Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–22–03U

М.А. Шпот

ВІЛЬНИЙ ПРОПАГАТОР СИЛЬНО АНІЗОТРОПНИХ СИСТЕМ З ВІЛЬНИМИ ПОВЕРХНЯМИ

ЛЬВІВ

УДК: 538.9, 538.97, 517.9

PACS: 64.60.ae, 64.60.De, 68.35.Rh, 64.60.an, 02.30.Hq

Вільний пропагатор сильно анізотропних систем з вільними поверхнями

М.А. Шпот

Анотація. Представлено короткий огляд флуктуаційно індукованих сил у статистичних системах з плівковою геометрією, що перебувають у критичній точці, та розрахунку амплітуд Казимира, які характеризують ці сили кількісно. Особливий наголос зроблено на розгляді особливостей сильно анізотропних m-вісних систем у точці Ліфшица, зокрема, на випадку “перпендикулярної” орієнтації поверхонь з вільними граничними умовами. За межами найпростішого однопетльового наближення розрахунки амплітуд Казимира неможливі без знання Гаусового пропагатора, що відповідає лініям діаграм Фейнмана в теорії збурень. Ми представили явний вираз для такого пропагатора у випадку анізотропної системи з паралельними поверхнями, перпендикулярними до однієї з осей анізотропії.

The free propagator of strongly anisotropic systems with free surfaces

M.A. Shpot

Abstract. A brief overview of fluctuation-induced forces in statistical systems with film geometry at the critical point and the calculation of Casimir amplitudes, which characterize these forces quantitatively, is presented. Particular attention is paid to the special features of strongly anisotropic m-axis systems at the Lifshitz point, specifically, in the case of a “perpendicular” orientation of surfaces with free boundary conditions. Beyond the simplest one-loop approximation, calculations of Casimir amplitudes are impossible without knowledge of the Gaussian propagator, which corresponds to the lines of Feynman diagrams in the perturbation theory. We present an explicit expression for such a propagator in the case of an anisotropic system with parallel surfaces perpendicular to one of the anisotropy axes.

Подається в Український фізичний журнал
Submitted to Ukrainian Journal of Physics

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою http://www.icmp.lviv.ua/

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (http://www.icmp.lviv.ua/)

Микола Адріанович Шпот

Вільний пропагатор сильно анізотропних систем з вільними поверхнями

Роботу отримано 11 грудня 2022 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом статистичної теорії конденсованих систем

Виготовлено при ІФКС НАН України

1. Флуктуаційно індуковані сили у фізиці просторово обмежених систем

Теоретичні дослідження просторово обмежених систем є особливо важливими, оскільки всі реальні фізичні об'єкти мають граничні поверхні і скінченні розміри. Більше того, в таких об'єктах проявляються ефекти, відсутні в ідеальних модельних системах без просторових обмежень. Одним із прикладів є ефект Казимира в критичних системах, який полягає у виникненні флуктуаційно індукованих сил притягання чи відштовхування між граничними поверхнями. Він відбувється завдяки далекосяжним флуктуаціям тоді, коли температура наближається до критичної точки фазового переходу в безмежному об'ємі. Величина таких флуктуаційно індукованих взаємодій може вимірюватися експериментально [1–3] і визначається значенням т. зв. амплітуд Казимира.[1]

Назва ефекту походить від імені датського фізика Казимира, який у 1948 р. показав [9], що паралельні провідні пластини розміщені у вакуумі притягаються завдяки існуванню нульових вакуумних флуктуацій електромагнітного поля. Казимир розрахував енергію взаємодії $\delta E(L)$ між цими поверхнями на одиницю площі і отримав результат

$$\delta E(L)/A = \hbar c\Big(-\frac{\pi^2}{720}\Big)\, L^{-3}, \tag{1}$$

де A — площа пластин, а L — відстань між ними. Коефіцієнт $-\pi^2/720$ згодом почали називати амплітудою Казимира. Диференціюючи останній вираз за L, Казимир записав вираз для сили притягання між пластинами

$$|\mathcal{F}| = \hbar c\, \frac{\pi^2}{240}\, L^{-4} = 0.013\, L_\mu^{-4}\ \mathrm{dyne/cm^2}, \tag{2}$$

де L_μ — відстань між поверхнями виміряна в мікронах, і зауважив, що що цю силу можливо виміряти експериментально, що було успішно реалізовано в роботі [10].

У статистичну фізику ефект Казимира "прийшов" завдяки визначній роботі Фішера і де Жена 1978 р. [11]. Вони передбачили аналогічне притягання між паралельними поверхнями зануреними в рідину, що перебуває у критичній точці. На основі скейлінгового

[1] Ефекту Казимира в критичних системах (чи термодинамічному ефекту Казимира) присвячені огляди [4–8]. В останньому з них особлива увага приділяється експериментам.

аналізу сингулярної частини вільної енергії такої системи ці автори отримали для енергії взаємодії поверхонь оцінку

$$\delta E(L)/A \sim -k_B T\, L^{-2}, \tag{3}$$

яка є аналогом формули Казимира (1) в статистичній фізиці. У тривимірному просторі відповідна сила притягання спадає за степеневим законом $\sim L^{-3}$.

У 1981 р. Симанзік показав [12], що аналог ефекту Казимира існує в безмасовій (супер)перенормовній квантовій теорії поля з взаємодією $g\phi^4$ в просторі вимірності $d = 4 - \varepsilon$ і геометрією плівки $\infty^{d-1} \times L$. Він довів скінченність енергії Казимира $\delta E(L)$ для пари паралельних поверхонь з нульовими граничними умовами Діріхле у всіх порядках теорії збурень, а також отримав явний вираз для цієї енергії в першому порядку за константою зв'язку g [12, стор. 12].[2]

Виявилося, що в d-вимірному просторі $\delta E(L) \sim L^{d-1}$. Ця залежність узагальнює степені L, що фігурували у формулах (1) і (3) на проміжок $2 \le d \le 4$, де для сили Казимира ми маємо $F \sim L^{-d}$. У граничному випадку $d = 2$ виникають додаткові логарифмічні залежності. Згідно з передбаченням Фішера і де Жена [11], у двовимірному просторі $\delta E(L) \sim (\ln L)/L$.

Формально така сама теорія в теоретико-польовому підході описує критичні явища в класичних статистичних системах. Саме в цьому контексті були виконані розрахунки роботи Креха і Дітріха [13, 15]. Тут амплітуди Казимира вперше визначалися для систем статистичної фізики з n-компонентним параметром порядку і рядом різних граничних умов на поверхнях з використанням ε-розкладу Вільсона-Фішера [16]. Ця робота дала поштовх до появи великої кількості теоретичних [4, 6, 17, 18], експериментальних [1–3] і чисельних [19–23] досліджень ефекту Казимира в просторово обмежених статистичних системах. Далекосяжні сили подібного характеру є надзвичайно важливими для нанофізики та для практичних потреб у створенні максимально компактних приладів. Проблематика такого типу докладно розглядається в огляді [24].

Новим кроком, який необхідно було зробити з часів піонерських робіт 1981 та 1991 років, де амплітуди Казимира визначалися тільки в лінійному за ε наближенні, стала робота за участю автора [25]. Тут вперше в літературі вдалося просунутися в наступний порядок теорії

[2] В роботі [12] цей результат наведено без жодних розрахункових деталей. Згодом, у контексті статистичної фізики, його було відтворено в [13, (5.11)] за допомогою імпульсного представлення. У реальному просторі його вивід з використанням інтегралів від добутків дзета-функцій Гурвіца виконано в [14].

збурень при розгляді плівкових систем з періодичними та спеціальними граничними умовами. Було показано, що внаслідок особливостей інфрачервоної поведінки певного класу діаграм Фейнмана, у цих випадках ε-розклад амплітуд Казимира втрачає аналітичність за межами першого порядку. Всупереч наївним очікуванням доданка порядку $O(\varepsilon^2)$, було виявлено поправку $O(\varepsilon^{3/2})$ і знайдено коефіцієнт цієї нової поправки в явному вигляді. Було також показано, що ε-розклади таких амплітуд, крім цілих степенів ε, включають нецілі степені $\varepsilon^{k/2}$ з $k \ge 3$, а також степені $\ln \varepsilon$. Ключовою ідеєю, яка забезпечила систематичний підхід до проблеми, було виділення небезпечної нульової моди і утворення пов'язаного з нею ефективного гамільтоніана $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(d-1)}$ шляхом відінтегровування ненульових мод.

До цього часу, як зазвичай, ми обговорювали виключно просторово однорідні системи. Їх характерною рисою є наявність ізотропної масштабної інваріантності. Це означає, що у відсутності границь ці системи залишаються "самоподібними", коли відстані Δx вздовж будь-яких напрямів перетворюються як $\Delta x = \ell \Delta x'$, де ℓ — довільний масштабний фактор. У таких системах кореляційна довжина ξ проявляє однакові степеневі сингулярності $\sim |T/T_c - 1|^{-\nu}$ у всіх просторових напрямах, коли температура наближається до критичної.

Проте, коли йдеться про системи з неоднорідностями, які призводять до втрати глобальної трансляційної інваріантності, в них існує один або декілька особливих напрямів (осей анізотропії), вздовж яких масштаб відстаней Δx_α повинен змінюватися нетривіальним степенем ℓ^θ масштабного фактора $\ell = \Delta x_\beta / \Delta x'_\beta$, пов'язаного з рештою напрямів. При цьому, для кореляційних довжин ξ_β і ξ_α асимптотичні степеневі закони $\xi_{\beta,\alpha} \sim |T/T_c - 1|^{-\nu_{\beta,\alpha}}$ визначаються різними показниками ν_β і $\nu_\alpha = \theta \nu_\beta$; величина θ називається індексом (показником) анізотропії. Такі системи називаються системами з анізотропною масштабною інваріантністю [26–28].

У природі існує багато фізичних об'єктів з такими властивостями. Важливими прикладами є магнетики, такі як MnP [29–31], тверді тіла зі структурними фазовими переходами [32, 33], рідкі кристали [34–36], сегнетоелектрики [37–39]. Вони характеризуються складними фазовими діаграмами з особливою (мульти)критичною точкою Ліфшица [40–43], в околі якої і реалізується анізотропна масштабна інваріантність. Теорія ефектів просторового обмеження таких систем поки-що знаходиться на стадії становлення [44–48].

Через те, що сильно анізотропні системи мають різні фізичні властивості в α- і β-напрямах, слід очікувати, що обмеження їх поверхнями приводить до більш складних ефектів порівняно з випадком ізотропних систем. Насправді, сили, індуковані просторовим обмеженням флуктуацій в присутності анізотропії відрізняються як кількісно, так і якісно від розглянутих на початку розділу. Зокрема, статистичний ефект Казимира залежить від просторової орієнтації граничних поверхонь відносно напрямів осей анізотропії. Так, в роботі [44] було визначено два принципово різні варіанти орієнтації поверхонь: "паралельну" орієнтацію, при якій поверхні є паралельними до всіх осей анізотропії, і "перпендикулярну", коли одна з осей анізотропії є ортогональною до поверхонь.

Ефективні сили Казимира, які виникають в сильно анізотропних системах між поверхнями з різними орієнтаціями мають наступний характер [44]:

$$\mathcal{F}_C \underset{L\to\infty}{\propto} \begin{cases} \Delta_\parallel^{\mathrm{BC}} L^{-\lambda_\parallel}, \\ \Delta_\perp^{\mathrm{BC}} L^{-\lambda_\parallel/\theta}, \end{cases} \qquad \text{де} \quad \lambda_\parallel = d - m + \theta m. \tag{4}$$

Тут $\Delta_\parallel^{\mathrm{BC}}$ і $\Delta_\perp^{\mathrm{BC}}$ — амплітуди Казимира, що відповідають паралельній і перпендикулярній орієнтаціям і залежать від граничних умов на поверхнях (на що вказують індекси "BC"), а m — кількість осей анізотропії. Показник загасання $\lambda_\perp = \lambda_\parallel/\theta$ при перпендикулярній орієнтації поверхонь є в $1/\theta \approx 2$ рази більшим[3], ніж у випадку паралельної орієнтації, і далекодіючі ефективні сили проявляють себе, відповідно, у значно меншій мірі.

2. Термодинаміка статистичного ефекту Казимира

Залежність сил Казимира від орієнтації поверхонь відносно осей анізотропії проявляється на рівні визначення і скейлінгової поведінки базової термодинамічної величини, *надлишкової вільної енергії* $f_{\mathrm{res}}^{a,b}(L)$ анізотропних систем у плівковій геометрії.

У загальному, для систем, обмежених двома паралельними поверхнями, розміщеними на відстані L, величина $f_{\mathrm{res}}^{a,b}(L)$ визначається наступним виразом для густини вільної енергії на одиницю площі:

$$f_L \equiv \lim_{A\to\infty} \frac{F}{Ak_BT} = L\, f_\infty + f_s^a + f_s^b + f_{\mathrm{res}}^{a,b}(L)\,. \tag{5}$$

Тут $F = -k_BT \ln Z$ — повна вільна енергія системи в шарі товщини L, Z — відповідна статистична сума, A — площа $(d-1)$-вимірних

[3] Така оцінка пов'язана з тим, що в точці Ліфшица [40–43] індекс анізотропії θ пов'язаний співвідношенням $\theta = (2-\eta_\perp)/(4-\eta_\parallel)$ з (малими) критичними показниками кореляцій $\eta_\perp$ і $\eta_\parallel$ у напрямах, перпендикулярних і паралельних до осей анізотропії [49, 50].

гіперповерхонь, якими ця система обмежена, f_∞ — густина вільної енергії на одиницю об'єму в безмежній системі, і $f_s^a + f_s^b$ — сумарна густина поверхневих вільних енергій обидвох границь на одиницю площі.[4] Надлишкова вільна енергія $f_{\mathrm{res}}^{a,b}(L)$ залежить як від температури, так і від величини L. Згідно з теорією скейлінгу для систем скінчених розмірів (finite-size scaling) [51], ця функція має скейлінгову форму

$$f_{\mathrm{res}}^{a,b}(L) \approx L^{-\zeta_\iota}\, \Theta_{a,b}(L/\xi_\infty)\,. \tag{6}$$

Тут ξ_∞ — кореляційна довжина в системі безмежних розмірів, а $\Theta_{a,b}(x)$ — універсальна скейлінгова функція, форма якої залежить від типу об'ємного класу універсальності системи, її геометрії і типів поверхонь, що її обмежують. Показник спадання ζ_ι теж універсальний, і у випадку ізотропних систем з короткосяжними взаємодіями він пов'язаний тільки з вимірністю системи d і рівний $\zeta_\iota = d-1$.

Коли температура рівна критичній температурі безмежної системи T_c і об'ємна кореляційна довжина ξ_∞ стає безмежною, величина $f_{\mathrm{res}}^{a,b}(L)$ спадає як

$$f_{\mathrm{res}}^{a,b}(L) \sim \Theta_{a,b}(0)\, L^{-\zeta_\iota} \equiv \Delta_\iota^{\mathrm{BC}}\, L^{-\zeta_\iota} \tag{7}$$

в границі $L \to \infty$. Для даного середовища і типу поверхонь значення скейлінгової функції $\Theta_{a,b}(0)$ визначає амплітуду Казимира $\Theta_{a,b}(0) \equiv \Delta^{\mathrm{BC}}$, константу пропорційності, яка вже раніше фігурувала у рівнянні (4). Ця константа є універсальною величиною, залежною тільки від найважливіших загальних характеристик системи і від типу граничних умов $\mathrm{BC} = \{a, b\}$, накладених на її границях.

Амплітуда Казимира є пропорційною до величини індукованої далекосяжними флуктуаціями сили, що виникає між поверхнями при критичній температурі і визначається як

$$\frac{\mathcal{F}_C}{k_BT_c} = -\frac{\partial}{\partial L} f_{\mathrm{res}}^{a,b}(L; T = T_c) = \zeta_\iota \Delta^{\mathrm{BC}} L^{-(\zeta_\iota+1)}. \tag{8}$$

Від'ємні значення амплітуд Казимира Δ^{BC} відповідають силам притягання між поверхнями, а додатні — силам відштовхування.

Як вже згадувалося, у випадку звичайних ізотропних систем показник спадання $\zeta_\iota = d-1$, і він не залежить від способу розміщення поверхонь. Коли ж ми маємо справу із сильно анізотропними системами, суттєве значення має орієнтація поверхонь [44], яку ми

[4] Індексами a, b позначаються як самі поверхні, так і граничні умови, вибрані на кожній з них. Граничні умови можуть бути різними на кожній з поверхонь.

визначаємо індексом $\iota = \{\|, \perp\}$ для паралельної і перпендикулярної геометрій, відповідно. В m-вісній системі у d вимірах ми маємо (порівн. з (4))

$$\zeta_{\|} = d - m + \theta\, m - 1 \qquad \text{і} \qquad \zeta_{\perp} = (d-m)/\theta + m - 1\,. \tag{9}$$

Як показники спадання ζ_ι, так і амплітуди Казимира $\Delta_\iota^{\rm BC}$ з $\iota = \|$ і $\perp$ залежать не тільки від граничних умов на поверхнях, а й від орієнтації цих поверхонь відносно осей анізотропії, наявних у системі.

Перші некласичні вирази для амплітуд Казимира $\Delta_\iota^{\rm per}$ в точці Ліфшица для анізотропних систем з періодичними граничними умовами і обидвома варіантами орієнтації поверхонь були отримані в роботі [44]. Дослідження аналогічних систем з вільними граничними умовами типу Діріхле є набагато складнішими, на них ми зупинимося у подальшому.

3. Анізотропні систем з вільними граничними умовами

Модельні системи з вільними граничними умовами є привабливими з точки зору фізики, оскільки вони більш-менш реалістично відображають відповідні просторово обмежені фізичні об'єкти. Проте, відсутність трансляційної інваріантності (на відміну від періодичних граничних умов) у таких системах суттєво ускладнює їх математичний опис. Присутність анізотропії ще більше ускладнює ситуацію.

Випадок паралельної орієнтації поверхонь в системах з вільними граничними умовами є технічно простішим, і в роботі [44] вдалося розрахувати відповідні амплітуди Казимира з точністю до $O(\varepsilon)$ (де $\varepsilon = 4 + m/2 - d$), а також у сферичній границі n-векторної моделі Стенлі, $n \to \infty$.

Накладання вільних граничних умов на поверхні передбачає, що в системі відбувається звичайний (ordinary) перехід при $T = T_c$ [52]. Коли йдеться про перпендикулярну орієнтацію поверхонь і точку Ліфшица, то вільні граничні умови відповідають парі умов $\phi = \partial_n \phi = 0$ на границі [53], де ∂_n означає похідну вздовж внутрішньої нормалі до поверхні, тобто, вздовж однієї з осей анізотропії. Для цієї геометрії в роботі [44] амплітуду Казимира $\Delta_{\perp,\rm LP}^{\rm ord}$ було розраховано в гаусовому наближенні, що дало тільки ведучий член нульового порядку можливого ε-розкладу.

Для отримання цього результату потрібна статистична сума Z

була записана в [44] у вигляді функціонального інтеграла

$$Z = \int \mathcal{D}\phi\, {\rm e}^{-\mathcal{H}_0^{\rm LP}[\phi]} \prod_{\boldsymbol{r}} \prod_{j=1}^{2} \delta\left(\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r}, z_j)\right)\, \delta\left(\partial_z \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r}, z_j)\right), \tag{10}$$

подібно, як це робилося в [54, 55]. Тут функціональне інтегрування поширюється на конфігурації поля $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = \{\phi_i(\boldsymbol{x}),\, i = 1,\dots,n\}$ *для всіх* $\boldsymbol{x}$ *в безмежному просторі* $\mathbb{R}^d$, а геометричні обмеження разом з необхідними граничними умовами накладаються шляхом введення відповідних дельта-функцій. Ці дельта-функції забезпечують занулення поверхневих полів і їх нормальних похідних на поверхнях, що проходять через точки $z_1 = 0$ і $z_2 = L$, а також відділення внутрішнього об'єму плівки, яка нас цікавить, від решти простору поза її межами [12, 56, 57]. Відповідно до перпендикулярної конфігурації, що розглядається, вісь z співпадає з одним із α-напрямів (див. стор. 3). Нарешті, $\mathcal{H}_0^{\rm LP}[\phi]$ — *трансляційно інваріантний* Гаусовий ефективний гамільтоніан необмеженої системи безпосередньо в точці Ліфшица [40], що містить тільки квадратичні доданки за полем,

$$\mathcal{H}_0^{\rm LP}[\phi] = \frac{1}{2}\int d^{d-m}x_\beta \int d^m x_\alpha \Big(|\nabla_\beta \boldsymbol{\phi}|^2 + |\Delta_\alpha \boldsymbol{\phi}|^2\Big), \tag{11}$$

де градієнтний оператор ∇_β діє вздовж β-напрямів у підпросторі $\mathbb{R}_\beta^{d-m}$, а оператор Лапласа Δ_α — вздовж осей анізотропії в підпросторі $\mathbb{R}_\alpha^m$ повного фізичного простору вимірності d.

Результатом функціонального інтегрування в (10), виконаного в [44], є представлення амплітуди Казимира $\Delta_{\perp,\rm LP}^{\rm ord}(d,m,n)$ з $1 \le m \le d$ у вигляді подвійного інтеграла[5]

$$\begin{aligned}\Delta_{\perp,\rm LP}^{\rm ord} =& \frac{n}{2} K_{d-m} K_{m-1} \int_0^\infty dp\, p^{d-m-1} \int_0^\infty dq\, q^{m-2} \\ & \ln\Big[2{\rm e}^{-2\kappa_+}\Big({\rm ch}\, 2\kappa_+ + \frac{\kappa_+^2}{\kappa_-^2}\cos 2\kappa_- - 1 - \frac{\kappa_+^2}{\kappa_-^2}\Big)\Big],\end{aligned} \tag{12}$$

де $\kappa_\mp = (1/\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{p^2+q^4} \mp q^2}$, а p і q — модулі імпульсних змінних, спряжених до радіус-векторів $\boldsymbol{x}_\beta \in \mathbb{R}_\beta^{d-m}$ і $\boldsymbol{x}_\alpha \in \mathbb{R}_\alpha^{m-1}$, *які лежать у* $(d-1)$*-вимірних гіперплощинах* $\mathbb{R}_\beta^{d-m} \oplus \mathbb{R}_\alpha^{m-1}$, *паралельних до граничних поверхонь.*

[5] У крайніх точках інтервалу $m = 1$ і $m = d$ результати спрощуються до однократних інтегралів.

Підкреслимо, що результат (12) було отримано за допомогою штучної процедури без знання Гаусового пропагатора обмеженої системи, що розглядається. Ми не можемо аналогічним чином просунутися у вищі порядки теорії збурень за $\varepsilon = 4 + m/2 - d$. Для побудови Фейнманівських діаграм вищих порядків необхідно розрахувати вільний пропагатор теорії. Результат буде представлено в наступному пункті.

4. Вільний пропагатор плівки з перпендикулярною орієнтацією вільних поверхонь

У точці Ліфшица Гаусова теорія плівкової системи з перпендикулярною орієнтацією вільних поверхонь описується ефективним гамільтоніаном (11), в якому просторове інтегрування вздовж однієї з осей анізотропії, $z \equiv x_\alpha^{(m)}$, обмежується скінченним проміжком $[0, L]$:

$$\mathcal{H}_{0\perp}^{\mathrm{LP}}[\phi] = \frac{1}{2}\int d^{d-m}x_\beta \int d^{m-1}x_\alpha \int_0^L dz \Big(|\nabla_\beta \boldsymbol{\phi}|^2 + |\Delta_\alpha \boldsymbol{\phi}|^2\Big). \tag{13}$$

Для спрощення запису в порівнянні з [44] ми покладаємо рівним одиниці коефіцієнт σ_0 біля $|\Delta_\alpha \boldsymbol{\phi}|^2$; при потребі залежність від цього параметра можна відтворити за допомогою скейлінгових міркувань. Імпульсні змінні, спряжені необмеженим перпендикулярним і паралельним координатам $\boldsymbol{x}_\beta$ і $\boldsymbol{x}_\alpha$, позначатимемо як і раніше, $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$.

Для знаходження pqz-представлення вільного пропагатора плівки з вільними поверхнями перпендикулярної орієнтації в точці Ліфшица, $G_\perp^{\mathrm{FF}}(p, q; z_1, z_2)$, ми повинні розв'язати неоднорідне диференціальне рівняння четвертого порядку з дельта-функцією Дірака в правій частині,

$$\left[\left(\frac{d^2}{dz_1^2} - q^2\right)^2 + p^2\right] G_\perp^{\mathrm{FF}}(p, q; z_1, z_2) = \delta(z_1 - z_2), \tag{14}$$

для $z_1, z_2 \in [0, L]$ з урахуванням чотирьох граничних умов

$$G_\perp^{\mathrm{FF}}(p, q; z_1, z_2)\big|_{z_i \in \mathcal{B}_i} = \partial_{z_i}\, G_\perp^{\mathrm{FF}}(p, q; z_1, z_2)\big|_{z_i \in \mathcal{B}_i} = 0 \quad \text{з} \quad i = 1, 2, \tag{15}$$

де $\mathcal{B}_1$ і $\mathcal{B}_2$ означають поверхні системи при $z = 0$ і $z = L$.

Для компактності будемо використовувати спрощені символічні позначення, в термінах яких рівняння (14) записується у вигляді

$$\boldsymbol{L}\, G(x, \xi) = \delta(x - \xi), \qquad \text{де} \qquad \boldsymbol{L} \equiv \frac{d^4}{dx^4} - q_1 \frac{d^2}{dx^2} + q_0, \tag{16}$$

а $G(x, \xi)$ — функція Ґріна. Постійні коефіцієнти диференціального оператора $\boldsymbol{L}$ позначені q_1 і q_0 для збереження контакту із позначеннями роботи [58] яка буде суттєво використовуватися в подальшому. Для нашого рівняння (14) маємо

$$q_1 = 2q^2 = 2(\kappa_+^2 - \kappa_-^2) \quad \text{і} \quad q_0 = p^2 + q^4 = (\kappa_-^2 + \kappa_+^2)^2, \tag{17}$$

де комбінації $\kappa_\mp = (1/\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{p^2 + q^4} \mp q^2}$, як і в (12).

Загальна теорія функцій Ґріна викладена в багатьох монографіях з диференціальних рівнянь і методів математичної фізики (див., напр., [59–61]). В них розгляд рівнянь порядку вищого за другий є або надто абстрактним для практичних цілей, або обмежується описом прикладів, що включають лише $\boldsymbol{L}$ при $q_1 = q_0 = 0$. З іншого боку, наша проблема є частковим випадком задачі Штурма-Ліувілля для диференціальних рівнянь четвертого порядку, розв'язаної Еверіттом у 1957р. [58] з елегантністю та водночас на дуже практичному рівні. Пропагатор $G_\perp^{\mathrm{FF}}(p, q; z_1, z_2)$ з рівняння (14) отриманий нами у явному вигляді за схемою, розробленою в [58].
Загальні властивості функції Ґріна $G(x, \xi)$ добре відомі [59–61]:

- вона є добре визначеною і неперервною у всьому квадраті $x, \xi \in [0, L]$, включно з його межами, разом із першою та другою похідними.
- як функція x, для $x \in [0, \xi[$ і $x \in]\xi, L]$ вона задовольняє однорідному рівнянню $\boldsymbol{L}\, G(x, \xi) = 0$ із заданими початковими умовами і має неперервні похідні до четвертого порядку.
- при $x = \xi$ її третя похідна за x має скінченний стрибок

$$\lim_{\epsilon \to 0}\left[G'''(\xi + \epsilon, \xi) - G'''(\xi - \epsilon, \xi)\right] = 1. \tag{18}$$

- функція $G(x, \xi)$ є єдиною і симетричною відносно заміни її аргумента x і параметра ξ.

Чотирма основними кроками побудови функції Ґріна $G(x, \xi)$ є [59–61]:

1. Визначити чотири фундаментальні розв'язки $w_i \equiv w_i(x)$, $i = 1, \ldots, 4$ однорідного рівняння $\boldsymbol{L}\, w = 0$ і побудувати загальний інтеграл цього рівняння у вигляді їх лінійної комбінації

$$w(x) = C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3 + C_4 w_4. \tag{19}$$

2. Зі загального інтеграла $w(x)$ визначити такі два спеціальні розв'язки $w(1|x)$ і $w(x|2)$, що кожен із них задовольняє встановленим граничним умовам лише на *одному* кінці інтервалу, що розглядається. У випадку простих граничних умов (15) маємо $w(1|0) = w'(1|0) = w(L|2) = w'(L|2) = 0$, і функції $w(1|x)$ і $w(x|2)$ можна записати у вигляді лінійних комбінацій
$$w(1|x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) \qquad \text{і} \qquad w(x|2) = c_3\chi_1(x) + c_4\chi_2(x). \tag{20}$$
3. Визначити константи c_i з трьох умов неперервності — самих функцій та їх першої і другої похідних, а також значення стрибка третіх похідних для будь-якої внутрішньої точки $\xi \in]0, L[$,
$$w^{(\alpha)}(\xi|2) - w^{(\alpha)}(1|\xi) = \delta_{\alpha,3}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \tag{21}$$
де $\delta_{\alpha,\beta}$ — дельта-символ Кронекера. Як розв'язки рівнянь (21), коефіцієнти c_i є функціями параметра ξ.
4. Коли набір констант $c_1(\xi), \ldots, c_4(\xi)$ знайдений, функція Ґріна $G(x,\xi)$ однозначно визначається як
$$G(x,\xi) = \begin{cases} c_1(\xi)\phi_1(x) + c_2(\xi)\phi_2(x) & \text{для} \quad 0 \le x \le \xi < L \\ c_3(\xi)\chi_1(x) + c_4(\xi)\chi_2(x) & \text{для} \quad 0 < \xi \le x \le L \end{cases}. \tag{22}$$

Особливу роль в схемі розрахунку Еверітта [58] відіграє функція $P_x(u,v)$, що фігурує у формулі Ґріна, записаній у формі [59, с.255]
$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, [v(x)\boldsymbol{L}u(x) - u(x)\boldsymbol{L}v(x)] = P_x(u,v)|_{x_1}^{x_2}, \tag{23}$$
де $0 \le x_1 < x_2 \le L$, а u і v — дві довільні функції, що мають неперервні похідні принаймні до четвертого порядку. Цю формулу можна легко отримати з (16) за допомогою повторного інтегрування по частинах. Функція $P_x(u,v)$ називається білінійним конкомітантом диференціального оператора $\boldsymbol{L}$. Вона залежить від x, на що вказує нижній індекс, який є неявним аргументом функцій u і v. Для даного $\boldsymbol{L}$ з (16) ми маємо
$$P_x(u,v) = q_1 W(u,v) + W(u',v') - (uv''' - u'''v), \tag{24}$$
де W — детермінант Вронського, визначений для n функцій $u_n(x)$ як
$$W(u_1,\ldots,u_n) = \begin{vmatrix} u_1(x) & \ldots & u_n(x) \\ \ldots & & \ldots \\ u_1^{(n-1)}(x) & \ldots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Оскільки чотири функції $\phi_i(x)$ і $\chi_i(x)$ з (20) є лінійно незалежними, для них $W \equiv W(\phi_1,\phi_2,\chi_1,\chi_2)$ не дорівнює нулю, і його можна представити як
$$W = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}, \tag{26}$$
де $P_{ij} \equiv P_x(\phi_i,\chi_j)$ є незалежними від x (при цьому $P_x(\phi_1,\phi_2) = P_x(\chi_1,\chi_2) = 0$).

Формула (21) є неоднорідною системою лінійних рівнянь для невідомих коефіцієнтів c_i. Визначником цієї системи є $W \neq 0$, а отже (21) однозначно визначає константи c_i. Її алгебраїчний розв'язок приводить до виразу
$$G(x,\xi) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \chi_1(\xi) & \chi_2(\xi) \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix}\phi_1(x) + \frac{1}{W}\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ \chi_1(\xi) & \chi_2(\xi) \end{vmatrix}\phi_2(x) \tag{27}$$
$$\text{при} \quad 0 \le x \le \xi < L$$
і до аналогічної формули для $G(x,\xi)$ з $0 < \xi \le x \le L$, де ϕ і χ поміняні місцями.

У нашому випадку $\boldsymbol{L}$ з (16), однорідне рівняння $\boldsymbol{L}\,w = 0$ має такий самий фундаментальний набір лінійно незалежних розв'язків $w_i \equiv w_i(x)$, $i = 1, \ldots, 4$,
$$\begin{aligned} w_1 &= \mathrm{e}^{-x\kappa_+}\cos x\kappa_-, & w_2 &= \mathrm{e}^{-x\kappa_+}\sin x\kappa_-, \\ w_3 &= \mathrm{e}^{x\kappa_+}\cos x\kappa_-, & w_4 &= \mathrm{e}^{x\kappa_+}\sin x\kappa_-, \end{aligned} \tag{28}$$
як і в [53], де розглядалася напівбезмежна система з перпендикулярною орієнтацією поверхні. Отже, загальним розв'язком рівняння $\boldsymbol{L}\,w = 0$ є лінійна комбінація (19) функцій (28).

Дотримуючись загальних приписів, ми будуємо дві функції, $y_1(x)$ і $y_2(x)$, кожна з яких задовольняє одній граничній умові на межі інтервалу $[0, L]$. Початкові умови $w(0) = w'(0) = 0$ дають нам обмеження на коефіцієнти першої з них:
$$C_1 = -C_3 \qquad \text{і} \qquad (C_2 + C_4)\kappa_- + 2C_3\kappa_+ = 0\,. \tag{29}$$
Ці умови дозволяють нам побудувати потрібний розв'язок використовуючи пару довільних констант і двох відповідних лінійно незалежних функцій. Ми визначаємо $y_1(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ з
$$\begin{aligned} f_1(x) &= \operatorname{sh} x\kappa_+ \sin x\kappa_-\,, \quad \text{і} \\ f_2(x) &= \kappa_+\mathrm{e}^{-x\kappa_+}\sin x\kappa_- - \kappa_-\operatorname{sh} x\kappa_+\cos x\kappa_-\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Другий розв'язок, що задовольняє нульовим граничним умовам при $x = L$, можна визначити просто як $y_2(x) = c_3 f_1(L-x) + c_4 f_2(L-x)$.

Детермінантом Вронського чотирьох функцій f_i з y_1 і y_2 є

$$W(\phi_1, \phi_2, \chi_1, \chi_2) = -2\kappa_-^2 \kappa_+^2 (\kappa_-^2 + \kappa_+^2)\, \mathrm{w}(p,q), \tag{31}$$

де $\mathrm{w}(p,q)$ — функція

$$\mathrm{w}(p,q) = \kappa_-^2 \operatorname{ch} 2L\kappa_+ + \kappa_+^2 \cos 2L\kappa_- - \kappa_-^2 - \kappa_+^2. \tag{32}$$

Цієї інформації достатньо, щоб записати явний вираз для вільного пропагатора $G_\perp^{\mathrm{FF}}(p,q;z,z')$ при довільній кількості осей анізотропії m,

$$G_\perp^{\mathrm{FF}}(p,q;z,z') = \frac{h(s,y) + h(2L-s,y) - h(2L-y,y) - h(y,y)}{4\kappa_-\kappa_+(\kappa_-^2+\kappa_+^2)\,\mathrm{w}(p,q)}. \tag{33}$$

Функція $\mathrm{w}(p,q)$ наведена в (32), а функція $h(s,y)$ з $s \equiv z + z'$ та $y \equiv |z - z'|$ має вигляд

$$\begin{aligned} h(s,y) =& \kappa_+ \sin \kappa_- s \Big[(\kappa_-^2 + \kappa_+^2) \operatorname{ch} \kappa_+ y - \kappa_-^2 \operatorname{ch} \kappa_+ (2L - s) \Big] \\ & - \kappa_- \operatorname{sh} \kappa_+ (2L-s) \Big[(\kappa_-^2 + \kappa_+^2) \cos \kappa_- y - \kappa_+^2 \cos \kappa_- s \Big]. \end{aligned} \tag{34}$$

Як і раніше, $\kappa_\mp = (1/\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{p^2+q^4} \mp q^2}$.

Пропагатор $G_\perp^{\mathrm{FF}}(p,q;z,z')$ з (33) можна використовувати в розрахунках залишкової вільної енергії плівкових систем з перпендикулярною орієнтацією поверхонь та вільними граничними умовами. Отриманий результат узагальнюється на випадок масивної теорії з ненульовою масою τ_0 шляхом простої заміни $p^2 \to p^2 + \tau_0$ у явних виразах для κ_- і κ_+.

5. Розрахунок однопельової діаграми

Найпростішим прикладом використання пропагатора $G_\perp^{\mathrm{FF}}(p,q;z,z')$ з (33) є розрахунок однопельової діаграми для вільної енергії плівки. Для простоти розглянемо частковий випадок одновісної системи, $m = 1$. У цьому випадку єдина вісь анізотропії спрямована вздовж осі z, напрямку, в якому розмір системи є скінченним. Усі решта $d-1$ осей, паралельних до поверхонь, є β-напрямами (див. стор. 3).

У масивній теорії поля диференціювання за масою τ_0 інтеграла Фейнмана, що відповідає діаграмі , дає інтеграл, що відповідає діаграмі з точкою, . У pz-представленні останній має вигляд[6]

$$I = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \int_0^L dz\, G_\perp^{FF}(p;z,z). \tag{35}$$

Відповідно до формули (5), яка визначає надлишкову вільну енергію, ми з самого початку ліквідуємо внесок безмежного об'єму шляхом віднімання об'ємної частини пропагатора в підінтегральному виразі і розглядаємо інтеграл

$$\Delta I = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \int_0^L dz \Delta G_\perp^{FF}(p;z,z), \tag{36}$$

де $\Delta G_\perp^{FF}(p;z,z) = G_\perp^{FF}(p;z,z) - G_{LP}^\infty(p;0)$, і $G_{LP}^\infty(p;0) = 1/(8\kappa^3)$ з $\kappa = \sqrt{p}/2$. Таким чином, для підінтегральної функції в (36) маємо

$$\Delta G_\perp^{FF}(p;z,z) = \frac{e^{-2\kappa L}}{4\kappa^3} \frac{\hat{h}(z) + 2 - \sin 2\kappa L - \cos 2\kappa L - e^{-2\kappa L}}{1 + e^{-4\kappa L} + 2e^{-2\kappa L}\cos 2\kappa L - 4e^{-2\kappa L}}, \tag{37}$$

де $\hat{h}(z) = h_1(z) + h_1(L-z)$, а

$$h_1(z) = \sin 2\kappa z \left[2 - \operatorname{ch} 2\kappa(L-z)\right] - \operatorname{sh} 2\kappa z \left[2 - \cos 2\kappa(L-z)\right]. \tag{38}$$

Інтегрування за змінною z дає результат

$$\begin{aligned} \int_0^L & dz \Delta G_\perp^{FF}(p;z,z) = \\ & = -\frac{1}{4\kappa^4} + \frac{L}{4\kappa^3} \frac{e^{-2\kappa L}(2 - \sin 2\kappa L - \cos 2\kappa L - e^{-2\kappa L})}{1 + e^{-4\kappa L} + 2e^{-2\kappa L}\cos 2\kappa L - 4e^{-2\kappa L}}. \end{aligned}$$

Перший доданок є незалежним від L поверхневим внеском (порівн. з (5)), а другий — чистий внесок, притаманний системі скінченного розміру, відповідальний за появу амплітуди Казимира.

В останньому дробі формули (**??**) чисельник є похідною за κ від знаменника. Тому, відтворюючи залежність від маси в κ (див. примітку в кінці попереднього розділу), $\kappa \to \kappa(\tau_0) = 1/\sqrt{2}(p^2 + \tau_0)^{1/4}$,

[6] При $m = 1$ єдина вісь анізотропії співпадає з напрямом z. Оскільки інших осей анізотропії немає, у pqz-представленні зникають вектори $\boldsymbol{q}$, і ми маємо справу з pz-представленням, в якому вектор $\boldsymbol{p}$ є $(d-1)$-вимірним.

ми легко виконуємо зворотнє інтегрування за τ_0, і отримуємо внесок кільцевої діаграми  у вільну енергію:

$$\int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \int d\tau_0 \int_0^L dz \Delta G_\perp^{FF}(p;z,z) = -\int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \ln(p^2+\tau_0)$$
$$+ \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \ln\left[1+e^{-4\kappa L}+2e^{-2\kappa L}\cos 2\kappa L - 4e^{-2\kappa L}\right]. \qquad (39)$$

Подібно як і в (**??**), перший, незалежний від L внесок є поверхневою вільною енергією f_s з (5). Останній доданок в (39), який є скінченною функцією від L, узгоджується при $\tau_0 = 0$ з границею $m = 1$ інтегрального представлення (12) і приводить до результату однопетльового наближення для амплітуди Казимира $\Delta_\perp^{\mathrm{FF}}(m{=}1)$,[7]

$$\Delta_\perp^{\mathrm{FF}}(m{=}1) = nK_{d-1}2^{-d+1}\int_0^\infty dt\, t^{2d-3}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t}\cos t - 4\mathrm{e}^{-t}\right), \qquad (40)$$

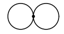
виведеного в [44, (5.87)] зовсім іншим способом, коротко окресленим на стор. 6, без знання вільного пропагатора $G_\perp^{\mathrm{FF}}(p,q;z,z')$ з (33).

6. Заключні зауваження

У цій роботі розрахований вільний пропагатор сильно анізотропної системи з плівковою геометрією і перпендикулярною орієнтацією вільних поверхонь відносно однієї з осей анізотропії, $G_\perp^{\mathrm{FF}}(p,q;z,z')$. З усіх комбінацій геометричних конфігурацій і граничних умов, розглянутих у [44], саме цей варіант виявився технічно найскладнішим. Тому для цього випадку в роботі [44] нам довелося обмежитися тільки розглядом Гаусового наближення, причому, без знання відповідного пропагатора, для отримання результату була використана штучна процедура, згадана на стор. 6. Зараз, у розділі 5, цей нетривіальний однопетльовий результат був відтворений альтернативним чином, з використанням представленого в (33) пропагатора $G_\perp^{\mathrm{FF}}(p,q;z,z')$.

Розрахунок поправок порядку $O(\varepsilon)$ і вищих залишається цікавою задачею для майбутнього. У наступному порядку розкладу за ε амплітуди Казимира $\Delta_\perp^{\mathrm{FF}}(m)$ необхідно розрахувати двохпетльову

[7] У d-вимірному Евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$ звичний геометричний фактор K_d визначається як $K_d \equiv (2\pi)^{-d}S_d$, де $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ — площа поверхні сфери одиничного радіуса, вбудованої в $\mathbb{R}^d$. У формулі (40) ми маємо справу з $(d-1)$-вимірною версією цієї ж самої константи.

діаграму . На нашу думку, для виконання конкретних розрахунків у першому порядку за ε доречно використати схему роботи Симанзіка [12], детально пророблену в [14]. Для випадку сильно анізотропних систем з орієнтацією поверхонь, перпендикулярною до однієї з осей анізотропії, і вільними граничними умовами, розглянутого в даній роботі, структура розрахунку з його відніманнями розбіжних членів повинна залишитися такою самою. Ускладняться тільки функціональні залежності відповідних складових частин нових підінтегральних функцій.

Автор вдячний за фінансову підтримку згідно з проектом НДР "Методи і моделі статистичної фізики для опису виникнення структур та пояснення скейлінгу у складних системах" за № держреєстрації 6541030.

Література

1. R. Garcia and M. H. W. Chan, *Critical fluctuation-induced thinning of ^{4}He films near the superfluid transition*, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 1187–1190.
2. M. Fukuto, Y. F. Yano and P. S. Pershan, *Critical Casimir effect in three-dimensional Ising systems: Measurements on binary wetting films*, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 135702–1—4.
3. C. Hertlein, L. Helden, A. Gambassi, S. Dietrich and C. Bechinger, *Direct measurement of critical Casimir forces*, *Nature* **451** (2008) 172–175.
4. M. Krech, *Casimir Effect in Critical Systems.* World Scientific, Singapore, 1994.
5. M. Kardar and R. Golestanian, *The "friction"of vacuum, and other fluctuation-induced forces*, *Rev. Mod. Phys.* **71** (1999) 1233–1245.
6. J. G. Brankov, D. M. Dantchev and N. S. Tonchev, *Theory of Critical Phenomena in Finite-Size Systems — Scaling and Quantum Effects.* World Scientific, Singapore, 2000.
7. A. Gambassi, *The Casimir effect: From quantum to critical fluctuations*, *J. Phys.: Conference Series* **161** (2009) 012037.
8. D. M. Dantchev and S. Dietrich, *Critical Casimir effect: Exact results*, `2203.15050`.
9. H. B. G. Casimir, *On the attraction between two perfectly conducting plates*, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **B51** (1948) 793–795.
10. S. K. Lamoreaux, *Demonstration of the Casimir force in the* 0.6 *to* 6 *μm range*, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 5–8.

11. M. E. Fisher and P.-G. de Gennes, *Phénomènes aux parois dans un mélange binaire critique*, C. R. Acad. Sci. Paris Série B **287** (1978) 207–209.
12. K. Symanzik, *Schrödinger representation and Casimir effect in renormalizable quantum field theory*, Nucl. Phys. B **190** (1981) 1–44.
13. M. Krech and S. Dietrich, *Finite-size scaling for critical films*, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 345–348.
14. M. A. Shpot, M. P. Chaudhary and R. B. Paris, *Integrals of products of Hurwitz zeta functions and the Casimir effect in ϕ^4 field theories*, J. Class. Anal. **9** (2016) 99–115.
15. M. Krech and S. Dietrich, *Free energy and specific heat of critical films and surfaces*, Phys. Rev. A **46** (1992) 1886–1922.
16. K. G. Wilson and M. E. Fisher, *Critical exponents in 3.99 dimensions*, Phys. Rev. Lett. **28** (1972) 240–243.
17. M. Krech, *Fluctuation-induced forces in critical fluids*, J. Phys.: Condensed Matter **11** (1999) R391–R412.
18. D. Grüneberg and H. W. Diehl, *Thermodynamic Casimir effects involving interacting field theories with zero modes*, Phys. Rev. B **77** (2008) 115409.
19. M. Krech, *Casimir forces in binary liquid mixtures*, Phys. Rev. E **56** (1997) 1642–1659.
20. D. Dantchev and M. Krech, *Critical Casimir force and its fluctuations in lattice spin models: Exact and Monte Carlo results*, Phys. Rev. E **69** (2004) 046119–1—20.
21. O. Vasilyev, A. Gambassi, A. Maciołek and S. Dietrich, *Monte Carlo simulation results for critical Casimir forces*, EPL **80** (2007) 60009.
22. O. Vasilyev, A. Gambassi, A. Maciołek and S. Dietrich, *Universal scaling functions of critical Casimir forces obtained by Monte Carlo simulations*, Phys. Rev. E **79** (2009) 041142.
23. M. Hasenbusch, *Thermodynamic Casimir effect for films in the three-dimensional Ising universality class: Symmetry-breaking boundary conditions*, Phys. Rev. B **82** (2010) 104425.
24. R. H. French, V. A. Parsegian, R. Podgornik, R. F. Rajter, A. Jagota, J. Luo et al., *Long range interactions in nanoscale science*, Rev. Mod. Phys. **82** (2010) 1887–1944.
25. H. W. Diehl, D. Grüneberg and M. A. Shpot, *Fluctuation-induced forces in periodic slabs: Breakdown of epsilon expansion at the bulk critical point and revised field theory*, Europhys. Lett. **75** (2006) 241–247.

26. K. Binder and J.-S. Wang, *Finite-size effects at critical points with anisotropic correlations: Phenomenological scaling theory and Monte Carlo simulations*, J. Stat. Phys. **55** (1989) 87–126.
27. M. Henkel, *Phenomenology of local scale invariance: from conformal invariance to dynamical scaling*, Nucl. Phys. B **641** (2002) 405–486.
28. S. Rutkevich, H. W. Diehl and M. A. Shpot, *On conjectured local generalizations of anisotropic scale invariance and their implications*, Nucl. Phys. B **843** (2011) 255–301.
29. C. C. Becerra, Y. Shapira, J. N. F. Oliveira and T. S. Chang, *Lifshitz point in MnP*, Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 1692–1695.
30. Y. Shapira, C. Becerra, N. Oliveira, Jr. and T. Chang, *Phase diagram, susceptibility, and magnetostriction of MnP: evidence for a Lifshitz point*, Phys. Rev. B **24** (1981) 2780–2806.
31. A. Zieba, M. Slota and M. Kucharczyk, *Modulated phases, magnetic phase diagrams, and the Lifshitz point in MnP from the mean field theory*, Phys. Rev. B **61** (2000) 3435–3449.
32. A. Aharony and D. Mukamel, *Possible Lifshitz point behaviour in NbO_2*, J. Phys. C **13** (1980) L255–L259.
33. A. Aharony, *Multicritical points in structural phase transitions*, Ferroelectrics **24** (1980) 313–318.
34. J. H. Chen and T. C. Lubensky, *Landau-Ginzburg mean-field theory for the nematic to smectic-C and nematic to smectic-A phase transitions*, Phys. Rev. A **14** (1976) 1202–1207.
35. A. Ajdari, L. Peliti and J. Prost, *Fluctuation-induced long-range forces in liquid crystals*, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 1481–1484.
36. S. Singh, *Phase transitions in liquid crystals*, Phys. Rep. **324** (2000) 107–269.
37. Y. M. Vysochanskiĭ and V. Y. Slivka, *Lifshitz point on the state diagram of ferroelectrics*, Usp. Fiz. Nauk **162** (1992) 139–160.
38. Y. M. Vysochanskii, T. Janssen, R. Currat, R. Folk, J. Banys, J. Grigas et al., *Phase Transitions in Ferroelectric Phosphorous Chalcogenide Crystals.* Vilnius University Publishing House, Vilnius, 2006.
39. I. Martynyuk-Lototska, O. Mys, B. Zapeka and R. Vlokh, *About the existence of a Lifshitz point on the phase diagram of $Sn_2P_2(Se_xS_{1-x})_6$ solid solutions: acoustic and optical studies*, Phil. Mag. **91** (2011) 3519–3546.
40. R. M. Hornreich, M. Luban and S. Shtrikman, *Critical behavior at the onset of $\vec{k}$-space instability on the λ line*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 1678–1681.

41. R. M. Hornreich, *The Lifshitz point: Phase diagrams and critical behavior*, *J. Magn. Magn. Mat.* **15–18** (1980) 387–392.
42. W. Selke, *Spatially modulated structures in systems with competing interactions*, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* (C. Domb and J. L. Lebowitz, eds.), vol. 15, pp. 1–72. Academic Press, London, 1992.
43. H. W. Diehl, *Critical behavior at m-axial Lifshitz points*, *Acta physica slovaca* **52** (2002) 271–283.
44. M. Burgsmüller, H. W. Diehl and M. A. Shpot, *Fluctuation-induced forces in strongly anisotropic critical systems*, *J. Stat. Mech: Theory Exp.* **2010** (2010) P11020–1–44.
45. V. Dohm and S. Wessel, *Exact critical Casimir amplitude of anisotropic systems from conformal field theory and self-similarity of finite-size scaling functions in $d \geq 2$ dimensions*, *Phys. Rev. Lett.* **126** (2021) 060601.
46. V. Dohm, S. Wessel, B. Kalthoff and W. Selke, *Multiparameter universality and conformal field theory for anisotropic confined systems: test by Monte Carlo simulations*, *J. Phys. A: Math. and Theor.* **54** (2021) 23LT01.
47. M. Łebek and P. Jakubczyk, *Thermodynamic Casimir forces in strongly anisotropic systems within the $N \to \infty$ class*, *SciPost Phys. Core* **4** (2021) 016.
48. P. Zdybel, M. Homenda, A. Chlebicki and P. Jakubczyk, *Stability of the Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov states in anisotropic systems and critical behavior at thermal m-axial Lifshitz points*, *Phys. Rev. A* **104** (2021) 063317.
49. H. W. Diehl and M. Shpot, *Critical behavior at m-axial Lifshitz points: Field-theory analysis and ϵ-expansion results*, *Phys. Rev. B* **62** (2000) 12338–12349.
50. M. Shpot and H. W. Diehl, *Two-loop renormalization-group analysis of critical behavior at m-axial Lifshitz points*, *Nucl. Phys. B* **612** (2001) 340–372.
51. J. Cardy, *Finite-Size Scaling*. Current Physics - Sources and Comments. Elsevier, Amsterdam, 1988.
52. H. W. Diehl, *Field–theoretical approach to critical behaviour at surfaces*, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* (C. Domb and J. L. Lebowitz, eds.), vol. 10, pp. 75–267. Academic Press, London, 1986.
53. H. W. Diehl, M. A. Shpot and P. V. Prudnikov, *Boundary critical behaviour at m-axial Lifshitz points of semi-infinite systems with a surface plane perpendicular to a modulation axis*, *J. Phys. A* **39** (2006) 7927–7942.
54. H. Li and M. Kardar, *Fluctuation-induced forces between rough surfaces*, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 3275–3278.
55. H. Li and M. Kardar, *Fluctuation-induced forces between manifolds immersed in correlated fluids*, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 6490–6500.
56. T. W. Burkhardt and E. Eisenriegler, *Critical phenomena near free surfaces and defect planes*, *Phys. Rev. B* **24** (1981) 1236–1243.
57. H. W. Diehl, S. Dietrich and E. Eisenriegler, *Universality, irrelevant surface operators, and corrections to scaling in systems with free surfaces and defect planes*, *Phys. Rev. B* **27** (1983) 2937–2954.
58. W. N. Everitt, *The Sturm-Liouville problem for fourth-order differential equations*, *Quart. J. Math. Oxford* **8** (1957) 146–160.
59. E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*. Dover, London, 1927.
60. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1. Wiley, New York, first English edition ed., 1989.
61. V. I. Smirnov, *A Course of Higher Mathematics*, vol. IV, Part 2. Nauka, Moscow, 1981.

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN: Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences; ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services; INSPEC; “Referatyvnyj Zhurnal”; “Dzherelo”.

CONTACT INFORMATION:
Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2761978; Fax: +38(032)2761158
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua   http://www.icmp.lviv.ua