}^{(\text{EG})}(r) = \{1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2\}u(r), \quad (6.4)$$

$$U_{\mathbf{v}}^{(\text{B})}(\mathbf{r}) = \{1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2\}u(r) + \frac{1}{2}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}_1)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}_2)ru'(r), \quad (6.5)$$

де  $u' = du/dr$ . Потенціал  $U_{\mathbf{v}}^{(\text{st})}$  враховує лише статичну компоненту 4-векторного поля-носія взаємодії (див. [5]). Він входить у 2ЧРД як добавка до енергії  $E$  і збігається із його нерелятивістичною границею  $u(r)$ . В потенціалі  $U_{\mathbf{v}}^{(\text{EG})}$  (див. [15, 22]), що для кулонівського випадку був вперше запропонований Едінгтоном і Гантом [3, 4], врахована релятивістична кінематика векторної взаємодії. В узагальненні  $U_{\mathbf{v}}^{(\text{B})}$  потенціалу Брейта [1] враховано також члени, що описують ефекти запізнення [22].

Два різних скалярних потенціалів:

$$U_s^{(\text{Y})}(r) = \beta_1\beta_2u(r), \quad (6.6)$$

$$U_s^{(\text{min})}(r) = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)u(r), \quad (6.7)$$

походять із двох різних типів спарювання скалярного поля-медіатора із ферміонними полями. Потенціал  $U_s^{(\text{Y})}$  виникає із взаємодії Юкави (див. [20, 22]), тоді як  $U_s^{(\text{min})}$  відповідає так-званому “мінімальному” спарюванню: в 2ЧРД він з’являється як добавка до мас спокою частинок [11–14].

У дво-ферміонних рівняннях квантово-польового походження члени взаємодії множаться на 2-частинкові проєкційні оператори:

$$\Pi^{(\tau)}(\mathbf{p}) = \Lambda_1^{(+)}(\mathbf{p})\Lambda_2^{(+)}(-\mathbf{p}) + \tau\Lambda_1^{(-)}(\mathbf{p})\Lambda_2^{(-)}(-\mathbf{p}) \quad \tau = 0, \pm 1, \quad (6.8)$$

побудовані в термінах 1-частинкових додатньо- та від’ємно-енергетичних проєкторів:

$$\Lambda_a^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\{1 \pm h_a(\mathbf{p})/\omega_a(\mathbf{p})\}, \quad \omega_a(\mathbf{p}) = \sqrt{m_a^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (6.9)$$

У різних квантово-польових рівняннях використовують проєкційні оператори з різними значеннями  $\tau$ : Браун і Рейвенгол [57] ввели у

рівняння Брайта проєктори на додатньо-енергетичні стани ( $\tau = 0$ ), у рівнянні Салпетера  $\tau = -1$  [24], а в одній з версій квазіпотенціальних рівнянь Матвеев, Мурадян і Тавхелідзе використали проєктор з  $\tau = 1$  [26]. Проєкційні оператори (6.8) є нелокальними у координатному представленні, і взагалі кажучи порушують ермітовість членів взаємодії. Однак у статичному наближенні (тобто у припущенні  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ ) проєкції  $\Pi(\mathbf{0})U_s(r)$  (для обидвох  $U_s^{(\text{Y})}$  і  $U_s^{(\text{min})}$ ) є локальними та ермітовими, і породжують ще дві версії скалярного потенціалу [28]:

$$U_s^{(\text{BR})}(r) = \frac{1}{4}(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)u(r), \quad (6.10)$$

$$U_s^{(\text{MMT})}(r) = \frac{1}{2}(1 + \beta_1\beta_2)u(r); \quad (6.11)$$

далі будемо їх називати (за походженням проєкторів) потенціалами Брауна-Рейвенгола і Матвеева-Мурадяна-Тавхелідзе відповідно.

Тут не розглядається проєктування векторних потенціалів, оскільки це питання є предметом глибшого вивчення і виходить за рамки роботи (див. [58], де в рамках теорії збурень досліджуються і порівнюються різні проєкції потенціалу Брейта).

Довільну суперпозицію скалярних та векторних потенціалів (6.3)–(6.7), (6.11), (6.10) можна використати в 2ЧРД для побудови релятивістичної потенціальної моделі. Однак, всі вони не є точно розв’язувані, а деякі з них – математично погано означені. З огляду на калькулятивні труднощі лише 2ЧРД з лінійним скалярним мінімальним потенціалом (6.7), (6.2) було детально досліджено аналітично і чисельно, і обчислено спектри [12–14].

Далі пропонується метод розкладів за  $1/j$ , що дозволяє з єдиного погляду розглянути й інші моделі, побудовані на базі 2ЧРД. З цією метою спочатку розглянемо простіший приклад релятивістичного рівняння, що описує взаємодію двох скалярних частинок.

### 6.1. Метод $1/\ell$ для рівняння Тодорова

Розглянемо рівняння типу Тодорова, що описує релятивістичну систему 2-х взаємодіючих скалярних частинок у системі відліку центра мас: [56, 59, 60]:

$$\{\mathbf{p}^2 + U(r, E) - b(E)\} \Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.12)$$

Тут  $\mathbf{p} = -i\nabla$ , квазіпотенціал  $U(r, E)$  залежить від енергії системи  $E$ , а функція  $b(E)$  енергії системи  $E$  має вигляд:

$$b(E) = \frac{1}{4}E^2 - \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) + \frac{1}{4}(m_1^2 - m_2^2)^2/E^2,$$

$$\text{і є оберненою до } E(b) = \sum_{a=1}^2 \sqrt{m_a^2 + b}. \quad (6.13)$$

Відповідне радіальне рівняння набуває вигляду

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - W(r, E, \ell) \right\} \Psi(r) = 0, \quad (6.14)$$

де  $\ell$  – орбітальне квантове число,

$$W(r, E, \ell) = U(r, E) + \ell(\ell + 1)/r^2 - b(E). \quad (6.15)$$

Розглянемо рух системи в околі класичної стійкої колової орбіти. За даного значення  $\ell > 0$  радіус  $r_c = r_c(\ell)$  цієї орбіти і відповідна енергія  $E_c = E_c(\ell)$  задовольняють умови:

$$W(r_c, E_c, \ell) = 0, \quad (6.16)$$

$$\partial W(r_c, E_c, \ell)/\partial r_c = 0, \quad (6.17)$$

$$\partial^2 W(r_c, E_c, \ell)/\partial r_c^2 > 0; \quad (6.18)$$

тут  $\partial W(r_c, E_c, \ell)/\partial r_c \equiv \partial W(r, E, \ell)/\partial r|_{\substack{r=r_c \\ E=E_c}}$  і т.д.

Покладімо  $r = r_c + \Delta r$  та  $E = E_c + \Delta E$ , де  $\Delta r$  та  $\Delta E$  є малими, і розкладемо функцію  $W(r_c + \Delta r, E_c + \Delta E, \ell)$  у степеневий ряд за  $\Delta r$  і  $\Delta E$ . Тоді, згідно з умовами (6.16)–(6.18), головний член цього розкладу представляє потенціал гармонічного осцилятора, а інші (малі) члени – ангармонічні поправки. Якщо умови (6.16)–(6.18) виконуються для довільних великих значень  $\ell$ , то шляхом певного перенормування  $\Delta r$  і  $\Delta E$  можна виокремити незалежну від  $\ell$  задачу про гармонічний осцилятор (як нульове наближення) та ангармонічні збурення, що зникають при  $\ell \rightarrow \infty$ . У цьому й полягає ідея методу розкладів за  $1/\ell$ . Застосування псевдо-пертурбативної техніки цього типу [34–38] до нашого випадку має дві особливості: рівняння (6.14) представляє собою нелінійну спектральну задачу, і точний розв'язок рівнянь (6.16)–(6.17) може виявитися невідомим або занадто громіздким для практичних обчислень. З огляду на це пропонується модифікація методу.

Введемо параметр  $\lambda = 1/\sqrt{\ell}$ , що є малим при великих  $\ell$ . Оскільки точний вигляд функцій  $r_c(\ell)$  і  $E_c(\ell)$  взагалі кажучи невідомий, в першу чергу визначаємо асимптотики  $r_c \sim r_\infty(\lambda)$ ,  $b_c = b(E_c) \sim b_\infty(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , які можна знайти значно простіше. Тоді функції  $r_c(\ell)$  та  $E_c(\ell)$  можна представити у вигляді:

$$r_c(\lambda) = r_\infty(\lambda)\rho(\lambda), \quad b_c(\lambda) = b_\infty(\lambda)\mu(\lambda), \quad (6.19)$$

$$\rho(\lambda) = 1 + \lambda\rho^{(1)} + \lambda^2\rho^{(2)} + \dots, \quad \mu(\lambda) = 1 + \lambda\mu^{(1)} + \lambda^2\mu^{(2)} + \dots \quad (6.20)$$

де коефіцієнти розкладу  $\rho^{(n)}$ ,  $\mu^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (а тому й аналітичні функції  $\rho(\lambda)$  та  $\mu(\lambda)$ ) визначаються крок за кроком з умов:

$$\bar{W}(\rho, \mu, \lambda) = 0, \quad \partial \bar{W}(\rho, \mu, \lambda)/\partial \rho = 0 \quad (6.21)$$

та  $\partial^2 \bar{W}(\rho, \mu, \lambda)/\partial \rho^2 > 0$ ; тут безрозмірна функція  $\bar{W}(\rho, \mu, \lambda)$  утворена шляхом підстановки (6.19)–(6.20) в (6.15) та перенормування з метою забезпечення її регулярності при  $\lambda \rightarrow 0$ :

$$\bar{W}(\rho, \mu, \lambda) = \lambda^4 r_\infty^2 W[r_\infty \rho, E(b_\infty \mu), 1/\lambda^2]. \quad (6.22)$$

Перейдемо тепер до безрозмірних змінної  $r \rightarrow \xi$  та спектрального параметру  $b(E) \rightarrow \epsilon$ :

$$r = r_\infty(\lambda)[\rho(\lambda) + \lambda\xi], \quad b = b_\infty(\lambda)[\mu(\lambda) + \lambda^2\epsilon], \quad (6.23)$$

в термінах яких рівняння (6.14) набуває вигляду:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{\lambda^2} w(\xi, \epsilon, \lambda) \right\} \psi(\xi) = 0, \quad (6.24)$$

де

$$\psi(\xi) = \Psi[r_\infty(\rho + \lambda\xi)] \quad (6.25)$$

і

$$w(\xi, \epsilon, \lambda) = \bar{W}(\rho + \lambda\xi, \mu + \lambda^2\epsilon, \lambda). \quad (6.26)$$

Якщо функції  $\rho(\lambda)$  та  $\mu(\lambda)$  задовольняють умови (6.21), то рівняння (6.24) є несингулярним при  $\lambda \rightarrow 0$ . Це твердження залишається вірним, якщо в перетворенні (6.23) замість точних виразів для  $\rho(\lambda)$  та  $\mu(\lambda)$  використати їх перші наближення:

$$\rho(\lambda) = 1 + \lambda\rho^{(1)}, \quad \mu(\lambda) = 1 + \lambda\mu^{(1)}. \quad (6.27)$$

Дійсно, скориставшись позначеннями

$\partial \bar{W}^{(0)}/\partial \mu = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \partial \bar{W}/\partial \mu = \partial \bar{W}/\partial \mu(\rho=1, \mu=1, \lambda=0)$  і т.д., маємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda^2} w(\xi, \epsilon, \lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \bar{W}[\rho(\lambda) + \lambda\xi, \mu(\lambda) + \lambda^2\epsilon, \lambda] \\ & = \frac{1}{\lambda^2} \bar{W}^{(0)} + \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\partial \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho}(\rho^{(1)} + \xi) + \frac{\partial \bar{W}^{(0)}}{\partial \mu}(\mu^{(1)} + \lambda\epsilon) + \frac{\partial \bar{W}^{(0)}}{\partial \lambda} \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho^2}(\rho^{(1)} + \xi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \mu^2}[\mu^{(1)}]^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \lambda^2} + \\ & + \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho \partial \mu}(\rho^{(1)} + \xi)\mu^{(1)} + \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho \partial \lambda}(\rho^{(1)} + \xi) + \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \mu \partial \lambda}\mu^{(1)} + \\ & + O(\lambda). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Сингулярних членів у цьому розкладі немає, якщо

$$\bar{W}^{(0)} = 0, \quad \partial \bar{W}^{(0)} / \partial \rho = 0, \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial \bar{W}^{(0)}}{\partial \mu} \mu^{(1)} + \frac{\partial \bar{W}^{(0)}}{\partial \lambda} = 0. \quad (6.30)$$

Крім цього, члени нульового порядку, лінійні за  $\xi$ , випадають, якщо

$$\frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho^2} \rho^{(1)} + \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho \partial \mu} \mu^{(1)} + \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho \partial \lambda} = 0. \quad (6.31)$$

Зауважимо, що рівняння (6.29) та (6.30)–(6.31) представляють собою умови (6.21) у 0-му та 1-му порядках за  $\lambda$  відповідно. Тому умови (6.29) задовольняються тотожно, а (6.30)–(6.31) є лінійними рівняннями для знаходження  $\rho^{(1)}$  та  $\mu^{(1)}$ .

У 0-му наближенні рівняння (6.24) зводяться до задачі про гармонічний осцилятор:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} + \kappa \epsilon - \nu - \omega^2 \xi^2 \right\} \psi(\xi) = 0 \quad (6.32)$$

де

$$\kappa = -\frac{\partial \bar{W}^{(0)}}{\partial \mu}, \quad \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho^2}, \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} \nu = & -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho^2} [\rho^{(1)}]^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \mu^2} [\mu^{(1)}]^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \mu \partial \lambda} \mu^{(1)}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} \mu^{(1)} = & -\frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)} / \partial \lambda}{\partial^2 \bar{W}^{(0)} / \partial \mu}, \\ \rho^{(1)} = & -\frac{1}{\partial^2 \bar{W}^{(0)} / \partial \rho^2} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho \partial \mu} \mu^{(1)} + \frac{\partial^2 \bar{W}^{(0)}}{\partial \rho \partial \lambda} \right\}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Члени вищого порядку у розкладі (6.28) можна тлумачити як збурення осцилятора. В загальному вони залежать від спектрального параметру  $\epsilon$  і можуть бути враховані з-допомогою відповідної пертурбативної процедури [60]. В усьому іншому процедура є близькою до описаної в [34–38].

Власні значення 0-го наближення

$$\epsilon_{n_r} = [\omega(2n_r + 1) + \nu] / \kappa, \quad (6.36)$$

де  $n_r = 0, 1, \dots$  – радіальне квантове число, уточнюються пертурбативними поправками вищих порядків. Тоді, використовуючи 2-гу рівність (6.23) в (6.13), отримуємо енергетичний спектр системи.

Для прикладу розглянемо рівняння Тодорова з мінімально включеними векторним (6.1) та скалярним (6.2) потенціалами. Функція  $W(r, E, \ell)$  у цьому разі має вигляд [56]:

$$W(r, E, \ell) = [m_E + u_s(r)]^2 - [\epsilon_E - u_v(r)]^2 + \ell(\ell + 1)/r^2, \quad (6.37)$$

де

$$m_E = \frac{m_1 m_2}{E}, \quad \epsilon_E = \frac{E^2 - m_1^2 - m_2^2}{2E}. \quad (6.38)$$

Обчисливши асимптотики  $r_\infty(\lambda)$  та  $b_\infty(\lambda)$  (див. Додаток С), отримуємо формулу для спектру в 0-му наближенні:

$$E^2 = 8a \left( \ell + 2n_r + 3/2 - \sqrt{2}\alpha \right) + 2 \left( m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{2}m_1 m_2 \right), \quad (6.39)$$

що збігається з отриманою в [56] з менш формалізованих евристичних міркувань.

## 6.2. Метод $1/j$ для 2ЧРД

Повернімося до радіально зредукованого 2ЧРД у матрично-двочленному вигляді, заданого оператором (4.21). Представивши хвильому функцію  $\Phi_1$  (4.17) та матрицю  $W$  через їх компоненти:

$$\bar{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \Psi_\uparrow \\ \Psi_\downarrow \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} W_\uparrow & Y \\ Y^* & W_\downarrow \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

отримуємо пару зв'язаних рівнянь 2-го порядку:

$$\frac{d^2}{dr^2} \Psi_\uparrow(r) - W_\uparrow(r, E, j) \Psi_\uparrow(r) = Y(r, E, j) \Psi_\downarrow(r), \quad (6.41)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \Psi_\downarrow(r) - W_\downarrow(r, E, j) \Psi_\downarrow(r) = Y^*(r, E, j) \Psi_\uparrow(r). \quad (6.42)$$

Застосуємо до неї псевдопертурбативний метод, взявши за параметр розкладу  $\lambda = 1/\sqrt{j}$ .

Припустимо тичасово, що правою стороною системи (6.41)–(6.42) можна знехтувати, так що рівняння розчеплюються. Тоді до кожного з рівнянь можна застосувати схему, викладену у попередньому підрозділі 6.1. Означаємо радіуси та енергії колових орбіт умовами:

$$W_i(r_i, E_i, j) = 0, \quad \frac{\partial W_i(r_i, E_i, j)}{\partial r} = 0, \quad (6.43)$$



$\partial^2 W_i(r_i, E_i, j)/\partial r^2 > 0$ ,  $i = \uparrow, \downarrow$ . Тоді виділяємо асимптотики цих функцій від  $\lambda$ :

$$r_i(\lambda) = r_{i\infty}(\lambda)\rho_i(\lambda), \quad b_i(\lambda) = b_{i\infty}(\lambda)\mu_i(\lambda), \quad (6.44)$$

$$\rho_i(\lambda) = 1 + \lambda\rho_i^{(1)} + \lambda^2\rho_i^{(2)} + \dots, \quad \mu_i(\lambda) = 1 + \lambda\mu_i^{(1)} + \lambda^2\mu_i^{(2)} + \dots, \quad (6.45)$$

і, використовуючи рівності

$$r = r_{i\infty}(\lambda)[\rho_i(\lambda) + \lambda\xi_i], \quad b = b_{i\infty}(\lambda)[\mu_i(\lambda) + \lambda^2\epsilon_i], \quad i = \uparrow, \downarrow, \quad (6.46)$$

переформулюємо рівняння (6.41) безрозмірної змінної  $\xi_\uparrow$  і спектрального параметру  $\epsilon_\uparrow$ , тоді як рівняння (6.42) – в термінах  $\xi_\downarrow$  та  $\epsilon_\downarrow$ . Нарешті здійснюємо розклад рівнянь за степенями  $\lambda$  і розв'язуємо незалежно одне від одного.

Перш ніж враховувати актуальне спарювання рівнянь (6.41)–(6.42) зауважимо, що змінні  $\xi_\uparrow$  та  $\xi_\downarrow$  не є незалежними одна від одної, так само, як і спектральні параметри  $\epsilon_\uparrow$  and  $\epsilon_\downarrow$ . Тому ми повинні вибрати спільні для обидвох рівнянь змінні.

Виберім спочатку  $\xi = \xi_\uparrow$ ,  $\epsilon = \epsilon_\uparrow$ . Система (6.41)–(6.42) зводиться до вигляду:

$$\psi_\uparrow''(\xi) - \frac{1}{\lambda^2}w_\uparrow(\xi, \epsilon, \lambda)\psi_\uparrow(\xi) = y(\xi, \epsilon, \lambda)\psi_\downarrow(\xi), \quad (6.47)$$

$$\psi_\downarrow''(\xi) - \frac{1}{\lambda^2}w_\downarrow(\xi, \epsilon, \lambda)\psi_\downarrow(\xi) = y^*(\xi, \epsilon, \lambda)\psi_\uparrow(\xi), \quad (6.48)$$

де

$$\psi_i(\xi) = \Psi_i[r_{i\infty}(\rho_\uparrow + \lambda\xi)], \quad i = \uparrow, \downarrow, \quad (6.49)$$

$$w_i(\xi, \epsilon, \lambda) = \lambda^4 r_{i\infty}^2 W_i[r_{i\infty}(\rho_\uparrow + \lambda\xi), E(b_{i\infty}(\mu_\uparrow + \lambda^2\epsilon)), 1/\lambda^2] \quad (6.50)$$

$$y(\xi, \epsilon, \lambda) = \lambda^2 r_{i\infty}^2 Y[r_{i\infty}(\rho_\uparrow + \lambda\xi), E(b_{i\infty}(\mu_\uparrow + \lambda^2\epsilon)), 1/\lambda^2] \quad (6.51)$$

Функції (6.50)–(6.51) є регулярними при  $\lambda \rightarrow 0$ . Навіть більше, загальна структура функції  $w_\uparrow$  є такою ж як і  $w$  в підрозділі 6.1 (див р-ня (6.26), (6.28)). Зокрема,  $w_\uparrow = O(\lambda^2)$ . Тому рівняння (6.47) є подібним до (6.24) (але з правою частиною). Воно допускає подібний розклад за  $\lambda$ .

Функція ж  $w_\downarrow$  (на відміну від  $w_\uparrow$ ) може мати іншу поведінку при  $\lambda \rightarrow 0$ . Тут ми розглянемо три випадки.

1). Нехай  $r_{\downarrow\infty} \neq r_{\uparrow\infty}$  і  $b_{\downarrow\infty} \neq b_{\uparrow\infty}$ . Тоді  $w_\downarrow = O(\lambda^{-n})$ ,  $n \geq 0$  (за винятком дуже спеціальних випадків, які ми тут не розглядатимемо). У цьому випадку рівняння (6.48) можна формально розв'язати

відносно  $\psi_\downarrow(\xi)$ :

$$\psi_\downarrow = - \left(1 - \frac{\lambda^2}{w_\downarrow} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)^{-1} \frac{\lambda^2}{w_\downarrow} y^* \psi_\uparrow = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^2}{w_\downarrow} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)^n \frac{\lambda^2}{w_\downarrow} y^* \psi_\uparrow. \quad (6.52)$$

Це представлення веде до втрати тих розв'язків для  $\psi_\downarrow$ , що не є аналітичними за  $\lambda$ . Однак у пертурбативних процедурах такі розв'язки відкидаються а priori. Підстановка виразу (6.52) у праву частину (6.47) дозволяє вилучити  $\psi_\downarrow$  з (6.47) і таким чином отримати замкнуте рівняння для  $\psi_\uparrow$ . Структура та розгляд цього рівняння є таким же ж як і рівняння (6.24). Навіть більше, із (6.52) очевидно, що принаймні 0-й та 1-й члени розкладу  $\psi_\downarrow$  за  $\lambda$  зникають. Тому права частина рівняння (6.47) не дає вкладу в нижні порядки пертурбативної процедури. В 0-му наближенні маємо осциляторне рівняння.

2). Нехай  $r_{\downarrow\infty} = r_{\uparrow\infty}$  і  $b_{\downarrow\infty} = b_{\uparrow\infty}$ , але  $\rho_\downarrow - \rho_\uparrow = O(\lambda)$  і  $\mu_\downarrow - \mu_\uparrow = O(\lambda)$ . Тоді  $w_\downarrow = O(\lambda)$ . Оскільки  $\lambda^2/w_\downarrow = O(\lambda)$ , використання пертурбативного розкладу (6.52) в рівнянні (6.47) є також законним. Єдина відмінність від випадку **1** полягає в тому, що права частина рівняння (6.47) може давати внесок вже у 1-му порядку за  $\lambda$ .

В обидвох випадках, розглянутих вище, ми ввели безрозмірну змінну  $\xi_\uparrow$  і отримали замкнуте рівняння на власні значення (яке ми називатимемо *задачею*  $\uparrow$ ) для хвильової функції  $\psi_\uparrow(\xi_\uparrow)$  і спектрального параметру  $\epsilon_\uparrow$ . Подібно, можемо ввести змінну  $\xi_\downarrow$  і сформулювати на власні значення (яке ми називатимемо *задачу*  $\downarrow$ ) для хвильової функції  $\psi_\downarrow(\xi_\downarrow)$  і спектрального параметру  $\epsilon_\downarrow$ . На перший погляд видається, що обидві *задачі*  $\uparrow$  і  $\downarrow$  еквівалентні і дають однаковий спектр (у термінах енергії  $E$ ). Насправді ж ці *задачі* доповнюють одна одну. Це очевидно з рівностей (6.46), що ведуть до співвідношення:

$$\epsilon_\downarrow - \epsilon_\uparrow = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{b_{\uparrow\infty}}{b_{\downarrow\infty}} \mu_\uparrow - \mu_\downarrow \right\} + \left\{ \frac{b_{\uparrow\infty}}{b_{\downarrow\infty}} - 1 \right\} \epsilon_\uparrow. \quad (6.53)$$

Дійсно, в обидвох випадках **1** і **2**  $|\epsilon_\downarrow - \epsilon_\uparrow| \rightarrow \infty$  якщо  $\lambda \rightarrow 0$ . Це означає, що довільний рівень енергії  $E$ , обчислений з використанням власного значення  $\epsilon_\uparrow^{(0)}$  0-го наближення (осциляторної) *задачі*  $\uparrow$  (з використанням формул (6.46) і (6.13)) не можна обчислити з допомогою будь-якого скінченного власного значення  $\epsilon_\downarrow^{(0)}$  *задачі*  $\downarrow$ , і навпаки. Поправки вищого порядку до  $\epsilon_\uparrow^{(0)}$  (або  $\epsilon_\downarrow^{(0)}$ ) є малими, і якісно не змінюють картини. Тому різні *задачі* породжують різні гілки енергетичного спектру вихідної системи рівнянь. У цьому відношенні наступний спеціальний випадок істотно відрізняється від двох попередніх.

3). Нех.  $r_{\downarrow\infty} = r_{\uparrow\infty}$  і  $b_{\downarrow\infty} = b_{\uparrow\infty}$ , але  $\rho_{\downarrow} - \rho_{\uparrow} = O(\lambda^n)$  і  $\mu_{\downarrow} - \mu_{\uparrow} = O(\lambda^n)$ ,  $n \geq 2$ . Тоді  $w_{\downarrow} = O(\lambda^2)$ . Обидва рівняння (6.47) і (6.48) мають подібну структуру, і можуть розглядатися на рівних правах. У цьому випадку принагідними спільними змінними є  $\xi$  і  $\epsilon$ , означені рівностями (6.23) і (6.27). У 0-му наближенні отримуємо зв'язану пару хвильових рівнянь (на відміну від випадків **1** і **2**, де ми мали одне р-ня). У фізично змістовних випадках (див. підрозділ 6.3) вони мають вигляд:

$$\{d^2/d\xi^2 + \kappa\epsilon - \nu_{\uparrow} - \omega^2\xi^2\} \psi_{\uparrow}(\xi) = \chi\psi_{\downarrow}(\xi), \quad (6.54)$$

$$\{d^2/d\xi^2 + \kappa\epsilon - \nu_{\downarrow} - \omega^2\xi^2\} \psi_{\downarrow}(\xi) = \chi\psi_{\uparrow}(\xi), \quad (6.55)$$

де  $\chi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} y = \text{const}$ , а параметри  $\nu_{\uparrow}$ ,  $\kappa$  і  $\omega$  пов'язані із функціями  $w_{\uparrow}$  рівностями типу (6.33) і (6.34). Рівняння (6.54), (6.55) можна очевидно звести до пари подібних рівнянь, але з новими параметрами  $\tilde{\nu}_{\uparrow} = \{\nu_{\uparrow} + \nu_{\downarrow} \pm \sqrt{(\nu_{\uparrow} - \nu_{\downarrow})^2 + 4\chi^2}\}/2$  і  $\tilde{\chi} = 0$ , в результаті чого отримуємо пару розщеплених рівнянь типу (6.32). Власні значення  $\epsilon$ , що відповідають 1-му та 2-му рівнянням, розділені скінченною сталою  $\tilde{\nu}_{\uparrow} - \tilde{\nu}_{\downarrow}$ . Тому відповідні стани змішуються у вищих наближеннях пертурбативної процедури.

### 6.3. Траєкторії Редже для 2ЧРД із скалярно-векторними потенціалами

Розглянемо кілька прикладів 2ЧРД із лінійним скалярним та кулонівським векторним потенціалами, поданими на початку Розділу 6. Користуючись викладеним вище псевдопертурбативним методом, обчислимо для них траєкторії Редже в 0-му наближенні. Для цього спочатку знайдемо асимптотики функцій  $r_c(j)$  та  $E_c(j)$  (див. Додаток С), а потім, скориставшись компютерною системою аналітичних обчислень Maple 7, здійснюємо доволі громіздкі розвинення за  $\lambda = 1/\sqrt{j}$ .

**Взаємодія Юкави.** Для 2ЧРД з лінійним потенціалом Юкави (6.6), (6.2) отримуємо:

$$E_{\uparrow\pm}^2 = 4a(j + 2n_r + 3/2) + 6(m_1^2 + m_2^2) + 8\sqrt{2}m_1m_2. \quad (6.56)$$

Усі траєкторії є асимптотично прямими і паралельними одна одній. Навіть більше, для значення параметру  $a = 0.25 \div 0.3\text{GeV}^2$  (типового для нерелятивістичних моделей з лінійним потенціалом (6.2)) отримуємо параметр нахилу траєкторій  $\sigma = 4a = 1 \div 1.2\text{GeV}^2$ , що узгоджується з реальним нахилом  $\sigma \approx 1.15\text{GeV}^2$  для легких мезонів.

Таким чином, модель відтворює властивості 1 і 2 мезонної спектроскопії, вказані у підрозділі 5.2. Спектр (6.56) має випадкове виродження ( $j + 2n_r$ )-типу (властивість 5 про вежову структуру), однак не має  $\ell s$ -виродження. Замість цього головні (і дочірні) траєкторії збігаються у площині  $(E^2, j)$  (назвемо це виродження  $j$ -типу).

Включення кулонівської векторної взаємодії також не забезпечує  $\ell s$ -виродження. Зокрема, статична взаємодія (6.3), (6.1) не змінює взаємного розташування траєкторій, а лише зміщує усю картину відносно на:

$$\Delta^{(\text{st})} E^2 = -2\sqrt{2}\alpha a. \quad (6.57)$$

Кулонівські поправки Едингтона-Ганта (6.4), (6.1) і Брайта (6.5), (6.1) не тільки зміщують, а й по-різному розщеплюють траєкторії:

$$\Delta^{(\text{EG})} E_{\uparrow+}^2 = -4(\sqrt{2} \pm 1)\alpha a, \quad \Delta^{(\text{EG})} E_{\uparrow-}^2 = -4\sqrt{2}\alpha a, \quad (6.58)$$

$$\Delta^{(\text{B})} E_{\uparrow\pm}^2 = -3(\sqrt{2} \pm 1)\alpha a, \quad \Delta^{(\text{B})} E_{\downarrow\pm}^2 = -(3\sqrt{2} \pm 1)\alpha a. \quad (6.59)$$

Однак ні при якому виборі сталої  $\alpha$  не можна досягнути  $\ell s$ -виродження.

**Мінімальна взаємодія.** Потенціал (6.7), (6.2) веде до спектру:

$$E_{\uparrow+}^2 = 4a \left( j + 2n_r + \frac{3}{2} \right) + 2m_+ \sqrt{2aj} + \frac{5}{4}m_+^2 - 2m_1m_2, \\ E_{\uparrow-}^2 = E_{\uparrow+}^2 \pm 3\sqrt{2}a. \quad (6.60)$$

Знову отримуємо асимптотично прямі траєкторії з нахилом  $4a$  і вежовою структурою ( $j + 2n_r$ )-типу. Однак, на відміну від попереднього випадку, усі траєкторії дещо викривлені у нижній частині (завдяки членові  $\sim \sqrt{j}$ ), а траєкторії  $\uparrow-$  розщеплені на величину  $\pm 3\sqrt{2}a \approx \pm 4.24a$ . Якщо скористатися нерелятивістичною класифікацією цих траєкторій (як у підрозділі 5.3) і розмістити їх у площині  $(E^2, \ell)$ , то розщеплення буде рівне  $0.24a = 6\% \sigma$ , що узгоджується з відхиленням реальних спектрів мезонів (5-6%) від  $\ell s$ -виродження [40]. У безмасовому випадку вираз  $E_{\uparrow+}^2 = 4a(j + 2n_r + 3/2)$  збігається з точним результатом для траєкторій  $\uparrow+$  (у нашій термінології), отриманим в [12], а подані там чисельні результати для траєкторій  $\uparrow-$  дають  $\ell s$ -виродження з тією ж точністю (6%).

Спробуємо формулами (6.60) описати спектр  $(\pi-\rho)$ -сімейства, підбравши параметри  $a$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ . Зазначимо, що уявне продовження  $\rho(770)$ -траєкторії ( $0\downarrow-$  у наших термінах) на площині  $(E^2, j)$  перетинає вісь  $E^2$  у від'ємній області. Однак, з формул (6.60) випливає:  $E_{\downarrow-}^2(j=0, n_r=0) = 3(2 - \sqrt{2})a + \frac{5}{4}m_+^2 + 3m_1m_2 > 0$ . Щоб обійти цю трудність, в [14] запропоновано ввести додатковий параметр

$c$  (зовнішній щодо моделі), що інтерпретується як енергія вакууму, і входить у зв'язок мас мезонів  $M$  та модельних рівнів енергії:  $M^2 = E^2 - c^2$ . Тут ми спробуємо подолати цю проблему внутрішньою модифікацією моделі.

Найпростіший шлях отримати у правій частині (6.60) від'ємну сталу – розглядати маси частинок  $m_1$  і  $m_2$  як комплексно-спряжені величини. Однак це порушує ермітовість 2ЧРД.

У нерелятивістичних потенціальних моделях енергія рівнів понижується введення сталої від'ємної поправки до потенціалу [55]. На рівні 2ЧРД із скалярною взаємодією це відповідає заміні потенціалу (6.2) на

$$u_s(r) = ar + u_0, \quad (6.61)$$

де  $u_0 = -0.76 \text{ GeV}$  (в [55] дано і теоретичне обґрунтування введення  $u_0$  із цим значенням). Очевидно, однак, що в 2ЧРД із мінімальною взаємодією параметр  $u_0$  можна скомпенсувати перенормуванням мас  $m_a \rightarrow \tilde{m}_a = m_a + u_0/2$ .

Натомість введення кулонівської векторної взаємодії (будь-якої – статичної, Едингтона-Ганта або Брайта) зсуває усі траєкторії вліво на величину

$$\Delta E^2 = -\zeta\sqrt{2}\alpha a, \quad \zeta^{(\text{st})} = 2, \quad \zeta^{(\text{EG})} = 3, \quad \zeta^{(\text{B})} = 5/2, \quad (6.62)$$

і при досить великій  $\alpha$  забезпечити умову  $E_{\downarrow-}^2(j=0, n_r=0) < 0$ .

На Рис. 5 показано траєкторії Редже для мінімального лінійного потенціалу зі статичною кулонівською поправкою, отримані при оптимальних значеннях параметрів:  $a = 0.228 \text{ GeV}^2$ ,  $\alpha = 2.7$ ,  $m_1 = m_2 = 0.275 \text{ GeV}$ . Картина в цілому подібна на ту, що отримана в рамках моделі III (Рис. 4), з відмінностями у відтворенні радіальних збуджень (на дочірніх траєкторіях). Слід, однак, відзначити занадто великі значення для  $\alpha$  та  $m_a$ . Зокрема, маси кварків близькі до конститuentних значень.

**Взаємодія Брауна-Рейвенгола.** Як зазначено в [28], 2ЧРД з потенціалом (6.10), (6.2) не має розв'язків для зв'язаних станів через особливості поведінки функцій  $W_{\uparrow}(r, E, j)$  при  $r \rightarrow \infty$ . В методі  $1/j$  визначальною є локальна поведінка  $W_{\uparrow}(r, E, j)$  в околі  $r_c(j)$ ,  $E_c(j)$ , яка у цьому випадку забезпечує існування квазізв'язаних станів. Їх спектр обчислюється як і в попередніх випадках:

$$E_{\uparrow+}^2 = \frac{1}{128} (7 + \sqrt{17})^2 \sqrt{23 - \sqrt{17}a} \left( j + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} (\sqrt{17} - 3) \sqrt{102 + 26\sqrt{17}} \left( n_r + \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{8} (3 + \sqrt{17}) (23 - \sqrt{17})^{\frac{1}{4}} m_+ \sqrt{2aj} \\ & + \frac{9}{8} (1 + 1/\sqrt{17}) m_+^2 - 2m_1 m_2 \\ & \approx 4.2a(j + \frac{1}{2} + 2.03(n_r + \frac{1}{2})) + 1.86\sqrt{2aj} + 1.4m_+^2 - 2m_1 m_2, \\ E_{\downarrow-}^2 & = E_{\uparrow+}^2 \pm \frac{1}{128} (7 + \sqrt{17})^2 \sqrt{23 - \sqrt{17}a} \\ & \approx E_{\uparrow+}^2 \pm 4.2a. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Одержані вирази з незначною різницею у чисельних коефіцієнтах подібні до випадку мінімальної взаємодії. Відміна полягає в тому, що тут  $\ell s$ -виродження є *точним*, а випадкове – наближеним, з точністю  $3\% \sigma$ , де параметр нахилу  $\sigma = 4.2a = 1.05 \div 1.26 \text{ GeV}$  також добре узгоджується з експериментом.

Так само виконується нерівність  $E_{\downarrow-}^2(j=0, n_r=0) > 0$ , яку не можна змінити на протилежну використанням потенціалу (6.61) замість (6.2), оскільки це еквівалентно перенормуванню мас у формулах (6.63) (складнішому, ніж у попередньому випадку). Спільний для всіх траєкторій зсув, необхідний для опису  $(\pi-\rho)$ -сімейства, знову досягається введення кулонівської статичної поправки до взаємодії:

$$\Delta^{(\text{st})} E^2 = -\frac{1}{4} (7 + \sqrt{17}) \alpha a \approx -2.78\alpha a. \quad (6.64)$$

Траєкторії Редже для цього випадку, отримані при оптимальних значеннях параметрів:  $a = 0.225 \text{ GeV}^2$ ,  $\alpha = 2.85$ ,  $m_1 = m_2 = 0.265 \text{ GeV}$ , узгоджуються з  $(\pi-\rho)$ -спектром. Вони має збігаються з тими, що для мінімальної взаємодії (Рис. 5), різниця з'являється між дочірніми траєкторіями із збільшенням  $n_r$ . На Рис. 6 вони порівнюються між собою і з траєкторіями моделі III (див. Рис. 4) у координатах  $(E^2, \ell)$ .

Використання інших кулонівських поправок (Едингтона-Ганта або Брайта) у комбінації з лінійним потенціалом Брауна-Рейвенгола приводить до додаткового розщеплення траєкторій (нелінійного за  $\alpha$ ), яке погіршує відповідність з  $(\pi-\rho)$ -даними і тут не подається.

**Інші взаємодії.** Потенціал Брауна-Рейвенгола (6.10) можна розглядати як суперпозицію юкавської (6.6), мінімальної (6.7) та статичної (6.3) взаємодій. Якщо перші дві розглядають як скалярні, то статична є спрощеним описом векторної взаємодії. Тому цікаво поглянути, чи лінійні потенціали векторного типу забезпечують конфайнмент, і який дають спектр.

Лінійний статичний потенціал (6.3), (6.2) дає асимптотично лінійні паралельні траєкторії:

$$E_{\uparrow\pm}^2 = 8a \left( j + \frac{1}{2} + \sqrt{2} \left( n_r + \frac{1}{2} \right) \right) + 4(m_1^2 + m_2^2) \quad (6.65)$$

без випадкового і  $\ell s$ -виродження (замість останнього є  $j$ -виродження), а параметр нахилу  $\sigma = 8a$  вдвічі більший від того, що узгоджується з нерелятивістичними моделями.

Лінійний потенціал Матвеева-Мурадяна-Тавхелідзе (6.11), (6.2), що є півсумою юкавського та статичного, приводить до якісно подібного результату:

$$E_{\uparrow\pm}^2 = 3\sqrt{3}a \left( j + \frac{1}{2} + \sqrt{3} \left( n_r + \frac{1}{2} \right) \right) + 5m_+^2 - 2m_1m_2 \quad (6.66)$$

Цікаво, що 2ЧРД з цим потенціалом (так само, як з мінімальним) вважалося в [28] добрим кандидатом на релятивістичну потенціальну модель.

Лінійний потенціал Едингтона-Ганта (6.4), (6.2) має ті ж недоліки, що й два попередніх, і дає непаралельні траєкторії:

$$E_{\uparrow\pm}^2 = 12\sqrt{3}a \left( j + \frac{1}{2} + \sqrt{3} \left( n_r + \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{15}{8}(m_1^2 + m_2^2) \pm \frac{3}{4}m_1m_2, \\ E_{\uparrow\pm}^2 = 16a \left( j + \frac{1}{2} + \sqrt{2} \left( n_r + \frac{1}{2} \right) \right) + 2(m_1^2 + m_2^2). \quad (6.67)$$

Таку ж властивість має і лінійний потенціал Брайта.

## 7. Висновки

У даній роботі розглянено 2ЧРД з загальним обертово-інваріантним локальним (у координатному просторі) потенціалом, запропонованим Никітіним та Фущичем в [30]. Він параметризується 48-ма (дійсними за умови ермітовості) функціями від  $r$ , і тут представлений у компактному матричному вигляді. Завдяки обертовій інваріантності рівняння здійснено його радіальну редукцію, що приводить до системи 8-ми пов'язаних між собою звичайних диф. рівнянь 1-го порядку для радіальних компонент хвильової функції. Матриця коефіцієнтів біля похідних є виродженою. Це дозволяє виразити половину компонент хвильової функції через решту, для якої отримати невивроджену систему 4-х рівнянь 1-го порядку, а потім – 2-х рівнянь 2-го порядку.

У коефіцієнтах цих систем як правило з'являються нефізичні особливості – полюси у деяких залежних від енергії точках  $r_E$  (відсутні у вихідному потенціалі), які роблять звичайну краєву задачу (з умовами в точках  $r = 0, \infty$ ) математично некоректною. Зміна краєвих умов (шляхом, наприклад, перенесення їх у точки  $r_E$ ) може привести до відсутності зв'язаних станів для утримуючих (з інтуїтивного погляду) потенціалів.

Структура радіальної системи 2-го порядку дозволяє вказати широкий клас потенціалів (параметризований 14-ма функціями), вільних від нефізичних особливостей. У цьому класі знайдено сім'ю точно розв'язуваних моделей, що узагальнюють відомі діраківські осцилятори [31–33] і служать основою для релятивістичної потенціальної моделі мезонів. Одну із них – 4-параметричну модель III – використано для опису  $(\pi\rho)$ -сім'ї. Отримано відповідні траєкторії Редже: вони є асимптотично паралельними прямими, але помітно викривленими у нижній частині.

Модель III добре описує стани на головних траєкторіях, гірше – на дочірніх. Причиною цього мабуть є брак дочірніх траєкторій, що відповідає асимптотичному виродженню спектра  $(j + 2n_r)$ -типу. Можна сподіватися, що більш принагідним було б виродження  $(j + n_r)$ -типу, яке поки що не вдається отримати в рамках 2ЧРД. Модель III, крім того, не підходяща для опису важких мезонів, оскільки у нерелятивістичній границі міжкварковий потенціал зникає.

2ЧРД із потенціалами скалярного та векторного типу вважаються фізично змістовнішими кандидатами на релятивістичні потенціальні моделі. Кілька версій таких потенціалів, локальних у координатному представленні, відомі з літератури. Однак відповідні 2ЧРД не є точно інтегровні, і загалом мають згадані вище нефізичні особливості. Щоб обійти ці труднощі і використати 2ЧРД-моделі у релятивістичній задачі про зв'язані стани, запропоновано наближений метод  $1/j$ -розкладів. З технічного погляду він ґрунтується на  $1/\ell$ -методі, і узагальнює його на випадок двох зв'язаних рівнянь, зведених попередньо до матрично-двочленного вигляду і нелінійно залежних від спектрального параметру. З фізичного погляду метод застосовний до випадку сильного зв'язку, і нечутливий, принаймні у нижніх порядках теорії збурень, до крайових особливостей задачі.

Метод  $1/j$ -розкладів застосовано тут до 2ЧРД із кількома версіями скалярного лінійного та векторного кулонівського потенціалів, відомих з літератури. Усі вони дають у нерелятивістичній границі корнелівський потенціал, що використовується для опису важких мезонів. Тому ці приклади можуть претендувати на роль універсаль-

них потенціальних моделей.

Отримано аналітичні вирази для спектру енергії в 0-му наближенні методу, які описують прямі або дещо викривлені паралельні траєкторії Редже. Кут їх нахилу узгоджується з параметрами нерелятивістичної моделі для усіх версій скалярного лінійного потенціалу, окрім потенціалу Матвеева-Мурадяна-Тавхелідзе (6.11), (6.2) (запропонованого в [28] для опису легких мезонів). Цей останній, як і лінійний потенціал Юкави (6.6), (6.2), не дає  $\ell s$ -виродження траєкторій. Воно наближено забезпечується мінімальним лінійним потенціалом (6.7), (6.2), а точно – потенціалом Брауна-Рейвенгола (6.10), (6.2). В обидвох цих випадках  $\ell s$ -виродження, а також деяка кривина головних траєкторій Редже дає хороший опис орбітально збуджених станів  $(\pi-\rho)$ -сім'ї мезонів. Однак випадкове виродження  $(j + 2n_r)$ -типу приводить до браку дочірніх траєкторій (як і в моделі III) для деяких радіальних збуджень цієї сім'ї.

Моделі з векторними лінійними потенціалами взагалі не забезпечують випадкового виродження, дають завеликий нахил траєкторій Редже, а деякі з них породжують непаралельні траєкторії.

Спектр для мінімальної лінійної взаємодії цілком узгоджується з отриманими раніше чисельними результатами в [12–14], де однак для легких мезонів отримано завищені значення мас. В даній роботі показано, що ця проблема усувається врахуванням векторної кулонівської взаємодії. Щодо лінійного потенціалу Брауна-Рейвенгола, то в строгому математичному сенсі він не дає зв'язаних станів через невідповідну поведінку коефіцієнтів радіальних рівнянь при  $r \rightarrow \infty$  [28]. Отриманий тут псевдо-пертурбативний спектр описує квазізв'язані стани, які утримуються ефективним потенціальним бар'єром (що зводиться до ями у нерелятивістичній границі).

## Додаток А. Матричне представлення та властивості біспінорних гармонік

Біспінорні гармоніки в  $2 \times 2$ -матричному представленні:

$$\phi^A(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_j^\mu(\mathbf{n}) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\phi^0(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2j(j+1)}} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -\sqrt{(j-\mu+1)(j+\mu)} Y_j^{\mu-1} & \mu Y_j^\mu \\ \mu Y_j^\mu & \sqrt{(j+\mu+1)(j-\mu)} Y_j^{\mu+1} \end{bmatrix},$$

$$\phi^-(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2(j+1)(2j+3)}} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sqrt{(j-\mu+1)(j-\mu+2)} Y_{j+1}^{\mu-1} & -\sqrt{(j+\mu+1)(j-\mu+1)} Y_{j+1}^\mu \\ -\sqrt{(j+\mu+1)(j-\mu+1)} Y_{j+1}^\mu & \sqrt{(j+\mu+1)(j+\mu+2)} Y_{j+1}^{\mu+1} \end{bmatrix},$$

$$\phi^+(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2j(2j-1)}} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sqrt{(j+\mu-1)(j+\mu)} Y_{j-1}^{\mu-1} & \sqrt{(j+\mu)(j-\mu)} Y_{j-1}^\mu \\ \sqrt{(j+\mu)(j-\mu)} Y_{j-1}^\mu & \sqrt{(j-\mu-1)(j-\mu)} Y_{j-1}^{\mu+1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

де  $Y_\ell^\mu(\mathbf{n})$  ( $\mu = -\ell, \dots, \ell$ ) – сферичні гармоніки.

Основні властивості біспінорних гармонік:

$$\langle i|k \rangle = \int d\mathbf{n} \text{Tr}(\phi_i^\dagger \phi_k) = \delta_{ik},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^2 \phi &= j(j+1)\phi, & j &= 0, 1, \dots, \\ j_3 \phi &= \mu \phi, & \mu &= -j, \dots, j, \\ \ell^2 \phi^i &= \ell(\ell+1)\phi^i, & \ell &= \begin{cases} j, & i = A, 0, \\ j \pm 1, & i = \mp, \end{cases} \\ s^2 \phi^i &= s(s+1)\phi^i, & s &= \begin{cases} 0, & i = A, \\ 1, & i = 0, \mp, \end{cases} \\ P\phi^{A,0} &= (-)^j \phi^{A,0}, & P\phi^\mp &= (-)^{j+1} \phi^\mp, \\ [\phi^A]^\text{T} &= -\phi^A, & [\phi^{0,\mp}]^\text{T} &= \phi^{0,\mp}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Дія спінових операторів на біспінорні дублети:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \cdot \sigma_2 \hat{o} &= \tau \hat{o}, & \sigma_1 \cdot \sigma_2 \hat{e} &= \hat{e}, \\ \sigma_{1r} \hat{o} &= R^\text{T} \hat{e}, & \sigma_{1r} \hat{e} &= R \hat{o}, \\ \sigma_{2r} \hat{o} &= -\sigma_3 R^\text{T} \hat{e}, & \sigma_{2r} \hat{e} &= -R \sigma_3 \hat{o}, \\ \sigma_{1r} \sigma_{2r} \hat{o} &= -\sigma_3 \hat{e}, & \sigma_{1r} \sigma_{2r} \hat{e} &= -R \sigma_3 R^\text{T} \hat{o}, \\ (\mathbf{n}, \sigma_1, \sigma_2) \hat{o} &= -2i \sigma_\uparrow R^\text{T} \hat{e}, & (\mathbf{n}, \sigma_1, \sigma_2) \hat{e} &= 2i R \sigma_\uparrow \hat{o} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

## Додаток В. Ортогональне перевороння потенціалів

Матрицю  $\mathbf{O}$  зручно подати у вигляді

$$\mathbf{O} = \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_1, \quad (\text{B.1})$$

де блок-діагональна матриця (залежна від  $P$ ):

$$\mathbf{O}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \sigma_3 \mathbf{R}^T & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & -\mathbf{R}^T & \\ & & & -\sigma_3 \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^{j \pm 1}, \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{O}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_3 \mathbf{R}^T & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ \mathbf{0} & & -\sigma_3 & \\ & & & -\mathbf{R}^T \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^j \quad (\text{B.3})$$

тривіалізує блоки в  $\mathbf{H}$  (та інших матрицях):

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{O}_1 \mathbf{H} \mathbf{O}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

а

$$\mathbf{O}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^{j \pm 1}, \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{O}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{для } P = (-)^j \quad (\text{B.6})$$

зводить  $\tilde{\mathbf{H}}$  до канонічного вигляду (4.2). Крім цього,  $\mathbf{O}_1$  та  $\mathbf{O}_2$  вибрані так, що зводять  $\mathbf{G}$  до незалежного від  $P$  вигляду:

$$\bar{\mathbf{G}} = 2 \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{\uparrow} C \sigma_1 & 0 \\ \sigma_{\uparrow} & 0 & 0 & 0 \\ C \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Інші матриці:

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mu \\ -\nu & \mathbf{0} \\ \mu & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

де  $\mu = m_{\pm}$  і  $\nu = m_{\mp}$  для  $P = \mp(-)^j$ ;  
власні потенціали:  $\mathbf{U} = \bar{\mathbf{\Delta}} \bar{\mathbf{S}}$ , де

$$\bar{\mathbf{\Delta}} = \begin{bmatrix} U_1 + U_5 \sigma_3 & 0 & 0 & U_3 + i U_7 \sigma_3 \\ 0 & U_2 + U_6 \sigma_3 & U_4 + i U_8 \sigma_3 & 0 \\ 0 & U_4 - i U_8 \sigma_3 & U_2 - U_6 \sigma_3 & 0 \\ U_3 - i U_7 \sigma_3 & 0 & 0 & U_1 - U_5 \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

для  $P = (-)^{j \pm 1}$ ,

$$\bar{\mathbf{\Delta}} = \begin{bmatrix} U_2 + U_6 \sigma_3 & 0 & 0 & -U_4 - i U_8 \sigma_3 \\ 0 & U_1 + U_5 \sigma_3 & -U_3 - i U_7 \sigma_3 & 0 \\ 0 & -U_3 + i U_7 \sigma_3 & U_1 - U_5 \sigma_3 & 0 \\ -U_4 + i U_8 \sigma_3 & 0 & 0 & U_2 - U_6 \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

для  $P = (-)^j$ , де

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2}(U_{11} + U_{44}), & U_5 &= \frac{1}{2}(W_{14} + \overset{*}{W}_{14}), \\ U_2 &= \frac{1}{2}(U_{22} + U_{33}), & U_6 &= \frac{1}{2}(W_{23} + \overset{*}{W}_{23}), \\ U_3 &= \frac{1}{2}(U_{11} - U_{44}), & U_7 &= \frac{1}{2}(W_{14} - \overset{*}{W}_{14}), \\ U_4 &= \frac{1}{2}(U_{22} - U_{33}), & U_8 &= -\frac{i}{2}(W_{23} - \overset{*}{W}_{23}), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

а

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \bar{S} & & \mathbf{0} \\ & \bar{\Sigma} & \\ \mathbf{0} & & \bar{S} \end{bmatrix} \quad \text{для усіх } P, \quad (\text{B.12})$$

де

$$\begin{aligned} \bar{S} &= S|_{R=1}, \\ \bar{\Sigma} &= \Sigma|_{R=1}: \end{aligned} \quad \begin{array}{c|c|c} i & 1 & 2 & 3 \\ \hline \bar{S}_{(i)} & I & \sigma_1 \cdot \sigma_2 & (\sigma_1 \cdot \mathbf{n})(\sigma_2 \cdot \mathbf{n}) \\ \hline \bar{\Sigma}_{(i)} & I & \tau & -\sigma_3 \\ \hline \bar{\Sigma}_{(i)} & I & I & -\sigma_3 \end{array}; \quad (\text{B.13})$$

невласні потенціали:  $\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{\Omega}} \bar{\mathbf{T}}$ , де

$$\bar{\mathbf{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & W_3 + W_4 \sigma_3 & W_1 - W_2 \sigma_3 & 0 \\ \overset{*}{W}_3 + \overset{*}{W}_4 \sigma_3 & 0 & 0 & \overset{*}{W}_1 + \overset{*}{W}_2 \sigma_3 \\ \overset{*}{W}_1 - \overset{*}{W}_2 \sigma_3 & 0 & 0 & \overset{*}{W}_3 - \overset{*}{W}_4 \sigma_3 \\ 0 & W_1 + W_2 \sigma_3 & W_3 - W_4 \sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

для  $P = (-)^{j\pm 1}$ ,

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -W_3^* - W_4^* \sigma_3 & W_1^* + W_2^* \sigma_3 & 0 \\ -W_3 - W_4 \sigma_3 & 0 & 0 & W_1 - W_2 \sigma_3 \\ W_1 + W_2 \sigma_3 & 0 & 0 & -W_3 + W_4^* \sigma_3 \\ 0 & W_1^* - W_2^* \sigma_3 & -W_3^* + W_4^* \sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

для  $P = (-)^j$ , де

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}(W_{13} - W_{24}^*), & W_2 &= \frac{1}{2}(W_{12} - W_{34}^*), \\ W_3 &= \frac{1}{2}(W_{13} + W_{24}^*), & W_4 &= \frac{1}{2}(W_{12} + W_{34}^*), \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

а

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma} & & 0 \\ & -\bar{\Gamma}^\dagger & \\ 0 & & -\bar{\Gamma}^\dagger \\ & & & \bar{\Gamma} \end{bmatrix} \quad \text{для усіх } P, \quad (\text{B.17})$$

де

$$\bar{\Gamma} = \Gamma|_{R=1} : \begin{array}{c|ccc} i & 1 & 2 & 3 \\ \hline T_{(i)} & \sigma_1 \cdot \mathbf{n} & \sigma_2 \cdot \mathbf{n} & (\mathbf{n}, \sigma_1, \sigma_2) \\ \hline \bar{\Gamma}_{(i)} & 1 & -\sigma_3 & -2i\sigma_\uparrow \end{array}. \quad (\text{B.18})$$

### Додаток С. Обчислення асимптотик у випадку лінійних потенціалів

Припустимо, що у випадку рівняння Тодорова з лінійним скалярним та кулонівським векторним потенціалами функції  $r_c(\ell)$  та  $E_c(\ell)$  дійсно є монотонно-зростаючими (якщо це було б не так, то рано чи пізно виникла б суперечність). Тоді для обчислення асимптотик  $r_\infty(\ell)$  та  $E_\infty(\ell)$  у функції  $W(r, E, \ell)$  (заданій формулами (6.1), (6.2), (6.37), (6.38)) досить залишити її головні члени, знехтувавши кулонівською взаємодією та масами спокою частинок:

$$W \sim -\frac{1}{4}E^2 + a^2 r^2 + \frac{\ell^2}{r^2}. \quad (\text{C.1})$$

З рівнянь  $W = 0$  та

$$\frac{\partial W}{\partial r} \sim 2 \left( a^2 r - \frac{\ell^2}{r^3} \right) = 0 \quad (\text{C.2})$$

(див. (6.16)–(6.17)) відразу отримуємо шукані асимптотики:

$$r_\infty = \sqrt{\ell/a} = 1/(\sqrt{a\lambda}), \quad E_\infty = 2\sqrt{2a\ell} \quad \longrightarrow \quad b_\infty = 2a/\lambda^2. \quad (\text{C.3})$$

Подібним чином діємо у випадку 2ЧРД з будь-яким із вказаних в розділі 6 лінійним скалярним та кулонівським векторним потенціалами (або їх суперпозицією). Знехтувавши у функціях  $W_\uparrow$  та  $W_\downarrow$  масами та кулонівською взаємодією і зберігши головні члени, отримуємо для них таку загальну структуру:

$$W \sim -\frac{1}{4}(E + \varkappa_1 ar) \left( E + \varkappa_2 ar - \frac{(\varkappa_0 ar)^2}{E + \varkappa_3 ar} \right) + \frac{j^2}{r^2}, \quad (\text{C.4})$$

де безрозмірні коефіцієнти  $\varkappa_n$  ( $n = 0, \dots, 3$ ) залежать від спінової структури потенціалу і, взагалі кажучи, є різні для різних функцій  $W_{\uparrow\pm}$ . Після заміни змінних :

$$r_\infty = z\sqrt{j/a}, \quad E_\infty = y\sqrt{aj} \quad (\text{C.5})$$

рівняння (6.16)–(6.17) із функцією (C.4) набувають вигляду:

$$\frac{1}{4} [y + \varkappa_1 z] \left[ y + \varkappa_2 z - \frac{\varkappa_0^2 z^2}{y + \varkappa_3 z} \right] - \frac{1}{z^2} = 0, \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \varkappa_1 z \left[ y + \varkappa_2 z - \frac{\varkappa_0^2 z^2}{y + \varkappa_3 z} \right] \\ & + \frac{1}{4} [y + \varkappa_1 z] \left[ \varkappa_2 z - 2 \frac{\varkappa_0^2 z^2}{y + \varkappa_3 z} + \frac{\varkappa_0^2 \varkappa_3 z^3}{(y + \varkappa_3 z)^2} \right] + \frac{2}{z^2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Із них після нескладних викладок можна отримати рівняння

$$\begin{aligned} & [2t + 3\varkappa_1] [t + \varkappa_3] [(t + \varkappa_2)(t + \varkappa_3) - \varkappa_0^2] \\ & + [t + \varkappa_1] [\varkappa_2(t + \varkappa_3)^2 - 2\varkappa_0^2(t + \varkappa_3) + \varkappa_0^2 \varkappa_3] = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

на змінну  $t = y/z$ , яке є алгебричним рівнянням 4-го степеня. Тоді з рівняння (C.6) можна отримати вирази для шуканих величин  $z$  і  $y$  у термінах розв'язку  $t$  рівняння (C.8):

$$z = \sqrt[4]{\frac{4(t + \varkappa_3)}{(t + \varkappa_3)[(t + \varkappa_2)(t + \varkappa_3) - \varkappa_0^2]}}, \quad y = tz. \quad (\text{C.9})$$

Серед усіх розв'язків рівняння (C.8) треба залишити фізичні: вони повинні задовольняти нерівності  $t > 0$ ,  $t + \varkappa_n > 0$  ( $n = 1, 2, 3$ ), необхідні для існування зв'язаного стану в нерелятивістичній границі, а також умову (6.18) (яка у термінах  $t$  є громіздкою, і ми її тут не подаємо). В усіх розглянутих у даній роботі випадках ці умови визначають розв'язок  $t$  однозначно.

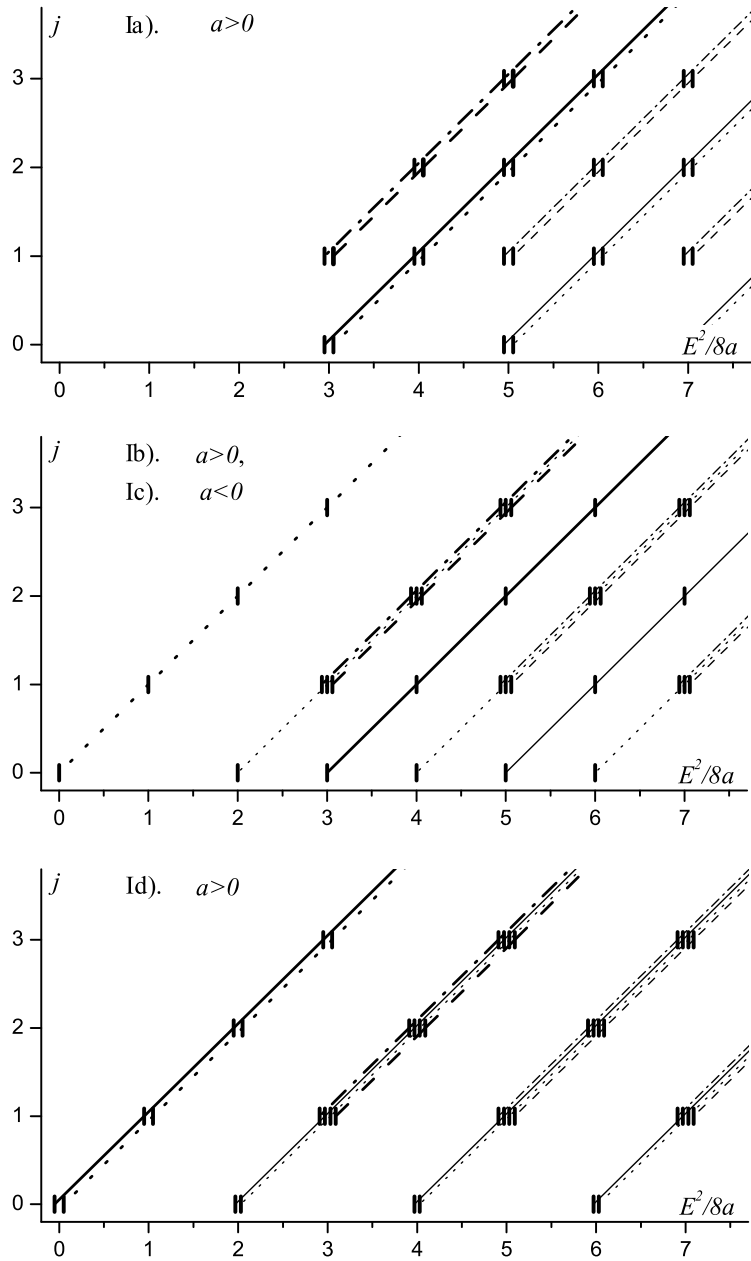
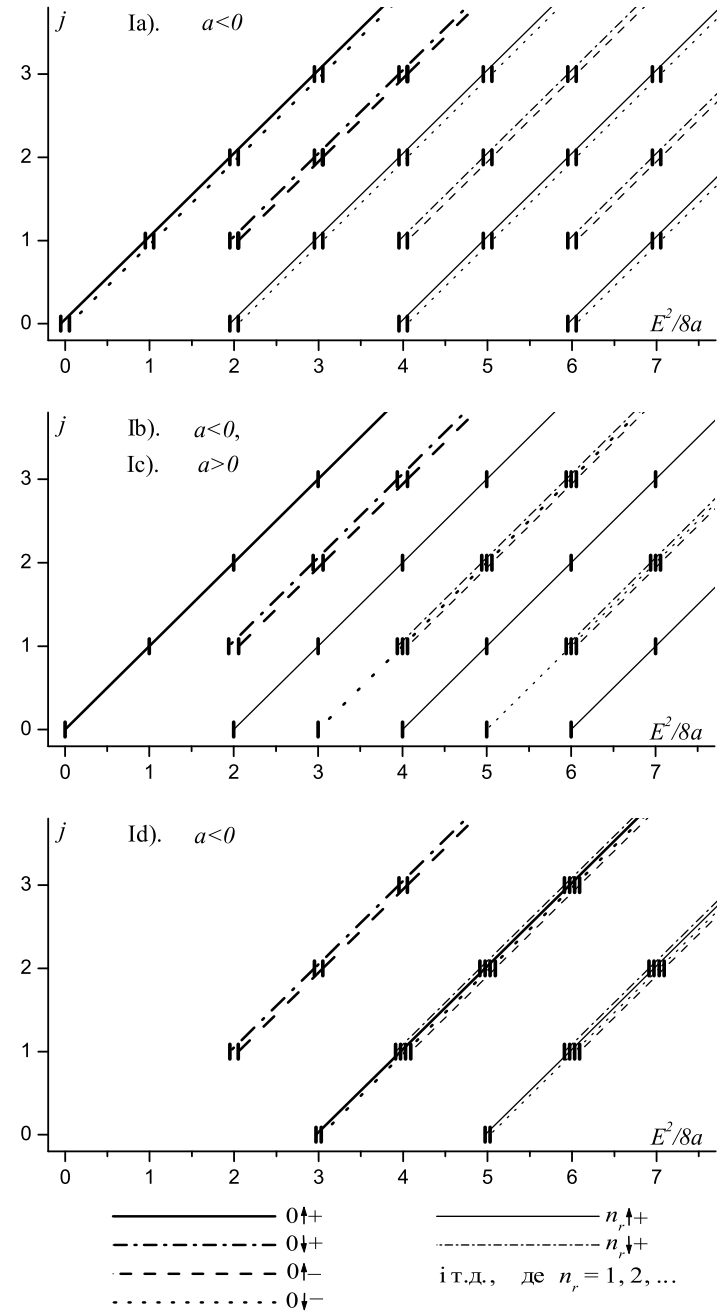


Рис. 1. Траекторії Редже у безмасових моделях Ia–Id.





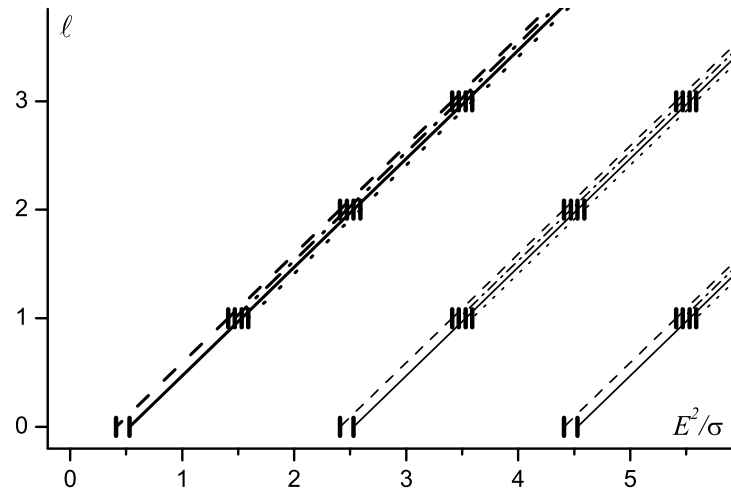
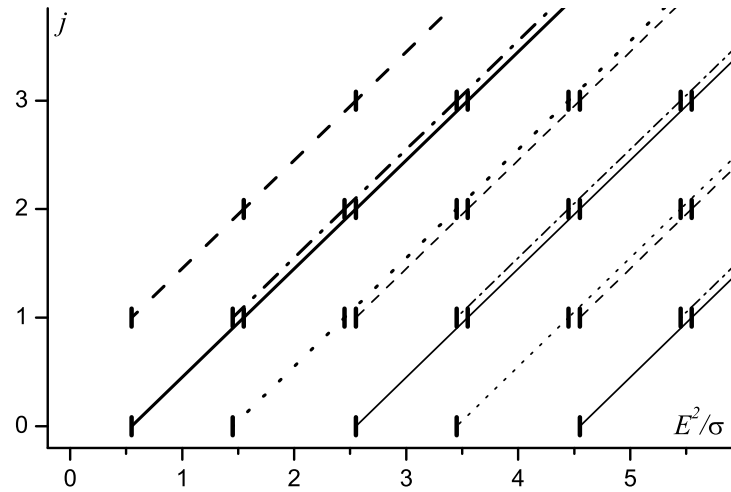
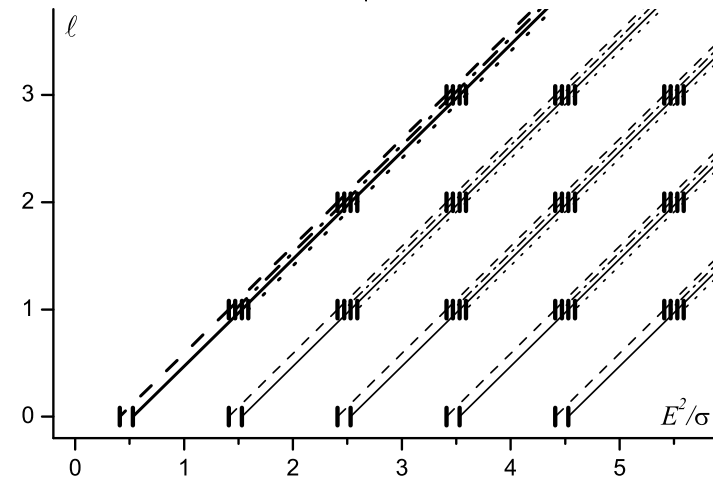
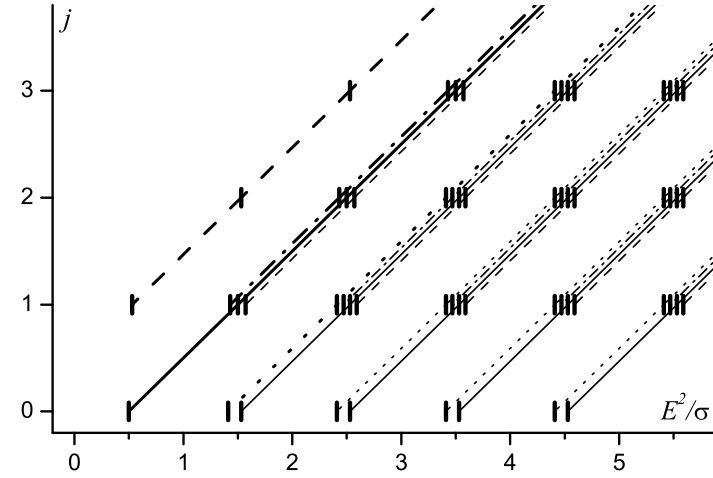
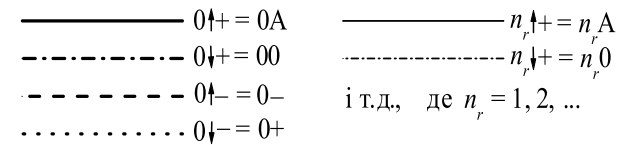
а). Виродження типу  $j + 2n_r$ 

Рис. 2. Траекторії Редже ідеалізованих мезонних спектрів.

б). Виродження типу  $j + n_r$ 

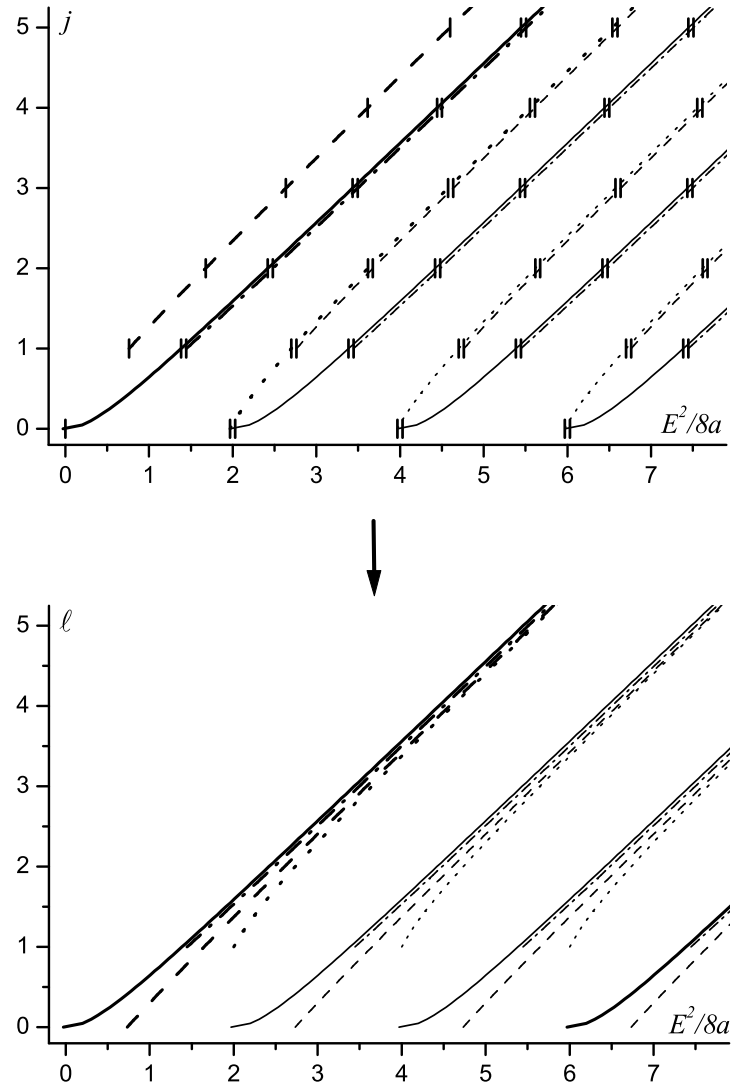


Рис. 3. Траекторії Редже безмасової моделі III при  $\kappa_1 = 1/2$ ,  $\kappa_2 = -1/2$ ,  $\chi = 0$ . Позначення такі ж, як на Рис. 2.

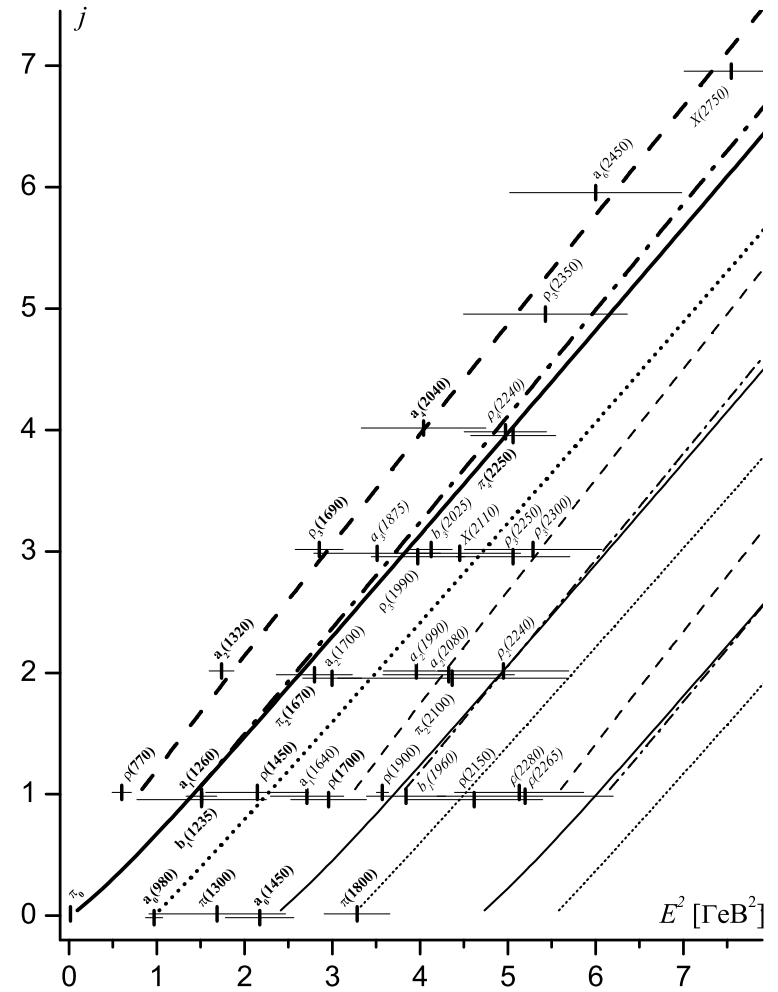


Рис. 4. Спектр  $\pi$ - та  $\rho$ -мезонів і оптимальні траекторії Редже моделі III. Назви найбільш надійно встановлених резонансів подано товстим шрифтом, деяких найменш надійно встановлених – курсивом. Тонкі горизонтальні лінії вказують ширини резонансів.

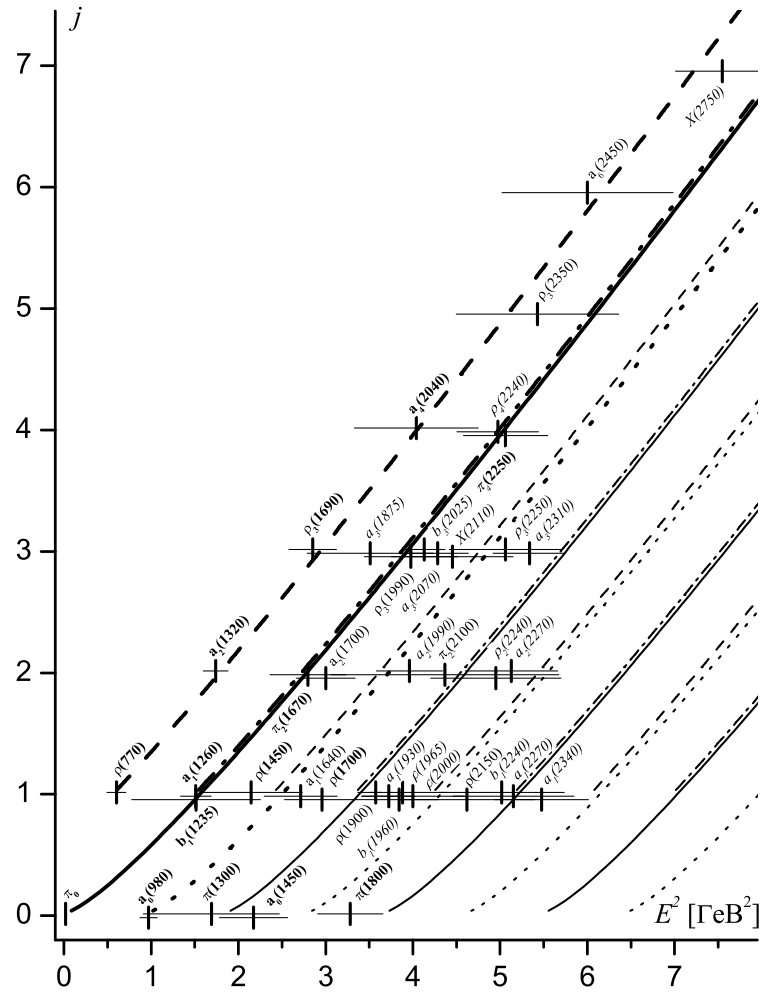


Рис. 5. Спектр  $\pi$ - та  $\rho$ -мезонів і оптимальні траєкторії Редже для мінімального лінійного + кулонівського статичного потенціалів. Позначення такі ж, як на Рис. 4.

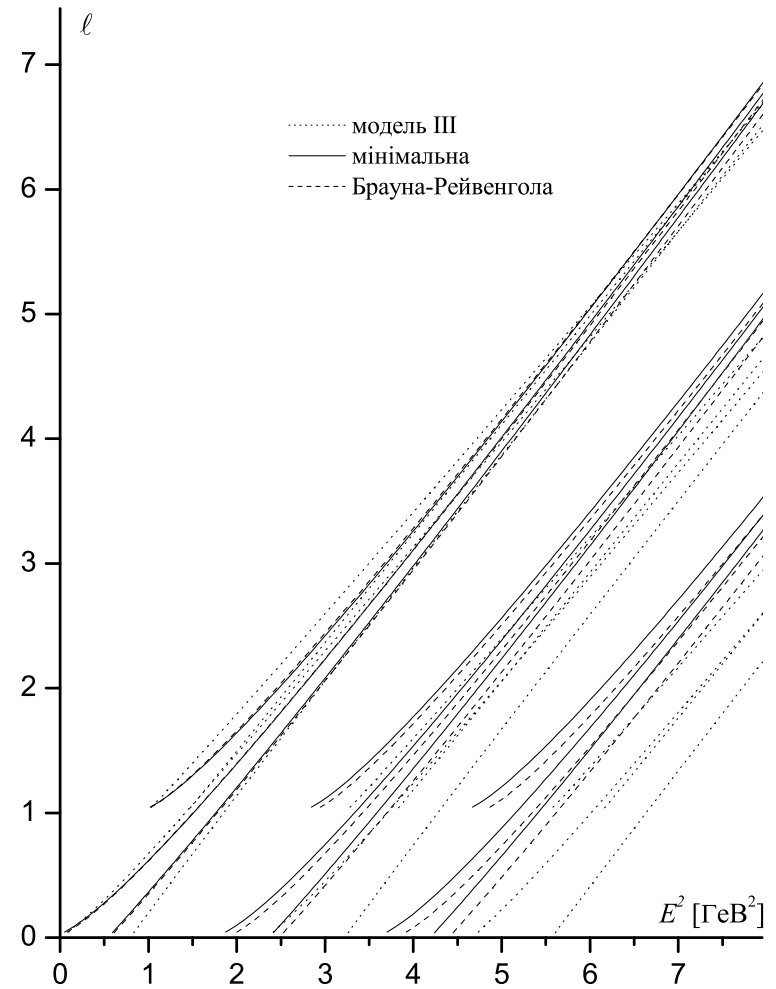


Рис. 6. Траєкторії Редже для мінімального потенціалу, потенціалу Брауна-Рейвенгола та моделі III.

## Література

1. Breit G., The effect of retardation on the interaction of two electrons, *Physical Review*, 1929, V. 34, N 4, 553–573.
2. Bethe H. A. and Salpeter E. E., Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1957.
3. Eddington A. S., The charge of an electron, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 1929, V. 122, N 789, 358–369.
4. Gaunt J. A., The Triplets of Helium, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 1929, V. 228, 151–196; *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 1929, V. 122, N 790, 513–532.
5. Darewych J. W. and Di Leo L., Two-fermion Dirac-like eigenstates of the Coulomb QED Hamiltonian, *Journal of Physics A*, 1996, V. 29, N 21, 6817–6841.
6. Barut A. O. and Komy S., Derivation of nonperturbative relativistic two-body equation from the action principle in quantum electrodynamics, *Fortschritte der Physik*, 1985, V. 33, N 6, 309–318.
7. Barut A. O. and Ünal N., A new approach to bound-state quantum electrodynamics, *Physica*, 1987, V. 142A, N 1–3, 467–487.
8. Grandy W. T. Jr., Relativistic Quantum Mechanics of Leptons and Fields, Dordrecht-Boston-London, Kluwer Academic Publishers, 1991.
9. Krolikowski W., Relativistic radial equations for 2 spin-1/2 particles with a static interaction, *Acta Physica Polonica B*, 1976, V. 7, N 7, 485–496.
10. Childers R. W., Effective Hamiltonians for generalized Breit interactions in QCD, *Physical Review D*, 1987, V. 36, N 2, 606–614.
11. Brayshaw D. D., Relativistic description of quarkonium, *Physical Review D*, 1987, V. 36, N 5, 1465–1478.
12. Ceuleneer R., Legros P. and Semay C. On the connection between relativistic and nonrelativistic description of quarkonium, *Nuclear Physics A*, 1991, V. 532, 395c–400c.
13. Semay C., Ceuleneer R. and Silvestre-Brac B. Two-body Dirac equation with diagonal central potentials. *Journal of Mathematical Physics*, 1993, V. 34, N 6, 2215–2225.
14. Semay C. and Ceuleneer R. Two-body Dirac equation and Regge trajectories. *Physical Review D*, 1993, V. 48, N 9, 4361–4369.
15. Tsibidis G. D., Quark-Antiquark Bound States and the Breit Equation, LANL e-Print archive, 2000, <http://xxx.lanl.gov/abs/hep-ph/0007143>.
16. Сименюг І. В., Туровський О. І., Релятивістична модель двонуклонної задачі з прямою взаємодією, *Український фізичний журнал*, 2001, Т. 46, N 4, 391–401.
17. Сименюг І. В., Туровський О. І., Модель дейтрона в підході Дірака-Брейта з прямою взаємодією, *Журнал фізичних досліджень*, 2004, Т. 8, N 1, 23–34.
18. Sazdjian H., Relativistic wave equations for the dynamics of two interacting particles. *Physical Review D*, 1986, V. 33, N 11, 3401–3424.
19. Crater H. W. and Van Alstine P., Two-body Dirac equations for particles interacting through world scalar and vector potentials. *Physical Review D*, 1987, V. 36, N 10, 3007–3035.
20. Darewych J. W., Few-particle eigenstates in the Yukawa model, *Condensed Matter Physics*, 1998, V. 1, N 3(15), 593–604.
21. Darewych J. W. and Duviryak A., Exact few-particle eigenstates in partially reduced QED, *Physical Review A*, 2002, V. 66, N 3, 032102-1–032102-20.
22. Duviryak A. and Darewych J. W., Variational wave equations of two fermions interacting via scalar, pseudoscalar, vector, pseudovector and tensor fields, *Central European Journal of Physics*, 2005, V. 3, N 3, 1–17.
23. Salpeter E. E. and Bethe H. A., A Relativistic Equation for Bound-State Problems, *Physical Review*, 1951, V. 84, N 6, 1232–1242.
24. Salpeter E. E., Mass corrections to the fine structure of hydrogen-like atoms, *Physical Review*, 1952, V. 87, N 2, 328–343.
25. Faustov R. N., The proton structure and hyperfine splitting of hydrogen energy levels, *Nuclear Physics*, 1966, V. 75, N 3, 669–681.
26. Matveev V. A., Muradyan R. M., Tavkhelidze A. N. Relativistic covariant equations for two particles in quantum field theory. *Communications of the Joint Institute for Nuclear Physics*, E2-3498, Dubna, 1967.
27. Хелашвили А. А., Квазипотенциальное уравнение для системы двух частиц со спином 1/2, *Сообщения Объединенного института ядерных исследований*, P2-4327, Дубна, 1969.
28. Хелашвили А. А., Радиальное квазипотенциальное уравнение для фермиона и антифермиона и бесконечно растущие центральные потенциалы, *Теоретическая и математическая физика*, 1982, Т. 51, N 2, 201–210.
29. Crater H. W., Wong C. W. and Wong C.-Y., Singularity-free Breit equation from constraint two-body Dirac equations, *International*

- Journal of Modern Physics E*, 1996, V. 5, N 4, 589–615.
30. Никитин А. Г., Фушч В. И., Нелиевские интегралы движения для частиц произвольного спина и для систем взаимодействующих частиц, *Теоретическая и математическая физика*, 1991, V. 88, N 3, 406–515.
  31. Moshinsky M. and Szczepaniak A. The Dirac oscillator. *Journal of Physics A*, 1989, V. 22, No 17, L817–L819.
  32. Moshinsky M., Loyola G. and Villegas C. Anomalous basis for representations of the Poincare group. *Journal of Mathematical Physics* V. 32, No 2, 373–381.
  33. Moshinsky M., Quesne C. and Smirnov Yu. F. Supersymmetry and superalgebra for the two-body system with a Dirac oscillator interaction *Journal of Physics A*, 1995, V. 28, N 22, 6447–6457.
  34. Mlodinov L.D. and Shatz M. P., Solving the Schrödinger equation with use of  $1/N$  perturbation theory, *Journal of Mathematical Physics*, 1984, V. 25, N 4, 943–950.
  35. Imbo T., Pagnamenta A. And Sukhatme U., Energy eigenstates of spherically symmetric potentials using the shifted  $1/N$  expansion, *Physical Review D*, 1984, V. 29, N 8, 1669–1681.
  36. Vakarchuk I. O., The  $1/N$ -expansion in quantum mechanics. High-order approximations, *Journal of Physical Studies* 2002, V. 6, N 1, 46–54.
  37. Mustafa O. and Barakat T., Nonrelativistic shifted- $l$  expansion technique for three- and two-dimensional Schrodinger equation, *Communications in Theoretical Physics*, 1997, V. 28, N 3, 257–264.
  38. Mustafa O. and Barakat T., Relativistic shifted- $l$  expansion technique for Dirac and Klein-Gordon equations, *Communications in Theoretical Physics*, 1998, V. 29, N 4, 587–594.
  39. Chraplyvy Z. V., Reduction of relativistic two-particle wave equations to approximate forms. I. *Physical Review*, 1953, V. 91, N 2, 388–391.
  40. Бердников Е. Б., Пронько Г. П. Релятивистская модель орбитальных возбуждений мезонов, *Теоретическая и математическая физика*, 1991, T. 54, N 3(9), 763–776.
  41. Goebel C., LaCourse D., Olsson M.G. Systematics of some ultra-relativistic potential models, *Physical Review D*, 1990, V. 41, N 9, 2917–2923.
  42. Takabayasi T. Relativistic wave equation and linear meson trajectories, *Progress in Theoretical Physics*, 1969, V. 42, N 2, 423–425.
  43. Takabayasi T. Dynamical group of relativistic oscillator and linear meson trajectories, *Progress in Theoretical Physics*, 1969, V. 42, N

- 5, 1210–1212.
44. Takabayasi T. Covariant wave equations of two spinning particles harmonically bound, *Progress in Theoretical Physics*, 1979, V. 61, N 4, 1235–1250.
45. Kim Y. S. and Noz M. E. Covariant harmonic oscillator and the quark model, *Physical Review D*, 1973, V. 8, N 10, 3521–3527.
46. Ishida S., Oda M. A universal spring and meson orbital Regge trajectories, *Nuovo Cimento*, 1994, V. 107A, N 11, 2519–2525.
47. Simonov Yu. A. Ideas in nonperturbative QCD, *Nuovo Cimento*, 1994, V. 107A, N 11, 2629–2644.
48. Хрущев В. В. Спектр масс мезонов в модели обобщенного кваркового поля, *Ядерная физика*, 1987, T. 46, вып. 1(7), 219–225.
49. Khrushchev V. V. Mass formula for mesons containing light quarks, Preprint IHEP 87-9, Serpukhov, 1987.
50. Duviryak A. Fokker-type confinement models from effective Lagrangian in classical Yang-Mills theory, *International Journal of Modern Physics A*, 1999, V. 14, N 28, 4519–4547.
51. Duviryak A. The two-particle time-asymmetric relativistic model with confinement interaction and quantization, *International Journal of Modern Physics A*, 2001, V. 16, N 16, 2771–2788.
52. Borodulin V. I., Plyushchay M. S. and Pron'ko G. P. Relativistic string model of light mesons with massless quarks, *Zeitschrift für Physik C*, 1988, V. 41, N 2, 293–302.
53. Inopin A. and Sharov G. S. Hadronic Regge trajectories: Problems and approaches, *Physical Review D*, 2001, V. 63, N 5, 054023-1–054023-10.
54. W.-M. Yao et al., The review of particle physics, *Journal of Physics G*, 2006, V. 33, N 1, 1–1232.
55. Lucha W., Schoberl F. F. and Gromes D. Bound states of quarks. *Physics Reports*, 1991, V. 200, Issue 4, 127–240
56. Duviryak A. Heuristic models of two-fermion relativistic systems with field-type interaction. *J. Phys G*, 2002, V. 28, N ?, 2795–2809.
57. Brown G. E. and Ravenhall D. G. On the Interaction of Two Electrons. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1951, V. 208, N 1095, 552–559.
58. Feldman G., Fulton Th. and Townsend J. Correct no-retardation limit in Bethe-Salpeter kernels, *Physical Review A*, 1973, V. 8, N 3, 1149–1156.
59. Todorov I. T., Quasipotential equation corresponding to the relativistic eiconal approximation, *Physical Review D*, 1971, V. 3, N 10, 2351–2356.

60. Rizov V. A., Sazdian H. and Todorov I. T., On the relativistic quantum mechanics of two interacting spinless particles, *Annals of Physics (NY)*, 1985, V. 165, N 1, 59–97.

## CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

**AIMS AND SCOPE:** The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

---

### ABSTRACTED/INDEXED IN:

- Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences
- ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services
- INSPEC
- Elsevier Bibliographic Databases (EMBASE, EMNursing, Compendex, GEOBASE, Scopus)
- “Referativnyi Zhurnal”
- “Dzherelo”

---

**EDITOR IN CHIEF:** Ihor Yukhnovskii

**EDITORIAL BOARD:** T. Arimitsu, *Tsukuba*; J.-P. Badiali, *Paris*; B. Berche, *Nancy*; J.-M. Caillol, *Orsay*; C. von Ferber, *Freiburg*; R. Folk, *Linz*; D. Henderson, *Provo*; Yu. Holovatch, *Lviv*; M. Holovko, *Lviv*; O. Ivankiv, *Lviv*; M. Korynevskii, *Lviv*; Yu. Kozitsky, *Lublin*; M. Kozlovskii, *Lviv*; H. Krienke, *Regensburg*; R. Levitskii, *Lviv*; V. Morozov, *Moscow*; I. Mryglod, *Lviv*; O. Patsahan (Assistant Editor), *Lviv*; N. Plakida, *Dubna*; G. Röpke, *Rostock*; Yu. Rudavskii, *Lviv*; I. Stasyuk (Associate Editor), *Lviv*; M. Tokarchuk, *Lviv*; I. Vakarchuk, *Lviv*; M. Vavruk, *Lviv*; A. Zagorodny, *Kyiv*.

### CONTACT INFORMATION:

Institute for Condensed Matter Physics  
of the National Academy of Sciences of Ukraine  
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine  
Tel: +380(322)760908; Fax: +380(322)761158  
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua <http://www.icmp.lviv.ua>

---